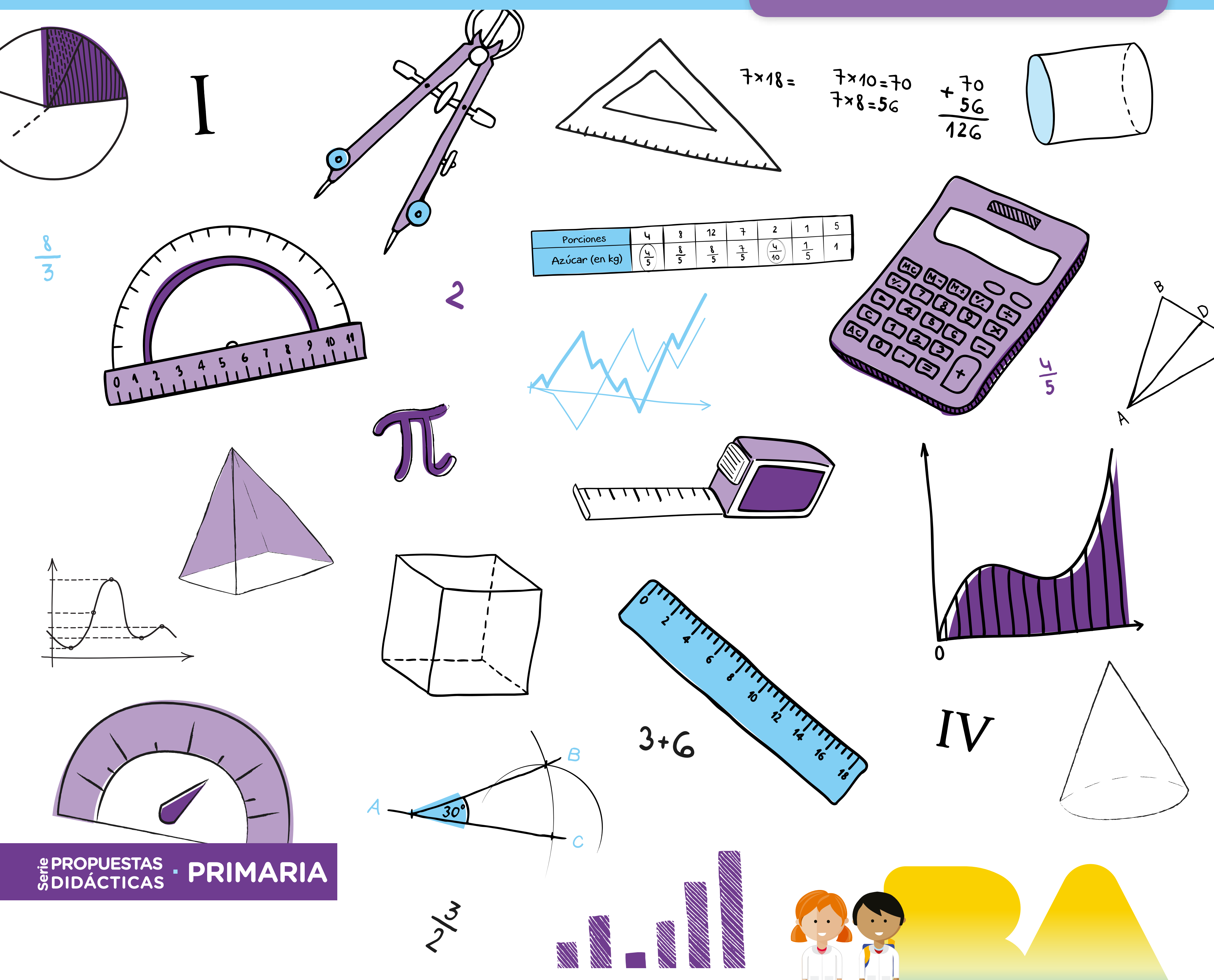
Matemática

Divisibilidad. De las operaciones a la construcción de anticipaciones

Una ocasión para abordar la transición entre prácticas aritméticas y algebraicas

Séptimo grado



Serie PROPUESTAS DIDÁCTICAS · PRIMARIA

Buenos Aires Ciudad

Vamos Buenos Aires

Jefe de Gobierno
Horacio Rodríguez Larreta

Ministra de Educación e Innovación
María Soledad Acuña

Subsecretario de Planeamiento e Innovación Educativa
Diego Javier Meiriño

Directora General de Planeamiento Educativo
María Constanza Ortiz

Gerente Operativo de Currículum
Javier Simón

Subsecretaria de Coordinación Pedagógica y Equidad Educativa
Andrea Fernanda Bruzos Bouchet

Subsecretario de Carrera Docente y Formación Técnica Profesional
Jorge Javier Tarulla

Subsecretario de Gestión Económico Financiera y Administración de Recursos
Sebastián Tomaghelli

Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa (SSPLINED)

Dirección General de Planeamiento Educativo (DGPLEDU)
Gerencia Operativa de Currículum (GOC)
Javier Simón

Equipo de generalistas de Nivel Primario: Marina Elberger (coordinación), Patricia Frontini, Ida Silvia Grabina

Especialistas: Héctor Ponce y María Emilia Quaranta (coordinación), Carla Cabalcabué, Daniela Di Marco, Rosa María Escayola, Valeria Ricci, Silvana Seoane, Inés Zuccarelli

---

Coordinación de materiales y contenidos digitales (DGPLEDU): Mariana Rodríguez
Colaboración y gestión: Manuela Luzzani Ovide

Corrección de estilo (GOC): Vanina Barbeito

Edición y diseño (GOC)
Coordinación de series Profundización NES y Propuestas Didácticas Primaria: Silvia Saucedo
Edición: María Laura Cianciolo, Bárbara Gomila, Marta Lacour
Diseño gráfico: Octavio Bally, Ignacio Cismondi, Alejandra Mosconi, Patricia Peralta

Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Matemática : divisibilidad : de las operaciones a la construcción de anticipaciones. - 1a edición para el profesor. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, 2018.
Libro digital, PDF - (Propuestas didácticas primaria)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-549-757-3

1. Educación Primaria. 2. Matemática. 3. Guía del Docente. I. Título.
CDD 371.1

ISBN: 978-987-549-757-3

Las denominaciones empleadas en los materiales de esta serie y la forma en que aparecen presentados los datos que contienen no implican, de parte del Ministerio de Educación e Innovación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, juicio alguno sobre la condición jurídica o nivel de desarrollo de los países, territorios, ciudades o zonas, o de sus autoridades, ni respecto de la delimitación de sus fronteras o límites.

En este material se evitó el uso explícito del género femenino y masculino en simultáneo y se ha optado por emplear el género masculino, a efectos de facilitar la lectura y evitar las duplicaciones. No obstante, se entiende que todas las menciones en el género masculino representan siempre a varones y mujeres, salvo cuando se especifique lo contrario.

Fecha de consulta de imágenes, videos, textos y otros recursos digitales disponibles en internet: 1 de junio de 2018.

Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa / Dirección General de Planeamiento Educativo / Gerencia Operativa de Currículum.
Av. Paseo Colón 275, 14° piso - C1063ACC - Ciudad Autónoma de Buenos Aires.
Teléfono/Fax: 4340-8032/8030

Presentación

Los materiales de la serie Propuestas Didácticas - Primaria presentan distintas propuestas de enseñanza para el séptimo grado de las escuelas primarias de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Para su elaboración se seleccionaron contenidos significativos de todas las áreas del *Diseño Curricular para la Escuela Primaria. Segundo ciclo*, respetando los enfoques de cada una. En las secuencias didácticas se ponen en juego, además, contenidos de áreas transversales incluidos en otros documentos curriculares, tales como los *Lineamientos curriculares para la Educación Sexual Integral en el Nivel primario* y el *Anexo Curricular de Educación Digital Nivel Primario*. A partir de este marco, se proponen temas que permiten abordar en la escuela problemáticas actuales de significatividad social y personal para los alumnos.

Los materiales que componen la serie se ofrecen como aportes al momento de diseñar una propuesta específica para cada grupo de alumnos. Al recorrer cada una de las secuencias, el docente encontrará consignas, intervenciones posibles, oportunidades de profundizar y de evaluar, así como actividades y experiencias formativas para los alumnos. Estos materiales promueven también la articulación con la secundaria, dado que comparten los enfoques para la enseñanza de las distintas áreas y abordan contenidos cuyo aprendizaje se retoma y complejiza en el nivel secundario.

Las secuencias didácticas propuestas no pretenden reemplazar el trabajo de planificación del docente. Por el contrario, se espera que cada uno las adapte a su propia práctica, seleccione las actividades sugeridas e intensifique algunas de ellas, agregue ideas diferentes o diversifique consignas.

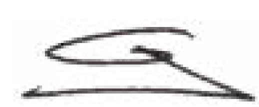
La serie reúne dos líneas de materiales: una se basa en una lógica areal y otra presenta distintos niveles de articulación entre áreas a través de propuestas biareales y triareales. Cada material presenta una secuencia de enseñanza para ser desarrollada durante seis a diez clases. Entre sus componentes se encuentran: una introducción, en la que se definen la temática y la perspectiva de cada área; los contenidos y objetivos de aprendizaje; un itinerario de actividades en el que se presenta una síntesis del recorrido a seguir; orientaciones didácticas y actividades en las que se especifican las consignas y los recursos para el trabajo con los alumnos así como sugerencias para su implementación y evaluación.

La inclusión de capacidades, como parte de los contenidos abordados, responde a la necesidad de brindar a los alumnos experiencias y herramientas que les permitan comprender, dar sentido y hacer uso de la gran cantidad de información que, a diferencia de otras épocas, está disponible y fácilmente accesible para todos. El pensamiento crítico, el análisis y comprensión de la información, la resolución de problemas, el trabajo colaborativo, el cuidado de sí mismo, entre otros, son un tipo de contenido que debe ser objeto de enseñanza sistemática. Con ese objetivo, la escuela tiene que ofrecer múltiples y variadas oportunidades para que los alumnos desarrollen estas capacidades y las consoliden.

Las secuencias involucran diversos niveles de acompañamiento y autonomía, a fin de habilitar y favorecer distintas modalidades de acceso a los saberes y los conocimientos y una mayor inclusión de los alumnos. En algunos casos, se incluyen actividades diversificadas con el objetivo de responder a las distintas necesidades de los alumnos, superando la lógica de una única propuesta homogénea para todos. Serán los equipos docentes quienes elaborarán las propuestas didácticas definitivas, en las que el uso de estos materiales cobre sentido.

Iniciamos el recorrido confiando en que esta serie constituirá un aporte para el trabajo cotidiano. Como toda serie en construcción, seguirá incorporando y poniendo a disposición de las escuelas de la Ciudad propuestas que den lugar a nuevas experiencias y aprendizajes.

Diego Javier Meiriño
Subsecretario de Planeamiento
e Innovación Educativa



Gabriela Laura Gürtner
Jefa de Gabinete de la Subsecretaría de
Planeamiento e Innovación Educativa

¿Cómo se navegan los textos de esta serie?

Los materiales de la serie Propuestas Didácticas - Primaria cuentan con elementos interactivos que permiten la lectura hipertextual y optimizan la navegación.

Para visualizar correctamente la interactividad se sugiere bajar el programa Adobe Acrobat Reader que constituye el estándar gratuito para ver e imprimir documentos PDF.

Portada

» Flecha interactiva que lleva a la página posterior.

Pie de página

Volver a vista anterior — Al cliquear regresa a la última página vista.

Ícono que permite imprimir.

« 6 » — Folio, con flechas interactivas que llevan a la página anterior y a la página posterior.

Índice interactivo

Introducción

Plaquetas que indican los apartados principales de la propuesta.

Itinerario de actividades

Actividad 1

Analizar la descomposición multiplicativa de un número

Esta actividad apunta a que los alumnos puedan analizar e identificar la información que permite obtener la descomposición multiplicativa de los números.

Organizador interactivo que presenta la secuencia completa de actividades.

Actividades

Analizar la descomposición multiplicativa de un número — Actividad 1

a. Imaginen que en la calculadora solo pueden usar las teclas correspondientes al 3, al 5 y el signo x, y decidan cuáles de las siguientes multiplicaciones podrían hacerse y cuáles no.

Actividad anterior — Actividad siguiente

Actividad anterior — Botón que lleva a la actividad anterior.

Actividad siguiente — Botón que lleva a la actividad siguiente.

Sistema que señala la posición de la actividad en la secuencia.

Íconos y enlaces

1 Símbolo que indica una cita o nota aclaratoria. Al cliquear se abre un *pop-up* con el texto:

Ovidescim repti ipita voluptis audi iducit ut qui adis moluptur? Quia poria dusam serspero voloris quas quid moluptur?Luptat. Upti cumAgnimustrum est ut

Los números indican las referencias de notas al final del documento.

El color azul y el subrayado indican un vínculo a la *web* o a un documento externo.

Indica enlace a un texto, una actividad o un anexo.

"Título del texto, de la actividad o del anexo"

Indica apartados con orientaciones para la evaluación.

Índice interactivo

Introducción

Los contenidos ligados a la divisibilidad plantean una complejidad para los alumnos por el entramado de relaciones que la sostienen. Estos contenidos suponen una recuperación y avance sobre los conocimientos ligados a la multiplicación y la división. Sin embargo, la enseñanza de la divisibilidad se reduce con frecuencia a la presentación de definiciones, criterios y algoritmos para hallar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) o el máximo común divisor (m.c.d.). De esta manera, tanto unos como otros quedan desprovistos de su fundamentación y, a su vez, se pierde la oportunidad de desplegar una práctica más fértil desde el punto de vista de la construcción de relaciones. En esta propuesta de trabajo se intenta ofrecer algunas herramientas para comenzar a abordar este problema.

En efecto, el trabajo sobre la divisibilidad es un terreno que permite profundizar las propiedades de la multiplicación y de la división, los lazos entre estas dos operaciones y las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto. Es necesario analizar estas vinculaciones para concebirlas como objetos de enseñanza, de manera que su abordaje no se limite a la presentación de definiciones, reglas y técnicas, con una pérdida de sentido consecuente. Es decir, estudiar la divisibilidad en un fuerte marco relacional abre una oportunidad privilegiada a la profundización del estudio de las relaciones multiplicativas en el mismo momento en que se construye una fundamentación para las relaciones de múltiplos y divisores. Al mismo tiempo, el estudio de la divisibilidad constituye una ocasión para avanzar en la elaboración de conjeturas, argumentos y generalizaciones que recorran transiciones entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas, a propósito de este contenido específico.

En este documento se presenta, entonces, una secuencia posible para el tratamiento de algunos conceptos vinculados a la divisibilidad. A la hora de abordar estos problemas en el aula se espera que los alumnos ya hayan tenido algún contacto con este contenido, resolviendo actividades y participando de discusiones acerca de las ideas de múltiplo y divisor en contextos extramatemáticos o intramatemáticos.

En las actividades iniciales se propone un trabajo en un contexto de uso de la calculadora que podría realizarse con o sin la utilización de ese recurso, ya que solo se trata de considerar una situación hipotética. Podría, por lo tanto, adecuarse la situación a grupos en los que no se disponga de este instrumento. Sin embargo, en el caso en que fuera posible su uso, se espera que los alumnos ya hayan abordado diferentes situaciones en las que debieron utilizar la calculadora, de modo tal que su empleo no resulte novedoso para ellos así como tampoco el modo de trabajo planteado que –como se desplegará a lo largo de este material– consiste en comprobar las anticipaciones realizadas.

En ese sentido, es importante aclarar que no se espera que necesariamente los alumnos encuentren solos las estrategias para resolver ni que expresen las relaciones en los términos descriptos en este documento. De ser preciso, sobre la base de los intentos de los alumnos, el docente puede enseñar –mostrar y explicar– una estrategia posible para poner en juego y dar, luego, la oportunidad de que los chicos la reutilicen, la desarrollen, la transformen para otros casos. Es decir, se resaltan la necesidad y el valor central de las explicaciones del docente en diferentes momentos de la tarea.

El propósito central de esta secuencia es promover distintas formas de descomponer un número en factores y analizar las informaciones que pueden obtenerse a partir de esa descomposición, que no resultan visibles inicialmente por la sola lectura de los números que componen un cálculo. En ese sentido, es también una oportunidad para enriquecer el significado de los números a partir de ampliar el abanico de operaciones que los constituyen y que los alumnos pueden concebir.

Además, las actividades presentadas son una nueva oportunidad para desplegar ideas sobre la relación entre la multiplicación y la división; entre múltiplos y divisores. Así, al reinvertir estos conocimientos en diversas situaciones, se apunta a que los alumnos amplíen y fortalezcan el tejido de relaciones matemáticas que pueden establecer. Este trabajo sentará las bases, por ejemplo, para –más adelante– analizar y dar sentido a los algoritmos que permiten hallar el m.c.d. y m.c.m.

La secuencia propuesta se apoya en la idea de fomentar un trabajo matemático que pone el foco en la formulación de conjeturas y en la producción de argumentos por parte de los alumnos. Esto hace que resulte imprescindible conocer las razones de las definiciones y del funcionamiento de los recursos de cálculo, y que estos no sean simplemente "textos de memoria" carentes de sentido.

Contenidos y objetivos de aprendizaje

Matemática
Ejes/Contenidos
• Resolución de problemas que involucren la descomposición multiplicativa de un número. • Formulación y validación de conjeturas relativas a las nociones de múltiplo y divisor. • Análisis de la información que porta una expresión aritmética para decidir si un número es múltiplo o divisor de otro, sin necesidad de hacer cálculos. • Análisis de la información que porta una expresión aritmética para decidir cuál será el resto de una división sin necesidad de hacer los cálculos.
Objetivos de aprendizaje
Se espera que, al finalizar esta secuencia, los alumnos puedan: • Identificar ciertas informaciones que contiene una escritura aritmética a partir de descomponer multiplicativamente los números que la componen. • Apelar a la descomposición multiplicativa –y, en particular a la descomposición en factores primos– de un número para establecer relaciones entre diferentes multiplicaciones y para anticipar los divisores de un producto. • Recurrir a la descomposición aditiva y multiplicativa de un número para encontrar el resto de una división.

Con este trabajo se promueve el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas mediante el debate de ideas y la producción colectiva. Se focaliza la tarea en el análisis de la información que portan ciertos cálculos aritméticos vinculados a la división y a la multiplicación, en las anticipaciones que es posible establecer a partir de considerar los factores (primos) que la constituyen y en las relaciones entre cálculos que pueden elaborarse al modificar las escrituras iniciales en otras más convenientes.

Itinerario de actividades

Actividad 1

Analizar la descomposición multiplicativa de un número

Esta actividad está compuesta por los problemas 1 a 10 y apunta a que los alumnos puedan analizar e identificar la información que permite obtener la descomposición multiplicativa de los números, tanto para conocer sus divisores como para determinar si dos multiplicaciones diferentes van a dar como resultado el mismo producto.

Actividad 2

Sintetizar lo aprendido en los problemas

Esta actividad apunta a que los alumnos expliciten los conocimientos elaborados en la secuencia y que tengan nuevas oportunidades de revisar las relaciones establecidas.

Orientaciones didácticas y actividades

Para trabajar con los problemas que se proponen a continuación es importante que el docente insista en que los alumnos escriban los cálculos que van a realizar y respondan cuáles multiplicaciones podrían hacerse y cuáles no, antes de comprobarlo con la calculadora. Es decir, que tomen decisiones, que anticipen resultados y recién después utilicen la calculadora para controlar lo que han anotado en sus carpetas. Esto implica un tipo particular de gestión de la clase que apunte a que haya, progresivamente, ciertas anticipaciones. En efecto, para que puedan prever el resultado de los cálculos, debe existir un momento de trabajo en el que la tarea no consista en realizarlos, sino en buscar, entre las relaciones que tienen disponibles, aquellas que les permiten hallar la respuesta solicitada. En esta fase del trabajo, el docente deberá sostener el nivel de incertidumbre que plantea la actividad y, en ese sentido, será interesante que evite momentáneamente sus juicios sobre lo acertado o no de los procedimientos de los alumnos, de modo que puedan verificar sus conjeturas con la calculadora y eventualmente corregirlas.

El trabajo con la calculadora, entonces, está organizado alrededor de dos ideas centrales. La primera está relacionada con las posibilidades de anticipar, de prever el resultado de una acción que todavía no fue realizada (en este caso, un cálculo) o que va a ser realizada en otro tiempo o en otro lugar. Este es, justamente, uno de los aspectos que hacen potente al conocimiento matemático: saber matemática permite independizarse de la realización empírica de cierta acción (en este caso, hacer la cuenta). La segunda idea tiene que ver con el poder de la calculadora de devolver a los alumnos –de modo inmediato e independientemente del docente– los resultados de sus anticipaciones.

Actividad 1. Analizar la descomposición multiplicativa de un número

Para realizar todos los problemas que componen esta actividad, es importante que los alumnos trabajen en pequeños grupos, de manera tal que puedan comentar e intercambiar opiniones sobre sus resoluciones mientras avanzan en ellas.

Además, también resulta valioso que, a medida que los alumnos resuelven y discuten los distintos problemas, puedan registrar –apoyados por el docente– las conclusiones e ideas que se van consensuando en los espacios de trabajo colectivo.

Analizar la descomposición multiplicativa de un número

Actividad 1

Problema 1

Imaginen que en la calculadora solo pueden usar las teclas correspondientes al 3, al 5 y el signo x, y decidan cuáles de las siguientes multiplicaciones podrían hacerse y cuáles no. Para las que sí se pueden, anoten con qué cálculos. Para las que no, expliquen por qué.

a. 15 x 15 =
b. 15 x 34 =
c. 15 x 60 =
d. 15 x 25 =
e. 15 x 45 =
f. 15 x 22 =
g. 15 x 35 =
h. 15 x 63 =
i. 15 x 81 =

Problema 2

Decidan, sin resolver los cálculos, cuáles de las multiplicaciones de la columna de la derecha van a dar el mismo resultado que las de la columna de la izquierda.

a. 24 x 12 =
b. 26 x 34 =
c. 73 x 48 =
d. 59 x 18 =

1. 59 x 6 x 3
2. 6 x 2 x 4 x 73
3. 24 x 6 x 2
4. 6 x 8 x 2 x 73
5. 24 x 2 x 2 x 3
6. 59 x 6 x 4
7. 59 x 2 x 9

Problema 3

Si ahora en la calculadora solo pueden usarse números de una cifra para cada factor, decidan cómo podrían resolverse las siguientes multiplicaciones. Además, identifiquen si es posible encontrar más de una multiplicación diferente para cada una de las propuestas.

24 x 12 72 x 48 144 x 24 27 x 15

Problema 4

Sin realizar ninguna de las multiplicaciones que se proponen, decidan cuáles de las cuentas de la columna de la derecha van a dar el mismo resultado que las de la columna de la izquierda.

a. 24 x 36
b. 18 x 25
c. 12 x 15

1. 20 x 9
2. 10 x 45
3. 27 x 32

d. 18 x 24
e. 30 x 16

4. 40 x 12
5. 27 x 16

Problema 5

Escriban, si es posible, dos multiplicaciones distintas que den como resultado cada uno de los siguientes números.

a. 12 **b.** 27 **c.** 44 **d.** 23

Problema 6

Descompongan los siguientes números en factores primos. ¿Es posible encontrar, para cada número, más de una descomposición en factores primos?

a. 42 **b.** 31 **c.** 36 **d.** 45

Problema 7

A partir de descomponer los siguientes números en sus factores primos, encuentren todos sus divisores:

a. 28 **b.** 60 **c.** 42 **d.** 32

Problema 8

Sin hacer la cuenta, decidan cuáles de las siguientes multiplicaciones tendrán resto 0 al dividirlas por 8.

a. 27 x 8
b. 24 x 25
c. 12 x 22
d. 34 x 14
e. 28 x 20
f. 45 x 21

Problema 9

Sin hacer las cuentas, averigüen cuál será el resto al dividir por 5 el resultado de los siguientes cálculos:

a. 34 x 5 =
b. 34 x 5 + 1 =
c. 34 x 5 + 5 =
d. 34 x 5 + 10 =
e. 34 x 5 + 11 =
f. 34 x 5 + 15 =
g. 34 x 5 + 17 =

Problema 10

Discutan y respondan las siguientes preguntas:

a. ¿Será cierto que si a un múltiplo de 5 se le suma 30 se obtiene otro múltiplo de 5?

b. ¿Será verdad que si se multiplica un múltiplo de 3 por un múltiplo de 4 se obtiene un múltiplo de 6?

c. El resultado de la multiplicación 245 x 322 es múltiplo de 5. ¿Será cierto que el triple de 245 por 322 es múltiplo de 15?

Actividad siguiente

En el problema 1, se espera que los alumnos puedan descomponer uno o ambos factores en una multiplicación que solo contenga los números 3 y/o 5. En algunos de los cálculos propuestos, esto es posible; en otros, no.

Actividad 1

Problema 1

Imaginen que en la calculadora solo pueden usar las teclas correspondientes al 3, al 5 y el signo x, y decidan cuáles de las siguientes multiplicaciones podrían hacerse y cuáles no. Para las que sí se pueden, anoten con qué cálculos. Para las que no, expliquen por qué.

a. 15 x 15 =	**d.** 15 x 25 =	**g.** 15 x 35 =
b. 15 x 34 =	**e.** 15 x 45 =	**h.** 15 x 63 =
c. 15 x 60 =	**f.** 15 x 22 =	**i.** 15 x 81 =

Si esa relación no apareciera entre los procedimientos de los alumnos, para el primer caso el docente podrá, por ejemplo:

- Preguntar si pensar el 15 como un producto de 3 y 5 puede ayudar en el cálculo.
- Retomar la idea de múltiplo que expresa que "un número natural *a* es múltiplo de un número natural *b* cuando *a* puede expresarse como el producto de *b* por otro número *c*".
- Retomar también la definición de divisor y analizar si el 3 y/o el 5 son divisores de cada uno de los factores que se proponen. Con respecto a esta relación, será necesario hacer notar que debe ser posible descomponer esos factores en multiplicaciones que solo contengan a 3 y/o a 5. Para 60, por ejemplo, 3 y 5 son divisores pero no puede descomponerse en una multiplicación que solo contenga estos números como factores.

Es fundamental que las descomposiciones que los alumnos realicen queden escritas en sus carpetas, ya que serán motivo de análisis y de reflexión. El docente podrá plantear otras actividades similares si encontrara que para los alumnos es necesario estabilizar estas relaciones. Para ello, podrá variar cuáles son las teclas de la calculadora que está permitido usar.

Se trata de reconocer con toda la clase que un número puede pensarse como compuesto por multiplicaciones. Como en este problema no se están incluyendo factores que sean números primos, entonces es posible establecer más de una multiplicación para cada caso. Por ejemplo, 45 puede pensarse como 3 x 15 y, luego, concluir que resultará 3 x 3 x 5; de la misma manera, 81 puede pensarse como 3 x 3 x 3 x 3 o 3 x 27, etcétera.

El hecho de que exista una única descomposición multiplicativa para los números primos será abordado en el problema 6. Aquí se trata, por el momento, de hacer foco en que es posible concebir un número compuesto por multiplicaciones; que esas multiplicaciones dan el mismo resultado (por ejemplo 15 x 45 = 3 x 5 x 9 x 5 = 3 x 5 x 3 x 3 x 5), porque con productos parciales es posible componer los factores intervinientes, y que es posible estar seguros de que el resultado de la multiplicación inicial y el de la que se forme con los números solicitados va a ser el mismo aunque no se haya hecho la cuenta, ya que las igualdades se mantienen.

El análisis de este problema puede extenderse al hecho de que, en este caso, como se buscan factores que solo estén compuestos por 3 y/o 5, los números posibles no pueden ser pares ya que no interviene ningún 2, y también al hecho de que ni todos los números impares cumplen las condiciones solicitadas (tal es el caso, por ejemplo, de 63), ni tampoco todos los impares terminados en 5 (tal es el caso de 35).

En los problemas siguientes el propósito será avanzar, precisamente, en el análisis de la información que brindan las descomposiciones multiplicativas.

Actividad 1

Problema 2

Decidan, sin resolver los cálculos, cuáles de las multiplicaciones de la columna de la derecha van a dar el mismo resultado que las de la columna de la izquierda.

a. 24 x 12 =	**1.** 59 x 6 x 3
b. 26 x 34 =	**2.** 6 x 2 x 4 x 73
c. 73 x 48 =	**3.** 24 x 6 x 2
d. 59 x 18 =	**4.** 6 x 8 x 2 x 73
	5. 24 x 2 x 2 x 3
	6. 59 x 6 x 4
	7. 59 x 2 x 9

En este problema los alumnos también deberán prever y tomar decisiones, y recién después comprobar con la calculadora lo acertado o no de sus anticipaciones. En este sentido, requiere de un tipo de gestión similar al desplegado en el problema anterior. De la misma manera, sería importante que los momentos de puesta en común no se reduzcan ni se centren exclusivamente en decidir si las respuestas son correctas o no, sino en fundamentar esa decisión analizando cómo pueden descomponerse los factores para realizar la multiplicación buscada.

El análisis podría extenderse a indagar si es posible pensar otras multiplicaciones para alguno de los cálculos a), b), c) y d) y –en el caso de que lo fuera– centrar la discusión en los argumentos que permiten estar seguros de las afirmaciones que se realicen. Estos argumentos se apoyarían en las equivalencias de las descomposiciones multiplicativas propuestas. El problema 3 apunta a esta cuestión.

Actividad 1

Problema 3

Si ahora en la calculadora solo pueden usarse números de una cifra para cada factor, decidan cómo podrían resolverse las siguientes multiplicaciones. Además, identifiquen si es posible encontrar más de una multiplicación diferente para cada una de las propuestas.

24 x 12   72 x 48   144 x 24   27 x 15

En el momento de discusión colectiva, el docente, además de analizar que la descomposición puede realizarse sobre cualquiera de los factores o sobre ambos simultáneamente, podrá mostrar en el pizarrón –retomando las conclusiones y los comentarios que se hayan elaborado hasta el momento– que, a partir de las descomposiciones realizadas, pueden armarse otras cuentas y que estas nuevas cuentas necesariamente van a dar los mismos resultados, ya que están hechas a partir de los mismos números. Es necesario hacer hincapié en que al descomponer en factores se mantiene el mismo número y al asociar estos factores de distintas maneras se está multiplicando por los mismos valores, solo que están ordenados de otra forma.

Por ejemplo: 24 x 12 =

3 x 8 x 3 x 4
3 x 2 x 4 x 3 x 2 x 2
3 x 2 x 4 x 6 x 2
6 x 4 x 6 x 2

Por lo tanto, aun cuando no se sepa cuánto es el producto de 24 x 12, puede afirmarse que va a ser el mismo que cualquiera de las descomposiciones del ejemplo, u otra que en la que todos los factores intervinientes compongan el producto 24 x 12.

Actividad 1

Problema 4

Sin realizar ninguna de las multiplicaciones que se proponen, decidan cuáles de las cuentas de la columna de la derecha van a dar el mismo resultado que las de la columna de la izquierda.

a. 24 x 36	**1.** 20 x 9
b. 18 x 25	**2.** 10 x 45
c. 12 x 15	**3.** 27 x 32
d. 18 x 24	**4.** 40 x 12
e. 30 x 16	**5.** 27 x 16

Este problema es complejo y plantea una nueva dificultad a los alumnos. Se trata de descomponer todos los factores de estas multiplicaciones y ver de qué manera es posible rearmarlos –incluyendo la posibilidad de combinar entre sí factores de los diferentes números que participan de la misma multiplicación– formando otras multiplicaciones equivalentes. Por ejemplo: 12 x 15 = 4 x 3 x 3 x 5 = 4 x 5 x 3 x 3 = 20 x 9.

Esta propuesta se apoya en el trabajo realizado en el problema 2. En aquella oportunidad, las multiplicaciones de la columna de la derecha tenían más de dos factores y esa descomposición facilitaba, de alguna manera, la tarea planteada. La resolución podía alcanzarse, entonces, descomponiendo solamente los cálculos de la columna de la izquierda y luego analizando si alguna de esas descomposiciones coincidía con las que se encontraban a la derecha.

El problema 4 avanza sobre esta tarea porque demanda que sean descompuestas las multiplicaciones de ambas columnas. La complejidad es mayor no solo por este hecho, sino también porque –como por el momento no se exige una descomposición en factores primos– queda en manos de los alumnos decidir qué factores utilizar dentro de los posibles para cada caso. Puede suceder entonces que los alumnos generen multiplicaciones que sean equivalentes, pero que estas equivalencias no les resulten evidentes en un primer momento. Por ejemplo, en el ítem d), 18 x 24, puede descomponerse como 6 x 3 x 8 x 3; y en la multiplicación 5), 27 x 16, como 3 x 9 x 4 x 4. Es difícil, si estos son los factores elegidos, determinar que ambas multiplicaciones van a dar el mismo resultado, como efectivamente ocurre.

Si esta complejidad apareciera, el docente podría alentar a los alumnos a seguir descomponiendo los factores, para analizar si es posible encontrar en una multiplicación los que son utilizados en la otra. También puede invitar a reordenar y combinar los factores que se están empleando, e incluso acompañar en la resolución proponiendo una descomposición determinada que resulte más aproximada a otra.

Se trata, en definitiva, de intervenir ayudando a encontrar relaciones entre unos y otros cálculos. Como puede notarse, el criterio a utilizar para responder a la consigna es el establecimiento de vínculos entre las multiplicaciones y no la determinación del resultado de cada uno de ellos, que podría funcionar –en todo caso– como comprobación.

Otro aspecto en común entre los problemas 2 y 4 es que, en ambos, la consigna establece la restricción de no realizar las cuentas que se proponen y, sin embargo, determinar cuáles de ellas van a dar el mismo resultado. Esta idea puede resultar algo desconcertante para los alumnos en un primer momento. Desde la perspectiva de este documento, la desorientación en la interpretación de la consigna no tendría origen tanto en la comprensión de la lectura de los enunciados, sino en el tipo de actividad matemática que se solicita. En ese sentido, la comprensión de la consigna no sería un hecho previo a la realización de la tarea, sino que se comprendería a medida que se resuelve la actividad.

Así, se espera que, como consecuencia del trabajo realizado, los alumnos comiencen a significar que tener el mismo resultado implica tener los mismos factores en la descomposición (incluso en diferente orden).

Actividad 1

Problema 5

Escriban, si es posible, dos multiplicaciones distintas que den como resultado cada uno de los siguientes números.

a. 12 **b.** 27 **c.** 44 **d.** 23

Para resolver los primeros tres ítems de este problema, pueden apelar a diferentes multiplicaciones, tanto de una como de más cifras. Por ejemplo: 12 = 2 x 2 x 3 = 4 x 3 = 2 x 6 = 12 x 1; 27 = 3 x 3 x 3 = 9 x 3 = 27 x 1; 44 = 11 x 4 = 11 x 2 x 2 = 22 x 2 = 44 x 1. Sin embargo, se encontrarán con que el último número sólo se puede escribir 23 = 23 x 1.

El objetivo es que, al finalizar la puesta en común, el docente pueda definir los *números primos* como aquellos que, al intentar escribirlos como multiplicación de dos números, solo pueden anotarse como el producto de 1 por sí mismos. Es decir, solo tienen dos divisores que son 1 y el mismo número. También es una oportunidad para definir los *números compuestos* como aquellos que no son primos, es decir, que pueden escribirse como una multiplicación de dos o más factores distintos de 1 y de sí mismos.

Por último, el docente podrá pedir a los alumnos que propongan otros ejemplos de números primos y compuestos y/o volver sobre el trabajo previo y solicitarles que distingan cuáles de las multiplicaciones escritas en los problemas ya resueltos tienen factores primos y cuáles compuestos.

Actividad 1

Problema 6

Descompongan los siguientes números en factores primos. ¿Es posible encontrar, para cada número, más de una descomposición en factores primos?

a. 42 **b.** 31 **c.** 36 **d.** 45

Problema 7

A partir de descomponer los siguientes números en sus factores primos, encuentren todos sus divisores:

a. 28 **b.** 60 **c.** 42 **d.** 32

Los problemas 6 y 7 están asociados, ya que avanzan sobre la descomposición multiplicativa, pero ahora en factores primos. En el problema 6, es importante destacar con los alumnos que la descomposición en factores primos es única y que, al analizarla, es posible obtener información sobre el número en cuestión. Por ejemplo, la descomposición de 42 (3 x 2 x 7) permite determinar que este número es múltiplo de todos sus factores y también de sus combinaciones. En otras palabras, este problema presenta una oportunidad para que el docente mencione a los alumnos que la descomposición en factores primos es única; sin embargo, es importante destacar que no se espera que se realice la demostración de esta propiedad en clase.

Por otro lado, el problema 7 se apoya en la tarea realizada en el problema precedente, pero añade la complejidad de estar formulado en términos de divisores y no de factores, como en los problemas anteriores. Requiere entonces poner en juego las relaciones entre ambas definiciones ya trabajadas.

Actividad 1

Problema 8

Sin hacer la cuenta, decidan cuáles de las siguientes multiplicaciones tendrán resto 0 al dividirlas por 8.

a. 27 x 8
b. 24 x 25
c. 12 x 22
d. 34 x 14
e. 28 x 20
f. 45 x 21

El problema 8 permite retomar la definición de números primos –y la propiedad de unicidad–, además de las ideas trabajadas en torno al problema 5. Es decir, para los casos donde el resto no es cero, la descomposición en factores primos permitirá asegurar que no es posible expresar el producto como "8 x algo", porque no se pueden hallar tres factores 2. Por ejemplo, en el caso de 34 x 14 = 2 x 17 x 2 x 7, la descomposición en factores primos asegura que no es posible hallar el 2 restante que permite armar el 8.

Actividad 1

Problema 9

Sin hacer las cuentas, averigüen cuál será el resto al dividir por 5 el resultado de los siguientes cálculos:

a. 34 x 5 =
b. 34 x 5 + 1 =
c. 34 x 5 + 5 =
d. 34 x 5 + 10 =
e. 34 x 5 + 11 =
f. 34 x 5 + 15 =
g. 34 x 5 + 17 =

A partir del trabajo realizado en los problemas anteriores, es posible establecer en la clase que 34 x 5 es múltiplo de 5, por lo tanto 5 es divisor del resultado de 34 x 5. Desde este punto de partida, se analizará que, si a un múltiplo de 5 se le suma 1, el resultado no puede ser nunca múltiplo de 5 y que ese 1 sobra en la división por 5. Para el caso c), se discutirá que, al sumar 5 a un múltiplo de 5, se obtiene otro múltiplo de 5. Para el cálculo 34 x 5 + 11, es probable que algunos alumnos propongan que el resto de la división por 5 de ese cálculo es 11. Si esto ocurriera, se les podría ofrecer que realicen la división, comparen el resto obtenido con su anticipación y traten de explicar por qué ambos números no coinciden. Otra intervención posible podría ser apelar al ítem d) y analizar por qué en ese caso el resto no es 10, si se está sumando ese número al producto de 34 x 5. Apoyados en estas ideas entonces, podría estudiarse el efecto de sumar 11.

Como se evidencia en el tipo de tarea propuesta, se trata de alentar a los alumnos a que establezcan relaciones entre cálculos. El establecimiento de estas relaciones entraña un verdadero trabajo de producción matemática de parte de los chicos, no solo porque las mismas no aparecen escritas en las cuentas que se proponen ni en los resultados que se obtienen –ya que hay que generarlas–, sino también porque implican un esfuerzo por identificar qué tienen de común y de distinto un cálculo con el otro. En ese sentido, hay cierto trabajo de generalización que se apoya inicialmente en el caso particular, pero que lo trasciende. Por ejemplo, 34 x 5 + 10 tendrá resto 0 al dividirlo por 5, porque puede pensarse como 34 x **5** + 2 x **5**. Para el inciso e), 34 x 5 + 11 tendrá resto 1 al dividirlo por 5, porque 34 x **5** + 11 = 34 x **5** + 2 x **5** + 1. En esta última expresión los dos primeros términos son múltiplos de 5, por lo tanto 1 indica el resto.

Actividad 1

Problema 10

Discutan y respondan las siguientes preguntas:

a. ¿Será cierto que si a un múltiplo de 5 se le suma 30 se obtiene otro múltiplo de 5?
b. ¿Será verdad que si se multiplica un múltiplo de 3 por un múltiplo de 4 se obtiene un múltiplo de 6?
c. El resultado de la multiplicación 245 x 322 es múltiplo de 5. ¿Será cierto que el triple de 245 por 322 es múltiplo de 15?

Con este problema se espera que los alumnos sigan avanzando en el grado de generalización de las ideas que se abordaron hasta el momento. En particular, el ítem a) recupera aquellas cuestiones analizadas en el problema 9; sin embargo, plantea un nuevo desafío en tanto que, en este caso, no se conoce el número inicial –al que se le suma 30– y el enunciado ya no aparece en términos de analizar el resto sino de estudiar múltiplos. En esta ocasión, los chicos deberán apelar nuevamente al ida y vuelta de las definiciones de múltiplo y divisor, ya trabajadas.

En relación con el ítem b), los alumnos deberán recurrir a las ideas planteadas sobre descomposición en factores primos, dado que con otras descomposiciones no será posible contestar a la pregunta. Al igual que el ítem a), esta cuestión avanza en términos de generalizaciones, ya que no se conocen los números iniciales, solamente se cuenta con la información de que se trata de múltiplos de 3 y de 4, respectivamente.

Por último, el inciso c) requiere un nuevo avance en relación con los anteriores dado que la información –el triple de 245– se presenta apelando a una expresión que no es solo numérica. Este hecho fuerza a que los alumnos deban analizar, primero, que dicho factor será múltiplo de 3 (por ser el triple) y, luego, que al tener un múltiplo de 5 que se multiplica por 3, en la descomposición multiplicativa se podrá “armar” un factor 15.

Intencionalmente, los enunciados que componen el problema 10 no hacen referencia a números específicos o aumentan el rango de los factores en juego. Se trata de que los alumnos tengan oportunidad de considerar cierta generalización en los razonamientos que elaboran. Esta idea –que recorre todos los problemas planteados– supone un juego entre lo particular y lo general que no se reduce a hacer surgir lo general a partir de un conjunto de casos particulares, sino que demanda cierta acción intelectual de los chicos sobre los objetos con los que están trabajando. En ese marco, un objetivo es que los ejemplos cobren sentido en la medida en que estén insertos en cierta problematización o se planteen al servicio de una explicación más general, que toma esos casos como referencia pero, al mismo tiempo, los trasciende. Por ejemplo, en el ítem d), el triple de la multiplicación propuesta será múltiplo de 15, porque es posible formar un 15 con los factores involucrados. En ese caso puntual, se trata del producto entre 245 y 322, pero se apunta a que, al explicar las razones por las cuales la respuesta es afirmativa, el 245 cumpla una función genérica, porque representa a cualquier número que sea múltiplo de 5. En ese sentido, las escrituras que se proponen y que se esperan como resultado del trabajo en torno a los problemas no requieren, en esta secuencia, del uso de letras para asomarse a cierta generalización. Este tratamiento de cuestiones más generales –más propio de una práctica algebraica– tiene como punto de apoyo a los conocimientos aritméticos que los alumnos han elaborado a lo largo de la escuela primaria y será el nexo con los nuevos conocimientos algebraicos en la escuela secundaria.

Actividad 2. Sintetizar lo aprendido en los problemas

Para realizar esta actividad de estudio, los alumnos pueden trabajar individualmente, en parejas o en pequeños grupos –según lo considere mejor el docente, teniendo en cuenta las características del grupo–, a partir de lo realizado en clase y de los registros en las carpetas. En los momentos que crea necesarios, el docente podrá intervenir para desarrollar una discusión colectiva de las ideas revisadas a lo largo de los problemas.

En la primera parte de esta actividad se propone un tipo de tarea similar a las desarrolladas en la secuencia.

Sintetizar lo aprendido en los problemas

Actividad 2

Primera parte

Decidan y justifiquen, en cada caso, si las siguientes afirmaciones se cumplen siempre, a veces o nunca.

Afirmación	Siempre	A veces	Nunca
a. Si se multiplica 21 por un número natural par, el resultado será múltiplo de 2.			
b. Si se multiplica 28 por cualquier número natural, el resultado será múltiplo de 8.			
c. Si se multiplica 21 por un número natural cualquiera, el resultado dará múltiplo de 3.			
d. Si se multiplica 21 por un número natural cualquiera, el resultado será múltiplo de 5.			
e. El resultado de multiplicar 33 por cualquier número natural será múltiplo de 11.			
f. Si se multiplica 15 por un número natural impar, el resultado será múltiplo de 2.			

Segunda parte

Busquen los problemas de la actividad 1 que se indican y realicen las siguientes consignas:

a. Revisen el problema 8 . Escriban 3 multiplicaciones que al dividirlas por 14 tengan resto 0.

b. Analicen el problema 9. En el ítem g) se propone una cuenta cuyo resultado, al ser dividido por 5, tiene resto 2. Escriban otros 3 números que se pueden sumar a la multiplicación entre 34 y 5 y que también permitan obtener 2 de resto al dividir toda la expresión por 5.

c. Vuelvan a leer el problema 7 y sus resoluciones. ¿Por qué la descomposición de un número en sus factores primos permite encontrar todos sus divisores?

Ver actividad 1

Actividad anterior

Respecto de la primera parte de esta actividad, es posible que la resolución y el análisis de los ítems que se proponen permitan también generar nuevas relaciones.

En el ítem d), el docente podrá ampliar el trabajo preguntando a los alumnos si existe algún número que, multiplicado por 21, dé como resultado un múltiplo de 5:

Afirmación	Siempre	A veces	Nunca
d. Si se multiplica 21 por un número natural cualquiera, el resultado será múltiplo de 5.			

Luego, se podrá explorar en qué casos el resultado es múltiplo de 5 y en cuáles no, concluyendo que esto dependerá del número por el cual se está multiplicando 21.

En la segunda parte de la actividad, se presentan consignas específicas para explicitar y sintetizar lo aprendido a partir de revisar los problemas resueltos.

Orientaciones para la evaluación

Como se anticipó en la introducción, este material ofrece una alternativa para iniciar el abordaje con la descomposición en factores primos y sienta las bases para un posterior trabajo argumentado sobre los algoritmos que permiten hallar el m.c.m. y el m.c.d., pudiendo dar cuenta de las relaciones matemáticas que sostienen sus funcionamientos.

Se propone un trabajo en el que los alumnos se apoyen en sus conocimientos, ideas, nociones acerca de los múltiplos y divisores para conjeturar y anticipar las respuestas. “Anticipar tiene aquí el sentido de prever el resultado de una acción que no se realiza, de conjeturar cierto desenlace a partir de algunas informaciones. Pero para que eso sea posible resulta imprescindible apoyarse en algún conocimiento que conecte lo que sí se sabe con lo que debe averiguarse” .

De esta manera, las sucesivas discusiones en los espacios de trabajo colectivo de la clase cargan de nuevos sentidos esos conocimientos, ideas, etc. y habilitan la construcción de otros. Así, será un trabajo progresivo en el que los alumnos –con el sostén y las explicaciones del docente– irán enriqueciendo y fortaleciendo ese entretejido de conocimientos matemáticos. El hecho de que los alumnos puedan elaborar ideas como estas a propósito del trabajo realizado está vinculado a la posibilidad que encontraron de hallar nuevas relaciones, por ejemplo entre las ideas de multiplicación y de división, de múltiplos y de divisores, de división entera y de resto de una división.

En ese sentido, algunos indicadores de avance en los conocimientos que los alumnos han adquirido, fruto del trabajo con los problemas planteados, podrían ser:

- La identificación progresiva de ciertas informaciones que porta una escritura aritmética. Por ejemplo, establecer que un producto es múltiplo de 7 porque alguno de sus factores puede descomponerse multiplicativamente en “7 por algo”.
- La apelación a la descomposición en factores primos y a su combinación para encontrar los divisores de un número.

- La conceptualización y uso de los números primos como los únicos números que tienen una única descomposición multiplicativa posible.
- La comprensión de que dos o más multiplicaciones permiten obtener el mismo producto si contienen los mismos factores primos.
- La posibilidad de establecer relaciones entre cálculos sin recurrir a su resolución.
- La utilización de la descomposición multiplicativa de un número para averiguar el resto de una división.
- La formulación de conjeturas que paulatinamente tengan un mayor grado de generalidad, avanzando desde el análisis de casos particulares a la elaboración de argumentos que sostengan ciertas generalizaciones. Por ejemplo, desde "21 x 5 será múltiplo de 15, porque en la descomposición multiplicativa hay un 3 y un 5 que forman el 15", avanzar hacia: "siempre que en una descomposición multiplicativa haya un 3 y un 5, el producto será múltiplo de 15".

Bibliografía

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Secretaría de Educación. *Diseño Curricular para la Escuela Primaria. Segundo ciclo de la Escuela Primaria/Educación General Básica*. Buenos Aires, 2004, tomo 2.

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Ministerio de Educación. *Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Propósitos y objetivos por sección y por área de Nivel Inicial*. Objetivos por grado y por área de Nivel Primario. Buenos Aires, 2014.

Ponce, Héctor. "La enseñanza de la Matemática en la escuela primaria", en Pitluk, L. (coord.) *Las propuestas de enseñanza y la planificación en la Educación Primaria*. Buenos Aires, Homo Sapiens Ediciones, 2015.

Notas

1 Ponce, H. "La enseñanza de la Matemática en la escuela primaria", en Pitluk, L. (coord.) *Las propuestas de enseñanza y la planificación en la Educación Primaria*. Buenos Aires, Homo Sapiens Ediciones, 2015, p. 70.

/educacionba buenosaires.gob.ar/educacion