Propuestas de actividades para el logro de los objetivos de aprendizaje

Matemática

Primer ciclo

Educación Primaria

Ministerio de Educación

Buenos Aires Ciudad

Propuestas de actividades para el logro de los objetivos de aprendizaje

Matemática

Primer ciclo

Educación Primaria

Ministerio de Educación

Buenos Aires Ciudad

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Ministerio de Educación. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa. Gerencia Operativa de Currículum.
Propuestas de actividades para el logro de los objetivos de aprendizaje: Matemática, primer ciclo, escuela primaria. / dirigido por Gabriela Azar. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa, 2015.
80 p. ; 29x21 cm.

ISBN 978-987-549-595-1

1. Guia Docente. 2. Matemática. I. Azar, Gabriela, dir.
CDD 371.1

ISBN 978-987-549-595-1

Hecho el depósito que marca la ley 11.723.

Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa
Gerencia Operativa de Currículum
Av. Paseo Colón 275, 14º piso
C1063ACC - Buenos Aires
Teléfono/Fax: 4340-8032/8030

Ministerio de Educación

Buenos Aires Ciudad

Propuestas de actividades para el logro de los objetivos de aprendizaje

Matemática

Primer ciclo. Educación Primaria

Gerencia Operativa de Currículum

Gabriela Azar

Asistentes de la Gerencia Operativa de Currículum

Viviana Dalla Zorza, Gerardo Di Pancrazio, Juan Ignacio Fernández, Mariela Gallo, Verónica Poenitz, Martina Valentini

Elaboración del material

María Emilia Quaranta

Héctor Ponce

Edición a cargo de la Gerencia Operativa de Currículum

Coordinación: María Laura Cianciolo

Edición y corrección: Gabriela Berajá, Andrea Finochiaro, Marta Lacour y Sebastián Vargas

Diseño gráfico: Patricia Leguizamón, Patricia Peralta y Alejandra Mosconi

Ilustraciones: Paula Socolowsky

Estimada comunidad educativa:

En esta oportunidad, tenemos el agrado de presentarles este documento de sugerencias didácticas, cuyo objetivo es precisar metas y estrategias de aprendizaje efectivo de la matemática en la escuela primaria.

La propuesta que se ofrece se basa en el trabajo con los números naturales y las operaciones en el Primer ciclo de la educación primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

En estas páginas podrán encontrar recomendaciones destinadas a que los docentes de nuestras escuelas cuenten con un valioso banco de propuestas didácticas para mejorar el aprendizaje significativo de los alumnos.

Estas sugerencias suponen un desarrollo en el aula basado en el abordaje de problemas, de búsqueda o exploración de las respuestas, de análisis de la validez de los procedimientos, de su pertinencia en relación con el problema, del análisis de las relaciones entre los diferentes procedimientos.

El propósito central es acompañar la tarea de enseñanza con esquemas de actividades que podrán ser utilizados y adaptados por los docentes.

Esperamos que esta sea una herramienta útil que permita orientar la enseñar en vistas a la concreción de las metas de logro y la mejora de los aprendizajes de los alumnos.

Los saludamos afectuosamente,

Gabriela Azar
Gerente Operativa de Currículum

María de las Mercedes Miguel
Directora General de Planeamiento e Innovación Educativa

Índice

Introducción

Este documento tiene el propósito de ofrecer ejemplos de propuestas de trabajo en relación con algunos objetivos de aprendizaje del área de Matemática en el Primer ciclo de la Escuela Primaria en la Ciudad de Buenos Aires. Intenta acompañar la tarea de los docentes con esquemas de actividades que cada uno podrá adaptar de acuerdo con su criterio y con el conocimiento de su grupo. No pretende ser exhaustivo ni excluyente. La consecución de los objetivos, por otra parte, depende de un trabajo de largo aliento y sostenido, con una variedad de tareas y una fuerte intencionalidad docente dirigida a la apropiación de los saberes y prácticas involucrados. Este largo plazo hace necesaria una mirada más global y articulada sobre los recorridos escolares de los alumnos de nuestras escuelas, que deben acompañarse con acuerdos institucionales que los consideren.

Reconociendo que una actividad no queda definida solo por su enunciado, sino por el marco de trabajo en el cual se la inserta, compartimos a continuación algunas ideas para organizar las propuestas con los alumnos.

Este documento se enmarca en la propuesta curricular para el trabajo del área.[1]

En ese sentido, estas sugerencias suponen un desarrollo en el aula basado en el abordaje de problemas, de búsqueda o exploración de las respuestas, de análisis de la validez de los procedimientos, de su pertinencia en relación con el problema, del análisis de relaciones entre los diferentes procedimientos. Estos análisis requieren ser orientados por el docente, recuperando producciones del aula. Requieren también una identificación por parte del maestro de los aspectos de dichas producciones que se van a retener y reutilizar, estableciendo su relación con los saberes matemáticos que son objeto de enseñanza. Es decir, este trabajo considera un uso de los números y de las operaciones primero en tanto herramientas para resolver situaciones antes de ser reconocidos y analizados como objetos

1 *Diseño Curricular para la Escuela Primaria. Primer ciclo de la Escuela Primaria/Educación General Básica*. G.C.B.A. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula, 2004

matemáticos, antes de ser sometidos a alguna formalización. Al mismo tiempo, se hace necesaria la identificación, simbolización y estabilización de los recursos que los alumnos se van apropiando, pero tejidos a partir del trabajo de elaboración de relaciones que los cargan de sentido:

"El desafío consiste, entonces, en poder pensar la enseñanza en el ciclo y dentro de cada año como un equilibrio y un movimiento entre el planteo de situaciones abiertas, la aparición de diversos procedimientos y formas de representación, el dominio de los recursos, la automatización de ciertos conocimientos, la reinversión de nuevas situaciones".[2]

Como podrá notarse, las ideas que fundamentan estas propuestas de trabajo sobre los números y las operaciones sostienen que los aprendizajes sobre los números permiten avances en relación con las operaciones y, recíprocamente, una mayor comprensión de las operaciones genera nuevos conocimientos sobre el sistema de numeración. Por esa razón, es difícil separar las actividades que se dirigen en uno u otro contenido. Ser conscientes de estas relaciones habilita a los docentes a traccionar los análisis de la clase hacia los aspectos del sistema de numeración involucrados en el trabajo sobre las operaciones y viceversa.

Para elaborar las actividades y comentarios que se ofrecen en este material se ha utilizado como referencia el documento *Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires*.[3] Las propuestas que aquí se presentan constituyen un recorte centrado en el trabajo en torno a los números naturales y las operaciones para el Primer ciclo de la Escuela Primaria.

En primer lugar, se presentan los objetivos para el grado y luego se desarrollan apartados organizados bajo el título "Propuestas y comentarios sobre...". Estas secciones contienen un conjunto de situaciones que en algunos casos son juegos, y en otros, se trata de problemas para trabajar en clase.

Tal como señalamos al comienzo, al tratarse de contenidos que se relacionan estrechamente, algunas secciones remiten a más de uno de los objetivos propuestos, y otras veces puede ocurrir que varias propuestas estén vinculadas a un mismo objetivo de aprendizaje.

Creemos que esta organización flexible permite comunicar mejor el tipo de trabajo matemático en el que estos objetivos cobran sentido.

2 *Ibid.*, p. 301.
3 *Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires*. G.C.B.A. Ministerio de Educación. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa. Gerencia Operativa de Currículum, 2014.

Objetivos de aprendizaje Números naturales y operaciones

PRIMER GRADO

- Utilizar el conteo para armar una colección de objetos, para comparar colecciones de objetos, para determinar posiciones en una serie, etcétera.
- Comparar números escritos de diferente cantidad de cifras, o de la misma cantidad de cifras.
- Interpretar y producir escrituras numéricas de dos dígitos basándose en relaciones entre la serie numérica oral y la escrita.
- Participar de intercambios en relación con la numeración oral y escrita en los que se expliciten y discutan relaciones numéricas.
- Desplegar estrategias (conteo apoyado en gráficos o en números, cálculos) para abordar problemas de suma y resta en los que se involucren los sentidos más sencillos de estas operaciones: unir, agregar, ganar, avanzar, quitar, perder, retroceder.
- Utilizar un repertorio incipiente de algunos resultados de sumas.
- Elaborar y analizar procedimientos basados en descomposiciones aditivas de los números.
- Establecer relaciones entre el repertorio de sumas conocido y otros cálculos. Introducirse en la producción de explicaciones de dichas relaciones.

PROPUESTAS Y COMENTARIOS SOBRE SITUACIONES DE CONTEO

Las adquisiciones que se espera que los niños puedan elaborar en torno al conteo desbordan ampliamente el conocimiento de la serie numérica. En efecto, contar implica, además de conocer la serie numérica, asignarle una palabra –que es el nombre de un número–, y solo una, a cada uno de los objetos que se está considerando, y reconocer que el último número nombrado corresponde a la cantidad total de objetos.

El trabajo didáctico respecto de este contenido de enseñanza es de la mayor relevancia, porque contar puede constituir una herramienta poderosa para determinar la cantidad de objetos de una colección, y también constituye un primer recurso –que luego se hará avanzar hacia otros más económicos– para resolver los primeros problemas aditivos en el inicio del recorrido escolar.

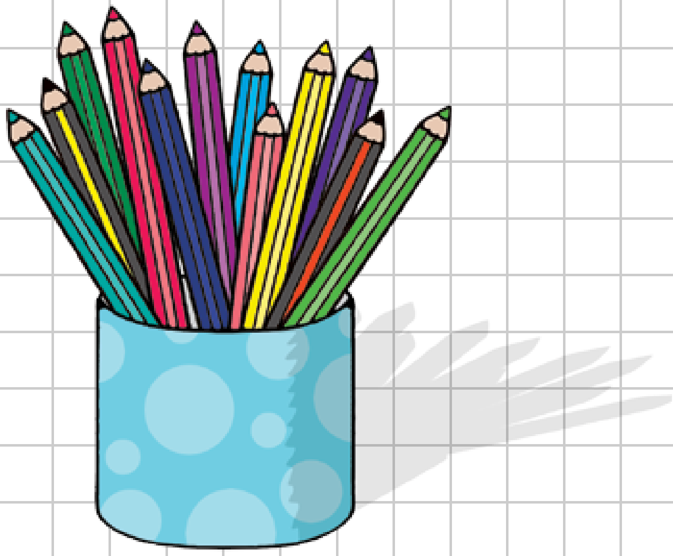
Usar el conteo para determinar una cantidad de objetos

Establecer la cantidad de elementos de una colección a través del conteo es una tarea que puede resultar compleja, porque requiere desarrollar ciertas estrategias de control: es necesario tener cuidado de considerar todos los elementos sin omitir ninguno y de no incluir alguno más de una vez.

Si los objetos se pueden desplazar al ser contados es posible –aunque no evidente para los niños pequeños– ir separándolos del grupo original a medida que se van contando.

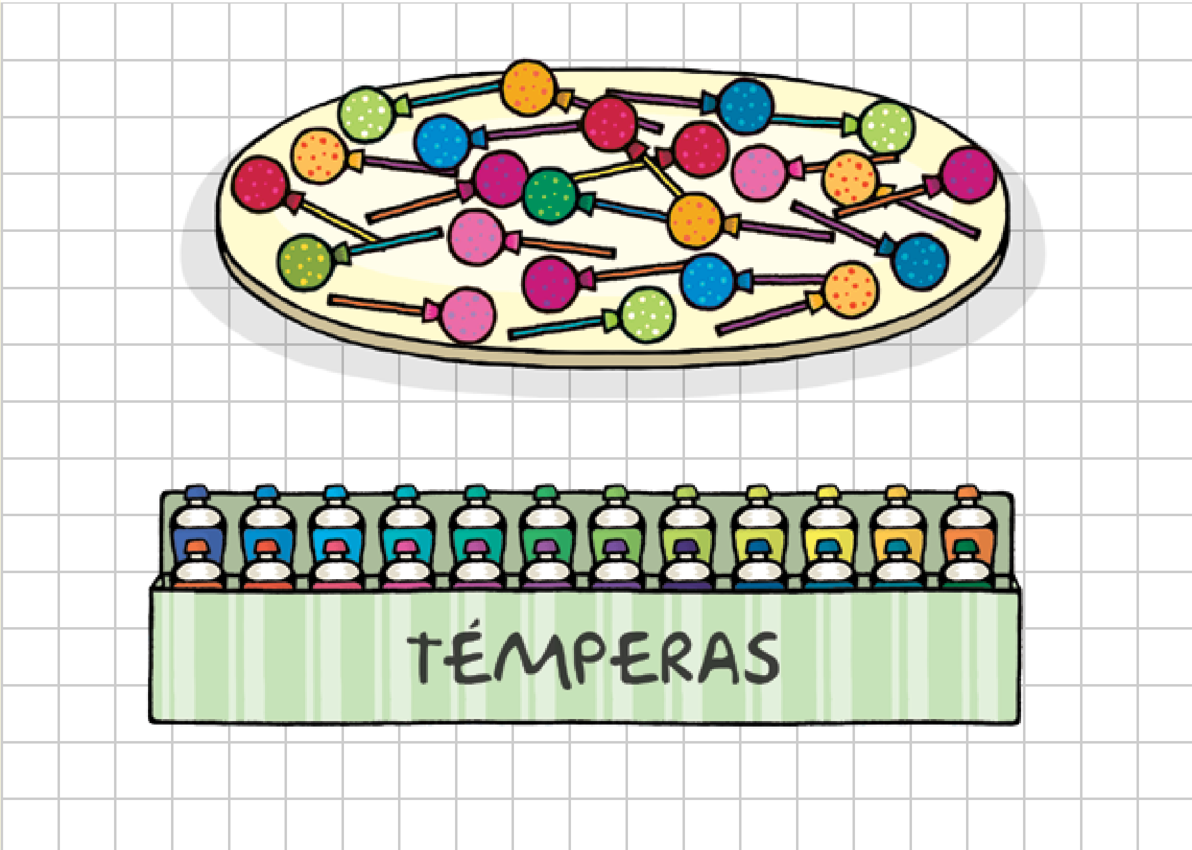
Si estos no pueden moverse, como por ejemplo en la imagen que presentamos debajo, va a ser necesario marcarlos de alguna manera (pintarlos, tacharlos) para discriminar entre los objetos contados y los que quedan por contar. Encontrar formas de controlar el conteo, por ejemplo desplazando los objetos o marcándolos según el caso es, para muchos chicos, un aprendizaje importante que la escuela puede brindarles.

¿Cuántos lápices hay en este portalápices?



Por supuesto, esta tarea es menos compleja si los objetos se encuentran ordenados de cierta manera, y más compleja si se hallan desordenados. Asimismo, la forma en que están ordenados incide en la mayor facilidad para establecer este control: por ejemplo, si están dispuestos en un círculo, habrá que saber dónde se inició el conteo para saber dónde detenerlo.

Así, la disposición de los objetos puede hacer que el problema sea más o menos complejo. Por ejemplo, determinar cuántas témperas hay en la caja es más sencillo que establecer la cantidad de chupetines de esta bandeja.



Y por supuesto también, la cantidad de elementos es una característica que se debe considerar. Si el número de objetos crece, entonces será necesario buscar maneras de organizar esa colección (por ejemplo, agrupando); no solo para no tener que comenzar todo otra vez desde el comienzo, si surge algún problema antes de establecer el total, sino también para tener la posibilidad de contar hasta un número relativamente bajo (aquel que se determine como el máximo para armar los grupos) y luego contar los grupos y ya no los elementos de uno en uno.

Algunas situaciones en las que se debe armar una colección de cierta cantidad de elementos permiten desplegar estrategias de conteo, si se tienen en cuenta algunas condiciones del problema.

Por ejemplo, si se le solicita a un alumno que reparta una hoja en blanco a cada uno de sus compañeros para realizar una actividad, es posible que ese alumno tome una cantidad indeterminada de hojas y, al distribuirlas, se encuentre con que le faltan o con que le sobran hojas. Si eso sucede, seguramente el niño vuelva sobre el pilón de hojas y restituya las que le sobraron o tome algunas más para cumplir con el pedido. En este caso, no es necesario recurrir al conteo para realizar la tarea.

Sin embargo, si se le pide que vaya a buscar hojas una sola vez para que le dé una a cada uno de sus compañeros de manera que no le sobre ni que le falte ninguna, los ajustes sobre la cantidad (que era posible realizar en las condiciones anteriores) ahora están bloqueados. Estas nuevas condiciones favorecen el uso del conteo como una herramienta que permite resolver la situación. En este caso, la colección de hojas debe tener la misma cantidad de elementos que la colección de alumnos.

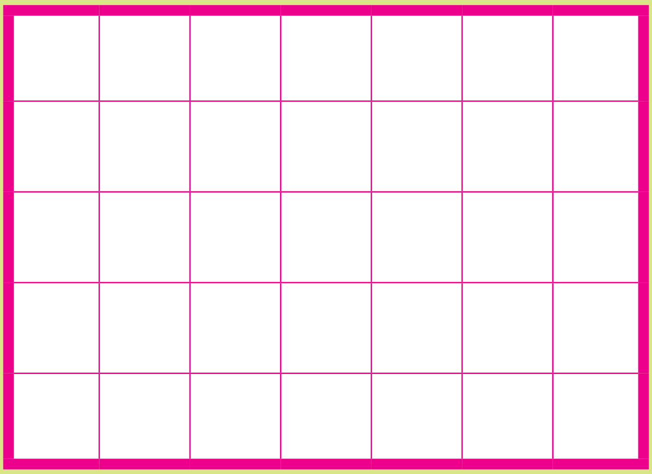
Contar para resolver los primeros problemas aditivos

Los juegos de dados y cartas constituyen un recurso fecundo a partir del cual las primeras resoluciones asociadas al conteo pueden tensionarse hacia la adquisición de otras estrategias como el sobreconteo o, incluso, el cálculo. Las siguientes variaciones sobre un juego de dados permiten ilustrar esta idea.

Juego de dados

Materiales:

Dos dados con la configuración usual.
Un tablero como el siguiente para cada jugador.



Reglas del juego:

Se juega de a dos. Por turnos, cada jugador tira los dos dados y tacha en su tablero una cantidad de casilleros igual a la cantidad que se sacó en los dados. El primero que completa su tablero es el ganador.

Un elemento importante en el desarrollo de la actividad es el tipo de dado que se habilita para el juego. Así, si los dados tienen la configuración convencional, una posibilidad de resolución es que los alumnos establezcan el puntaje obtenido en cada tirada a partir de contar los puntos de uno de los dados (cualquiera de ellos) y luego sigan contando sobre el otro.

Es posible también que el conteo no se inicie en el número 1, sino que haya alumnos que para algunas caras del dado (o tal vez para todas) reconozcan de qué número se trata y no necesiten contar los puntitos. En ese caso, es posible entonces contar sobre el segundo dado a partir de identificar la cantidad que indica el primero de ellos.

Este sobreconteo –la acción de contar desde un número distinto de 1– ya implica cierta economía en la resolución. Sin embargo, es un recurso que puede incluso mejorarse si se identifica cuál de los dos dados conviene elegir para comenzar a contar. En efecto, si el reconocimiento de las caras no presenta dificultades, resulta más conveniente elegir el mayor de los dos dados para iniciar el conteo.

Este hecho no es evidente para los alumnos y puede constituirse en un recurso potente, que puede colocarse a su disposición a partir de constituirse en objeto de trabajo en el aula.

Mientras el juego se desarrolle con los dados convencionales, está habilitada la posibilidad del conteo, más allá de que algunos niños tengan ya disponibles y utilicen ciertos resultados memorizados particulares, como por ejemplo 1 y 1, 5 y 5.

Si, en cambio, uno de los dados mantiene la configuración convencional y el otro tiene los números del 1 al 6 en cifras, las posibilidades de contar están bloqueadas, y debe apelarse o bien al sobreconteo o bien al conjunto de resultados memorizados dentro de esa gama de sumas posibles.

Será necesario proponer a los niños un trabajo a lo largo del Primer ciclo que les permita construir progresivamente un repertorio de sumas y restas. Repertorio que desborda el conjunto de cálculos asociados a esta actividad particular y que apunta a tener en la memoria ciertos resultados, de modo que ya no sea necesario apelar al conteo para resolver.

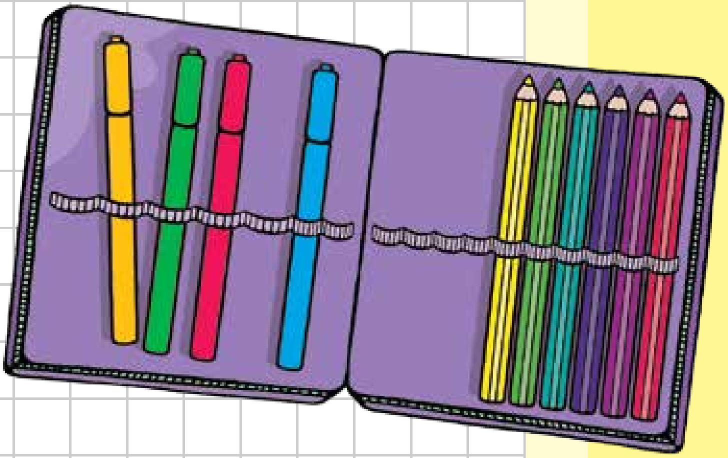
Estos cálculos permiten la resolución de otros que no están incluidos en ese repertorio memorizado, extendiendo así la red de sumas y restas que los niños pueden enfrentar sin apelar al conteo. Por ejemplo, para resolver 6 + 5 –que no pertenece a ese grupo de cálculos cuyos resultados se memorizarían inicialmente– se puede recurrir a alguno de los siguientes, que sí forman parte de esa colección memorizada como el cálculo de dobles (5 + 5 ó 6 + 6).

La presentación de ciertas situaciones donde se movilizan algunos sentidos sencillos de la suma y la resta, pero que ya no tienen un formato de juego, sino que se acercan al estilo de problemas más convencionales, también pueden ser abordados por los niños apelando inicialmente al conteo para ir avanzando –impulsados por la enseñanza– hacia procedimientos más vinculados al cálculo.

En esos casos, un aspecto a considerar es la forma en la que se plantean los datos, porque la presentación puede promover o no determinados procedimientos de resolución.

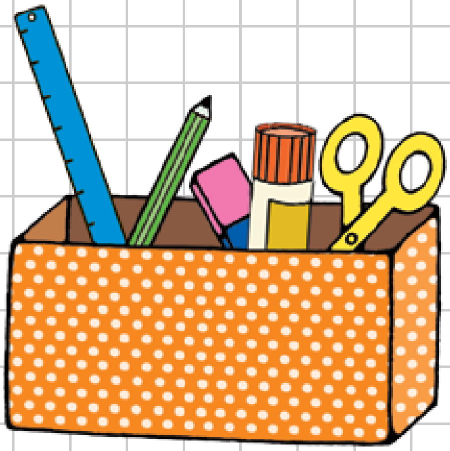
Problema 1

Inés guardó en su cartuchera
6 lápices y 4 marcadores.
¿Cuántos útiles guardó en total?



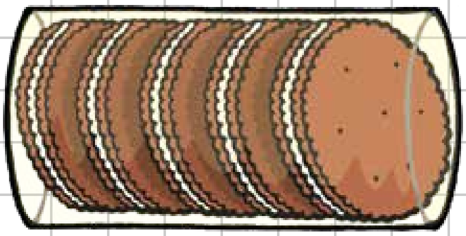
Problema 2

En la caja de objetos perdidos
había 5 útiles.
Martina encontró 6 más.
¿Cuántos objetos hay ahora?



Problema 3

Nicolás llevó este paquete de
galletitas a la escuela.
Si se comió 2 galletitas,
¿cuántas le quedaron?



Problema 4

En un colectivo viajan 11 pasajeros. Si se bajan 4 en una parada y no sube nadie, ¿cuántos pasajeros quedan en el colectivo?

Los problemas anteriores remiten a algunos de los sentidos más simples de la suma y la resta.

Los problemas 1 y 2 tienen en común que en ellos deben unirse dos cantidades. Sin embargo, el problema 1 puede resultar más sencillo, porque es posible encontrar el total contando los lápices y los marcadores que ya aparecen en la imagen. En cambio, en el problema 2, si el recurso que va a utilizarse es el conteo, será necesario incorporar el dibujo de los útiles encontrados, o bien hacer algún tipo de marcas (palitos, cruces, bolitas) que los represente. En este caso, entonces, la "invitación" al conteo no es tan explícita como en el problema anterior, es una estrategia que tiene un paso intermedio.

Este paso intermedio (agregar alguna representación de los 6 elementos que se enuncian pero no se muestran) puede eludirse si se utiliza de alguna manera el sobreconteo contando desde 6 y controlando de considerar todos los elementos de la caja de útiles. Nótese que no sería sencillo sobrecontar desde 4 y agregar –al mismo tiempo– los 6 elementos restantes, porque hay en juego dos conteos simultáneos: el de los 6 útiles que se agregan y el de la unión entre 4 y 6.

Los problemas 3 y 4 remiten a la resta, aunque también tienen diferencias entre ellos. El problema 3 tiene la colección completa dibujada, lo que permite que para averiguar el total sea posible tachar las galletitas que se comieron. En ese caso, hay dos conteos sucesivos: contar las 2 que deben eliminarse y luego contar las que quedan, que es la respuesta al problema.

En el problema 4 no aparece el total de los pasajeros; los que están en la imagen permiten "contar para atrás" desde 11 hasta llegar al resultado.

Como puede observarse, el conteo permite que los alumnos se sumerjan en la resolución del problema. Esta herramienta inicial no es espontánea, se puede adquirir y mejorar a través de la enseñanza y, además, debe avanzar hacia la adquisición de nuevas y más poderosas herramientas, como los recursos de cálculo.

PROPUESTAS Y COMENTARIOS SOBRE LA COMPARACIÓN DE NÚMEROS ESCRITOS DE DIFERENTE O DE LA MISMA CANTIDAD DE CIFRAS

En la propuesta que se presenta a continuación se trata de comparar entre sí escrituras numéricas de una y dos cifras.

Algunas investigaciones –por ejemplo, Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994– señalan que los niños construyen tempranamente criterios personales para comparar números. Estos criterios les permiten determinar en algunos casos cuál de dos números es mayor, aun cuando no sepan el nombre de esos números.

Un contexto de comparación de números puede constituirse en una buena oportunidad para que los alumnos avancen en sus conocimientos sobre el funcionamiento del sistema de numeración. En efecto, en los casos en los que no resulte evidente cuál es el número mayor, los niños deberán apelar a su conocimiento de la serie, las regularidades que hayan detectado o a algún portador si el docente habilitara a utilizarlo. Ampliaremos estas consideraciones al analizar las relaciones que es posible movilizar en el siguiente juego de cartas.

Juego de cartas

Materiales:

Un mazo de cartas como el que se propone a continuación, cada dos alumnos.

Organización de la clase:

Se juega en parejas.

Descripción general del juego:

Cada pareja de jugadores tiene su mazo de cartas con las informaciones tapadas. Al mismo tiempo, ambas parejas dan vuelta la carta de arriba, pero no la muestran. Por turnos, cada pareja elige una de las tres informaciones numéricas que se ofrecen en la carta. La pareja que tenga el número mayor correspondiente a ese ítem se lleva ambas cartas. Si las dos parejas tienen el mismo número, se eligen otras dos cartas. La pareja que gana elige el ítem que se “cantará” en la siguiente vuelta.

Luego de varias rondas, la pareja que tiene más cartas, gana.

NOMBRE DEL JUGADOR	CAMPEONATOS GANADOS	PARTIDOS JUGADOS	GOLES
OMAR PERETTI	13	84	7
LEONARDO LOPEZ	16	75	6
PABLO CATTARUZZA	18	73	12
MANUEL ARTIME	19	48	5
PEDRO AQUINO	21	87	9
MARIO MIOTTO	11	91	3
JOSÉ RIVAS	20	62	8
JUAN ZABALA	28	81	2
NICOLÁS SOSA	12	78	4
DARÍO ROCA	16	84	8
DIEGO GÓMEZ	4	91	3
GABRIEL GARCÍA	25	62	13
OMAR ACOSTA	24	96	18
SERGIO PALACIOS	14	32	13
FERNANDO PONCE	10	56	19
ENZO PÉREZ	2	30	11
FABIÁN VARGAS	19	80	4
MARTÍN ROJO	20	59	17
ÁNGEL LÓPEZ	14	80	8
JOSÉ MICHELI	18	30	5

En este juego hay dos problemas que se plantean a los niños. El primero de ellos es la lectura del número que eligen y el segundo es comparar los números de ambas cartas.

Puede ocurrir que la pareja que "canta" no sepa el nombre del número que eligió. En ese caso, las cartas de las dos parejas se muestran y todos los jugadores deben determinar cómo se llama ese número. Para ello, pueden apelar a todas las informaciones que estén disponibles en el aula (banda numérica, cuadro con números, páginas de libros) o a otros informantes (otros compañeros o la maestra).

El segundo problema es determinar cuál es el número mayor. Para comparar los números, es posible:

- Que conozcan, en algunos casos, cuál de esos dos números es mayor. Por ejemplo, 8 (cantidad de goles de José Rivas) es mayor que 2 (cantidad de goles de Juan Zabala).
- Que apelen a la relación de orden en la serie ("el treinta y cuatro es mayor que el veintinueve porque viene después").
- Que recurran a su conocimiento de algunas regularidades ("este –84– es de los ochenta, porque empieza con ocho y es mayor que este –39–, que es de los treinta").
- Que tengan en cuenta la cantidad de cifras, cuando se trata de dos números de diferente cantidad de dígitos.

También es posible que las parejas no sepan determinar cuál de los dos números en juego es el mayor. En ese caso, se separan las dos cartas y el juego continúa.

Luego de varias rondas –no es necesario esperar a que alguna de las parejas obtenga todo el mazo de sus contrincantes–, la maestra detiene el juego y propone un momento de discusión colectiva.

En esa fase del trabajo, la tarea se centra principalmente en analizar cuáles fueron los criterios para determinar la carta ganadora y en discutir qué consejos se le puede dar a los equipos que debieron dejar cartas de lado para que las puedan comparar en futuras partidas.

En la discusión grupal, esos criterios y consejos seguramente hagan referencia a pares de números específicos. Sin embargo, se trata de traccionar hacia un tratamiento donde los casos particulares permitan construir criterios más o menos generales. Se piensa, como decíamos al comienzo de este apartado, que la situación de comparación de números resulta potente para que los niños avancen en sus intentos de comprender el funcionamiento del sistema de numeración.

PROBLEMAS QUE REMITEN AL JUEGO

1. Martín y Pablo “cantaron” la cantidad de partidos jugados, de su carta. ¿Es cierto que le ganaron a la carta de Mariano y Luis?

Carta de Martín y Pablo

NOMBRE DEL JUGADOR
OMAR PERETTI
CAMPEONATOS GANADOS
13
PARTIDOS JUGADOS
84
GOLES
7

Carta de Mariano y Luis

NOMBRE DEL JUGADOR
MANUEL ARTIME
CAMPEONATOS GANADOS
19
PARTIDOS JUGADOS
48
GOLES
5

2. A Lucas y a Gabriel les tocó esta carta, y “cantaron” la cantidad de goles. Dibujá una carta del mazo que le gane a esta.

NOMBRE DEL JUGADOR
OMAR ACOSTA
CAMPEONATOS GANADOS
24
PARTIDOS JUGADOS
96
GOLES
18

3. Si con estas cartas se canta la cantidad de goles, ¿quién gana?

Carta de Julia y Nuria

NOMBRE DEL JUGADOR
JOSÉ MICHELI
CAMPEONATOS GANADOS
18
PARTIDOS JUGADOS
30
GOLES
5

Carta de Ana y Sofía

NOMBRE DEL JUGADOR
DARÍO ROCA
CAMPEONATOS GANADOS
16
PARTIDOS JUGADOS
84
GOLES
8

4. ¿Es cierto que Oscar y Alejandro le ganan a Mateo y a Nicolás en cualquiera de los números que "canten"?

Carta de Oscar y Alejandro

NOMBRE DEL JUGADOR
ÁNGEL LÓPEZ
CAMPEONATOS GANADOS
14
PARTIDOS JUGADOS
80
GOLES
8

Carta de Mateo y Nicolás

NOMBRE DEL JUGADOR
JOSÉ MICHELI
CAMPEONATOS GANADOS
18
PARTIDOS JUGADOS
30
GOLES
5

PROPUESTAS Y COMENTARIOS SOBRE DISTINTAS ESTRATEGIAS (CONTEO APOYADO EN GRÁFICOS O EN NÚMEROS, CÁLCULOS) PARA ABORDAR PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA

Juego de la caja[4]

Materiales:

1 caja de zapatos.
Tapitas de gaseosa (aproximadamente 100).
Lápiz y papel.

Descripción general del juego:

Se trata de decir cuántas piezas de un tipo dado o en total contiene esta caja. A veces, cuando se muestra rápidamente un grupo grande de tapitas dentro de la caja y esta es tapada, este número solamente puede ser estimado, no puede ser conocido sin un conteo efectivo. En cambio, otras veces, cuando se informa una cantidad de tapitas que hay en la caja y la cantidad o cantidades que se añaden o se retiran, es posible preverlo mediante un cálculo u otro procedimiento. En ese caso, trabajar sobre los números y transformaciones posibles sobre ellos permite anticipar la cantidad de tapitas que habrá en la caja sin necesidad de contarlas. Los alumnos deben decidir en cuál de los casos se encuentran, si se trata solo de adivinar o estimar la cantidad de tapitas o se puede anticipar de manera exacta a partir de los datos. Advertir cuándo y cómo se puede saber seguro la cantidad justa de tapitas son aprendizajes fundamentales de esta situación.

4 A partir de una situación creada por Guy Brousseau (1989), y utilizada y recreada en numerosos textos didácticos como, por ejemplo, Parra y Saiz (1992) *Los niños los maestros y los números,* o ERMEL (1992), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes.*

Como esquema general a partir del cual cada docente podrá planificar su trabajo, podemos sugerir que se presente la situación y se deje un tiempo para que los alumnos –solos o de a dos– anticipen y anoten una respuesta posible. Una instancia fundamental para promover aprendizajes a lo largo de esta actividad consistirá en la organización de discusiones colectivas en la clase en relación con las respuestas y se podrá discutir luego sobre las respuestas halladas y formas posibles de validarlas –es decir, cómo podemos estar seguros de ellas sin abrir la caja y contar las tapitas–. Finalmente, se podrá apelar al conteo efectivo de las tapitas contenidas en la caja.

Cada docente decidirá la cantidad de tapitas a incluir en cada caso, y cuántas veces cree necesario repetir cada uno de los momentos del juego.

Describamos sintéticamente el recorrido que se propone con este juego. Se representa una situación en la cual se pregunta por la cantidad de tapitas en una caja. Esa cantidad se transforma (agregando o retirando tapitas). Se trata de que los alumnos lleguen progresivamente a advertir que es posible conocer con seguridad –diferenciándolo de situaciones en las que solo es posible una respuesta al azar– la cantidad de tapitas de la caja a partir de la información disponible (cantidad de tapitas en el momento inicial y al ocurrir la transformación).

Primer momento

Se presenta la caja con tapitas dentro y se puede preguntar: "¿Cuántas tapitas piensan que hay en esta caja?"; "¿Cuántas rojas?", "¿Cuántas blancas?".

El juego puede repetirse:

"Vuelvo a poner todas en la caja, ¿cuántas hay ahora?", "Saco algunas, ¿cuántas quedan?, ¿cuántas tapitas se han sacado?", "¿Cuántas tapitas de un color determinado?, ¿cuántas piezas que no son de ese color?", etcétera.

Frente a cada pregunta, los alumnos anticipan y anotan una respuesta, luego uno de ellos pasa a contar las tapitas en la caja para conocer la solución de la adivinanza planteada. Los que adivinan justo ganan un punto.

Es importante reproducir la actividad el tiempo suficiente como para que los alumnos identifiquen cómo se establece quién ha ganado. Es el sostenimiento de la actividad lo que permitirá a los niños comprender la consigna.

La respuesta a este grupo de preguntas se basa en el azar, se tratará luego de distinguirlas de aquellas que pueden ser anticipadas de manera racional, como los problemas que siguen.

Segundo momento, la anticipación de la solución

Los problemas que se plantean aquí se diferencian de los anteriores porque los alumnos tienen elementos para conocer la respuesta; esta, por lo tanto, no obedece al azar. Sin embargo, el hecho de que ellos pueden conocer esa respuesta, y no se trata solamente de adivinar, es el objeto de aprendizaje de este momento del juego. Es decir, se trata de que los niños lleguen a identificar, como resultado de este proceso, que es posible anticipar la respuesta, así como a construir y que construyan modos posibles para hacerlo y generar progresos en tales procedimientos.

Se plantean ahora un conjunto de preguntas como las siguientes:

- Se cuentan todos los objetos de la caja, por ejemplo, 20. Luego se retiran 18, que se cuentan. Se pregunta a la clase, "¿cuántas tapitas hay ahora en la caja?".

- "Hay 20 tapitas en la caja (se cuentan). Agregamos 1. ¿Cuántas tapitas hay ahora?"
- "Hay 3 tapitas en la caja y agregamos 2, ¿cuántas tapitas hay ahora?"
- "Hay 5 tapitas y agregamos 4, ¿cuántas tapitas hay ahora?"

Proponiendo problemas con números pequeños o con números más grandes pero con una pequeña diferencia, encontramos casos intermedios, en los cuales los niños comiencen a advertir que no todas las respuestas son igualmente posibles. Se trata de llevarlos a asumir, frente a esta situación, una posición más reflexiva, que vayan de a poco tomando conciencia de que no se trata de dar una respuesta al azar, que no se trata de adivinar, sino que se puede averiguar con recursos por ellos disponibles (mediante razonamientos que apelen al conteo o al cálculo).

El docente elegirá los números en juego en función de los conocimientos que busque movilizar e identificar con sus alumnos. Puede decidir incluir:

- números pequeños para familiarizarlos con la situación y construir un repertorio de cálculos de sumas y restas;
- una cantidad inicial mayor pero agregando o sacando muy pocas tapitas para favorecer, difundir y analizar el uso del sobreconteo;
- números "redondos", para vincular estos cálculos con un análisis del sistema de numeración extender el uso del repertorio a números mayores;
- números mayores para desplegar, analizar y hacer evolucionar diferentes estrategias de cálculo.

Como señalamos, se espera que los alumnos –individualmente, de a dos, o en pequeños grupos– puedan anticipar una respuesta sin recurrir al conteo de los elementos que se encuentran dentro de la caja. Se les puede comunicar que ellos podrán hacer lo que necesiten sobre la hoja que tienen.

Se espera poder organizar una instancia en la cual se expongan algunos modos de hallar la respuesta, seleccionados por el docente de acuerdo con lo que quiere analizar con todo el grupo. Así, es posible retomar estrategias que se apoyan en el conteo (con dibujos o apelando a la serie numérica) o en el uso de cálculos de sumas (o restas, según los problemas planteados), difundir estrategias que el docente quiera privilegiar, señalar para toda la clase aprendizajes a lo largo de esta situación que serán reutilizados en otras oportunidades.

En estas instancias no se trata únicamente de alentar a comunicar la cantidad obtenida y el modo de hallarla, sino que se tratará de insistir a los niños para que busquen una manera de estar seguros de si un resultado es correcto o si una manera de averiguarlo me permite encontrar "seguro" ese resultado, y por qué. La idea es llevar al grupo de alumnos a producir modos de validar sus respuestas. Por ello, es necesario ejercer cierta presión para que busquen modos de probar lo que afirman. Por ejemplo, es posible preguntarles, una vez que comentan su respuesta, "¿Creés que vas a ganar?, ¿cómo podemos saberlo sin abrir la caja?".

En esta dinámica en la que se comparten resultados y formas de resolución y se propicia la producción de argumentos sobre la validez de los mismos, se trata de poner en relación los diferentes procedimientos. Por ejemplo, si para el problema "Hay 5 tapitas en la caja y se agregan 6", un procedimiento se basa en el dibujo de las tapitas, otro en la escritura de la serie numérica de 1 a 11, otro simplemente en la suma de 5 + 6... Es posible analizar cómo los números de la serie están representando cada una de las tapitas que están dibujadas. Para el que se apoya en la suma –por ejemplo, de 5 + 5 para agregarle uno más–, ya sea porque la escribió o lo comunica oralmente –y el docente puede ofrecer las escrituras aritméticas, por ejemplo, 5 + 5 = 10; 5 + 6 = 11; 5 + 5 + 1 = 11–, dónde se encuentran las primeras cinco tapitas, y las seis tapitas en cada uno de esos procedimientos, dónde están los números del que anotó la serie numérica en el procedimiento aditivo, etcétera.

A partir de jugar varias veces, es posible identificar la suma como una operación que nos permite averiguar el total cuando a una cantidad de tapitas se agrega otra, cómo se anota, qué relación guarda con contar todos los objetos. Estas conclusiones se van entretejiendo con las producciones de los alumnos a propósito del juego y las discusiones grupales.

Un procedimiento similar puede desarrollarse en relación con la resta, cuando se quita una cantidad inicial de tapitas a la cantidad que había en la caja originalmente.

Después de la discusión sobre las respuestas, los procedimientos y su validez, si es necesario, se podrá apelar a destapar la caja y contar las tapitas que hay en su interior, para verificar.

A lo largo de este recorrido, de sucesivas jugadas y análisis, se apunta a ir concluyendo o estableciendo, con toda la clase, que se trata de:

- aprender a responder estando seguro de su respuesta, o de saber que no se puede estar seguro;
- encontrar la respuesta y poder explicar cómo se la halló;
- aprender reiterando ensayos, aprovechando ideas de los otros si las creemos buenas.

Se puede extender el juego incorporando más sumandos. El docente puede anotar en el pizarrón las cantidades de tapitas que se agregan cada vez.

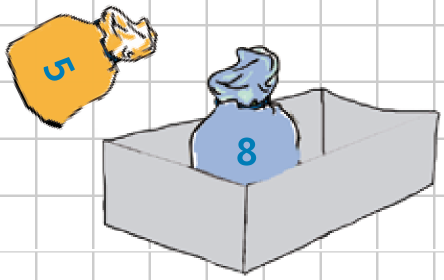
Si el juego se sostiene a lo largo del tiempo y apelando a diferentes cantidades y preguntas, es posible analizar con los niños algunas relaciones referidas, por ejemplo, a:

- La conmutatividad de la suma: aunque no se mencione de esta manera, esta situación permite reconocer y construir una fundamentación desde la perspectiva de los niños pequeños, respecto de la equivalencia entre sumas, por ejemplo, de 5 y 6 o de 6 y 5. Se puede apelar a explicar que, si se colocan las mismas cantidades de fichas, entonces el total será el mismo, no importa el orden en el que se coloquen.
- La relación entre las sumas y la resta. Si sabemos que 4 tapitas y 5 tapitas forman 9, entonces sabemos que si a 9 le sacamos 4 quedan 5; si le sacamos 5 quedan 4. Esta relación podrá ser luego retomada –a lo largo del primer ciclo– en otros contextos y descontextualizada, para advertir, de manera general, que, por cada suma que conocemos, podemos conocer dos restas.
- La relación entre diferentes sumas entre sí; o entre diferentes restas entre sí. Por ejemplo, si sabemos que 5 + 5 = 10 sabemos que en 5 + 6 tenemos lo mismo y una tapita más... Respecto de la resta: si sabemos que 12 – 2 = 10, podemos saber que en 12 – 3 saqué lo mismo y una tapita más; entonces, tenemos una tapita menos. Estas relaciones, podrán y deberán ser recuperadas a lo largo de todo el Primer ciclo, para plantearse globalmente. Se trata de identificar, de manera general, cómo a partir de cálculos conocidos, estableciendo diferentes relaciones, podemos averiguar el resultado de otros.

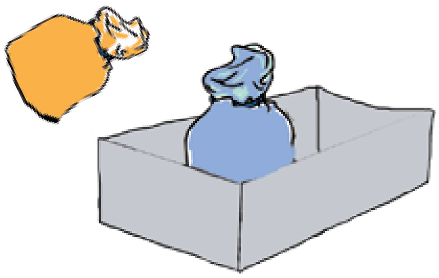
Problemas que remiten al juego

El docente podrá proponer a sus alumnos problemas escritos que evoquen el juego al que han jugado reiteradas veces, y que servirá de referencia para que puedan representarse la situación.

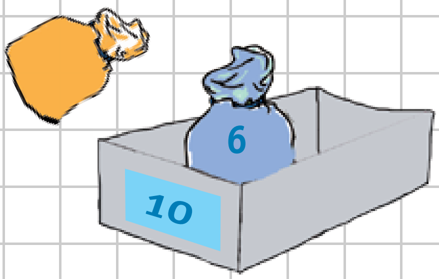
La caja contiene las tapitas que indica la bolsa celeste. Se agrega una bolsa naranja con tapitas. ¿Cuántas tapitas habrá entonces en la caja?



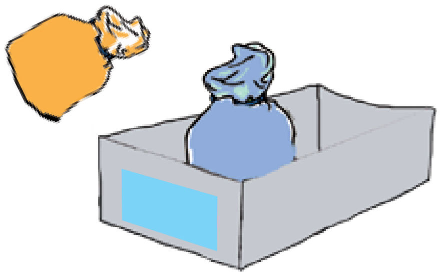
A continuación, presentamos la imagen con el espacio para fotocopiar y completar con números decididos por el docente.



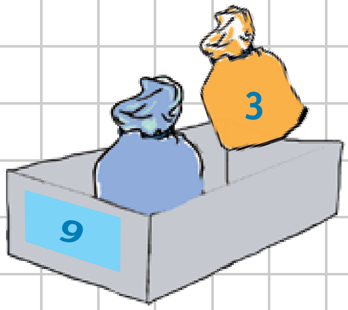
La caja ya tiene las tapitas indicadas en la bolsa azul. ¿Cuántas tapitas deberá contener la bolsa naranja para completar el total de tapitas indicado en la etiqueta de la caja?



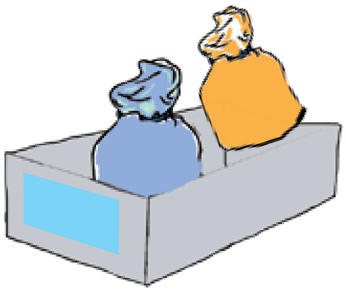
A continuación, presentamos la imagen con el espacio para fotocopiar y completar con números decididos por el docente.



La caja ya tiene las tapitas indicadas en la etiqueta. ¿Cuántas tapitas quedarán en la caja al sacar la bolsa naranja?



A continuación, presentamos la imagen con el espacio para fotocopiar y completar con números decididos por el docente.



PROPUESTAS Y COMENTARIOS SOBRE LA CONSTRUCCIÓN, UTILIZACIÓN Y AMPLIACIÓN DE UN INCIPIENTE REPERTORIO ADITIVO

En las páginas anteriores se ha hecho referencia al conteo como una herramienta que permite resolver los primeros problemas aditivos. Se han analizado también el juego de la caja como una propuesta que permite el despliegue de distintas estrategias (conteo apoyado en gráficos, en números y cálculos) para averiguar el resultado de cierta situación donde se han agregado o quitado elementos de una colección.

En esta sección queremos centrarnos ya con más precisión en el trabajo en torno al cálculo y en la importancia de acompañar a los niños en la construcción y utilización –como se plantea en los objetivos de aprendizaje- de un repertorio incipiente de resultados de sumas y restas. Repertorio que será motivo de trabajo a lo largo de todo el primer ciclo y que deberá ampliarse y sistematizarse progresivamente.

El pasaje del conteo al cálculo es un proceso complejo para los niños. Para que las estrategias de conteo iniciales sean abandonadas gradualmente, es necesario que el cálculo represente cierta ventaja en tanto forma de resolución y, para que esto ocurra, es condición que algunos resultados puedan recuperarse rápidamente de la memoria.

Es claro que este proceso de memorización no es inmediato ni generalizado por parte de los niños. Desde el punto de vista de la enseñanza, entonces, surgen interrogantes sobre cómo vincular los recursos de conteo de los que los chicos disponen con las estrategias de cálculo que se pretende que adquieran, cuáles pueden ser las sumas y restas cuyos resultados podrían abordar en primer lugar y cuáles sería necesario postergar momentáneamente, etcétera.

Paralelamente, el trabajo con este contenido, desde la perspectiva didáctica que venimos sosteniendo tanto en el Diseño Curricular como en este documento, presenta dos características que no pueden ser soslayadas cuando se piensa en la complejidad de su tratamiento con los niños.

Por un lado, para ayudar en la memorización y en la búsqueda de alguna regularidad que permita identificar una estrategia de cálculo con cierto nivel de generalización, se abordan grupos de cuentas que tienen algún aspecto en común.

Por otro lado, el trabajo que se plantea supone el establecimiento de relaciones entre grupos de cuentas. Así, por ejemplo, saber que $3 + 4 = 7$ permite averiguar el resultado de $30 + 40$, o bien, saber que si $8 + 7 = 15$, entonces $15 – 8 = 7$, o $15 – 7 = 8$.

El pasaje del conteo al cálculo supone entonces un trabajo exigente para niños y maestros. En este apartado nos centraremos en un recorte de actividades que apuntan al estudio y sistematización de un grupo de resultados memorizados como una manera de dar cuenta de esta complejidad.

El juego de las cartas

Materiales:

Un mazo de cartas españolas (solo las cartas del 1 al 9).
Cantidad de participantes: 4.

Descripción general del juego:

Se coloca el mazo en el centro de la mesa. Por turnos, cada alumno da vuelta una de las cartas. El primero que dice el doble del número que tiene la carta se la lleva. Al finalizar el mazo, el que tiene más cartas gana el juego.

Es posible que no todas las cartas representen la misma dificultad para los niños. Así, por ejemplo, si la carta que se da vuelta es un 1 o un 5, tal vez haya alumnos que no tengan problemas en decir rápidamente los dobles de esos números. Sin embargo, para otros, incluso esas cartas pueden representar cierta complejidad.

El hecho de que quien diga primero el doble se lleva la carta aporta a la situación cierta tensión respecto del uso del conteo para encontrar la respuesta: contar es posible y permite hallar la respuesta buscada, pero resulta evidente para los jugadores que tener disponible en la memoria los resultados es un recurso muy provechoso.

Sin embargo, no se espera que todos, ni siquiera la mayoría de los niños, disponga de esas sumas antes de comenzar el juego. El propósito de esta actividad es, justamente, generar condiciones para que todos puedan aprenderlas.

Asumiendo entonces que en el comienzo de la partida los niños no tienen memorizados todos los dobles de las cartas que conforman el mazo (o tal vez, de ninguna de ellas), una manera de encontrarlos puede ser contar sobre la configuración de la carta en cuestión, ya sea tanto "pasando" dos veces sobre cada uno de los elementos que componen la configuración de la carta, o bien contando una vez cada uno de los palos a partir del número que la carta indica.

Luego de algunas rondas del juego es importante la organización de un momento de debate colectivo sobre lo realizado y cierto análisis de qué cartas –y por lo tanto, qué cálculos– algunos alumnos resuelven rápidamente. Es decir, un momento en el que quienes dicen rápidamente algunos resultados puedan explicar cómo hacen para ganar, de manera que ese conocimiento sea público y circule entre los alumnos para que puedan utilizarlo en las próximas partidas.

Un análisis sistemático de las cuentas que aparecen puede contribuir a que los niños identifiquen cuáles ya resultan "fáciles", porque no es necesario contar. Las cuentas son las siguientes:

1 + 1	6 + 6
2 + 2	7 + 7
3 + 3	8 + 8
4 + 4	9 + 9
5 + 5	

Seguramente sea heterogéneo el recorrido de los niños a través del cual recuerden progresivamente los resultados de estas sumas. Será necesario, sin duda, ofrecer más de una sesión de este (y otros juegos) para que puedan avanzar.

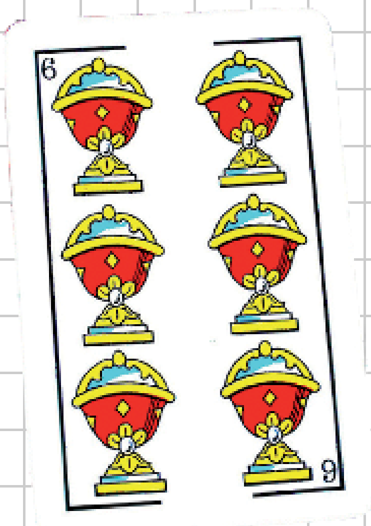
La escritura de un cartel que se conserve a la vista en el salón y de conclusiones o recordatorios en el cuaderno de clase puede ser un buen recurso al cual se puede apelar antes de comenzar nuevas partidas. Cada niño podría ir marcando en su cuaderno cuáles son las cuentas que ya sabe de memoria. Esta es una manera también de comunicar desde la enseñanza que este aprendizaje va a ser una cuestión a tratar durante algunas clases, y en qué sentido se espera que ese grupo avance.

En esta actividad, la configuración del mazo es una característica a considerar. En efecto, las cartas comunes con la configuración convencional permiten estrategias de conteo como las que mencionamos. En cambio, si las cartas tuvieran solo los números, esta estrategia estaría bloqueada. Modificar o no el mazo luego de algunas clases puede ser entonces una decisión del maestro en función de los objetivos que se proponga.

La actividad puede contemplar también algunas instancias en las que ya no se juega, sino que se trabaja en torno a problemas que se desarrollan en el contexto del juego. Las siguientes pueden ser algunas de esas situaciones:

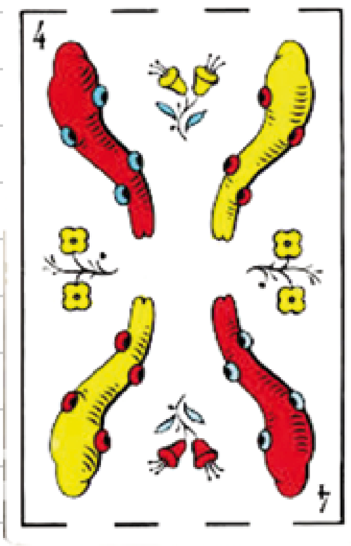
PROBLEMAS QUE REMITEN AL JUEGO

a) Felipe sacó esta carta y cantó 16. ¿Es correcto el resultado que dijo?



b) Martín dio vuelta esta carta. Indicá cuál de los siguientes números tiene que marcar:

4 14 6



c) Micaela cantó 8. Dibujá la carta que sacó.

La referencia al juego presenta la ventaja de que los niños ya conocen la situación y, por lo tanto, tienen más posibilidades de comprender qué se les está pidiendo. Sin embargo, es interesante no perder de vista que se aspira a que este conjunto de cuentas y resultados puedan utilizarse igualmente en otras situaciones. Es importante que este aspecto también se comunique a los niños y se inserte entonces este repertorio particular en un contexto más amplio, donde el interés es el avance hacia nuevas formas de acceso a resultados. Formas que van dejando atrás al conteo para ingresar al terreno del cálculo.

Otras actividades que apuntan también a la adquisición y ampliación de cierto repertorio aditivo pueden tener un formato diferente. Pueden tratarse, por ejemplo, de situaciones de exploración más o menos sistemáticas (por ejemplo, investigar qué resultados se obtienen si se suma o se resta 10 a un número de dos cifras como 35; 28; 41; etcétera), pueden organizarse en torno a la utilización de un resultado para obtener otro, o bien centrarse en el estudio y utilización de cierta estrategia que se propone o, como en el caso que sigue, organizarse en torno al estudio de un conjunto de cálculos.

Estudiar un conjunto de cálculos

Resolvé los siguientes cálculos, después comprobá tus resultados con la calculadora.

3 + 1 =	3 – 1 =
5 + 1 =	7 – 1 =
6 + 1 =	9 – 1 =
11 + 1 =	12 – 1 =
15 + 1 =	32 – 1 =
24 + 1 =	44 – 1 =

En este caso, se trata de proponer una cantidad de sumas y restas similares, con la intención de que permitan la aparición de cierta regularidad: sumar o restar 1 es encontrar el siguiente o el anterior de determinado número.

Este conocimiento puede resultar modesto para quienes ya manejan algunos cálculos, pero para los alumnos de primer grado es un descubrimiento importante y una herramienta poderosa que se suma al conjunto de cálculos que van dominando.

Deliberadamente hemos incorporado este ejemplo y mencionamos también la suma y la resta de 10 a un número de dos cifras, anteriormente, para señalar el estrecho vínculo entre sistema de numeración y operaciones. En efecto, estudiar y apropiarse de algunos cálculos permite saber más sobre el sistema de numeración y, a su vez, avanzar en el aprendizaje de las reglas que rigen el sistema permite operar con mayor control sobre los números con los que se está trabajando.

En relación con la estructura de esta actividad, el esquema podría sintetizarse de la siguiente manera: los niños resuelven un conjunto de cálculos, se trabaja en la identificación de cierta regularidad, se discute colectivamente y se ponen a prueba los hallazgos y las razones que podrían sostener esas afirmaciones. Luego, esos conocimientos se registran en carteles en el aula y en los cuadernos de clase.

Objetivos de aprendizaje Números naturales y operaciones

Segundo grado

- Establecer algunas regularidades de la serie numérica oral y escrita para: a) comparar números de igual o diferente cantidad de cifras; y b) interpretar y producir números de hasta tres dígitos.

- Analizar la información contenida en la escritura decimal de los números o realizar composiciones y descomposiciones aditivas a partir de dicho análisis.

- Participar de discusiones en torno a la equivalencia de ciertas descomposiciones.

- Resolver problemas que remitan a diferentes significados de la suma y de la resta, bajo diferentes formas de presentación, que puedan ser abordados mediante diferentes recursos de cálculo (por ejemplo: cálculos mentales exactos y aproximados, algorítmicos).

- Disponer de un repertorio de algunos resultados de sumas y sus respectivas relaciones con cálculos de restas.

- Utilizar el repertorio disponible para resolver otros cálculos y elaborar justificaciones que se basen en las relaciones entre ellos.

- Realizar cálculos mentales de suma y resta basándose en descomposiciones de los números y resultados conocidos.

PROPUESTAS Y COMENTARIOS SOBRE LA UTILIZACIÓN DE REGULARIDADES DE LA SERIE NUMÉRICA ORAL Y ESCRITA

Al interactuar con la serie numérica, los niños construyen regularidades: “todos los números (de dos cifras) que empiezan con ocho son de los ochenta”, “después de un número que termina en cuatro (como treinta y cuatro) viene otro que termina en cinco,” etc., son algunas de estas características que los niños detectan y utilizan.

En segundo grado, al ampliar el rango a números de tres cifras, las características del trabajo con el sistema de numeración se mantienen, respecto de las propuestas planteadas para primer grado. Las situaciones donde los niños deben usar el sistema apuntan a que sea posible cierta reflexión sobre los resultados obtenidos. El establecimiento de algunas regularidades puede ayudar a que los alumnos avancen desde aspectos más figurativos hacia la comprensión de las reglas que rigen el sistema.

Algunas actividades favorecen la identificación de ciertas características de la serie numérica. No solo en relación a la composición escrita de los números, sino también en cuanto al vínculo entre su escritura en cifras y su designación oral. El siguiente es un ejemplo de ese tipo de propuestas.[5]

El cuadro de números

Organización de la clase:

Los alumnos trabajan en parejas.

1. En este cuadro hay cinco números que están mal ubicados. Marcalos.

100	101	102	103	104	150	106			109
110	111		113	114		117			119
120	112	122			125	126		128	
130	131		133		135	136			193
140	141		143	144			147	148	
			153		155	156	157	158	
160	161	162		164	165				169
170			173			176	177		
	181		183	184				188	189
190	191	129		194	195		197		199
200									

5 Para un análisis más detallado de este tipo de actividades, es posible consultar: *Los niños, los maestros y los números. Desarrollo Curricular. Matemática 1° y 2° grado.* M.C.B.A. Dirección de Curriculum, 1992.

En este caso, se trata de que el trabajo permita establecer que los números de cada fila tienen ciertas similitudes. Por ejemplo, todos los números de la misma fila "comienzan" del mismo modo. Así, los que se encuentran en la fila encabezada por 190 se escriben con un uno y con un nueve, que corresponden a cien y a noventa. Por lo tanto, 129 está mal ubicado en esa fila.

A su vez, los números de cada columna "terminan" con la misma cifra. Aquellos números que están ubicados en la columna de la izquierda del cuadro terminan en cero y van cambiando de uno en uno a medida que se avanza hacia las columnas de la derecha. Esto permite identificar que, por ejemplo, 112 está mal posicionado.

Más allá de que los niños puedan establecer cuáles son los números que están mal ubicados, es importante sostener en la clase un espacio de reflexión sobre la organización general del cuadro y, fundamentalmente, sobre los criterios que permiten estar seguros de cómo se escribe un número. Por ejemplo, un criterio puede ser apoyarse en un número cuya escritura ya se conoce para escribir otro sobre el que se tiene cierta duda. Así, 130 puede ser un buen punto de apoyo para determinar cómo se escribe 139.

Omitir parte del análisis con los niños plantea dos potenciales problemas en relación con los aprendizajes que se quieren promover. El primero de ellos es que los niños sean capaces de establecer cuáles son los números mal ubicados a partir de la utilización exclusiva del conteo, sin necesidad de reflexionar sobre el sistema de numeración. El segundo problema es que se produzca un deslizamiento hacia el estudio del cuadro de números como objeto de estudio, en lugar de estudiar el funcionamiento del sistema de numeración.

2. En este cuadro se ordenan los números del 200 al 300. Algunos ya están anotados.

200	201	202	203	204		206	207	208	209
210		212		214					
220	221		223		225	226			229
230		232		234					239
240									
250	251	252					257		
260	261								
270	271			274			277		
280		282				286			
290	291			294			297		
300									

a) Anotá todos los números que están en la fila del doscientos cuarenta.

b) ¿Es cierto que en el cuadro está anotado el doscientos ochenta y cuatro?

c) Agregá en el cuadro los números: 205, 222, 299, 218.

Los números que están ya ubicados en el cuadro pueden hacer que la tarea sea más sencilla, o menos sencilla. Lógicamente, a mayor cantidad de números es posible para los niños encontrar mayor cantidad de puntos de apoyo para establecer dónde deben ubicarse los números que faltan.

Por otro lado, los números que deben ubicarse pueden ser –en algunos casos– más difíciles o más fáciles de determinar, en cuanto a su posición. Así, si los niños se apoyan mayoritariamente en el conteo, podrán ubicar más fácilmente los números menores.

Se trata de que el trabajo les permita encontrar otros recursos, por ejemplo, contar desde un número distinto al menor que aparece en el cuadro o utilizar la información que pueden bridar las disposiciones en filas y columnas.

3. Completá los casilleros pintados de verde.

300	301	302	303	304	305	306	307	308	309
310									
320									
330									
340									
350									
360									
370									
380									
390									
400									

En este caso, hay menos números colocados en el cuadro, lo que obliga a imaginar cuáles son los que van en cada fila y columna. Se trata de que sean estas las relaciones que se analicen, y que se desaliente el uso del conteo como forma de realizar la tarea propuesta.

Adiviná de qué número se trata

Materiales:

Un cuadro de números como el anterior pero completo en el pizarrón o en un papel afiche.
El mismo cuadro de números fotocopiado en tamaño que pueda pegarse en el cuaderno de clases.

Organización de la clase:

Se juega en grupos de cuatro integrantes.

Descripción general del juego:

El docente elige uno de los números del cuadro, sin decir de cuál se trata. Por turnos, para averiguar el número elegido por el maestro, cada equipo hace una pregunta que él solo puede contestar por sí o por no.

Las preguntas y las respuestas quedan registradas en el pizarrón.

El equipo que cree saber cuál es el número, puede arriesgar. Si acierta, gana esa partida; si no acierta, debe esperar a que termine el juego.

En este caso, el cuadro de números puede servir para ir acotando los números que pueden haber sido elegidos por el docente. Por ejemplo (suponiendo que se juega con un cuadro de números de 400 a 500), si una de las preguntas es "¿Es más grande que 420?" y la respuesta es "sí", todos los números entre 400 y 420 quedan descartados y podrían ser tachados en el cuadro.

Es claro que la estrategia de optimizar las preguntas (por ejemplo, dividir el intervalo de números a la mitad y preguntar si el elegido se encuentra en una de esas dos partes) no es una cuestión evidente en el inicio del juego. Del mismo modo que tampoco es evidente que las preguntas que formulan (y las respuestas que obtienen) los otros equipos son también relevantes a la hora de considerar qué pregunta conviene hacer.

Estos aspectos asociados a los números que se consideran (o se descartan) en cada caso forman parte de las cuestiones a analizar con los niños después de las partidas y registrados en los cuadernos.

PROBLEMAS QUE REMITEN AL JUEGO

Intencionalmente, en las actividades que siguen aparecen escritos con palabras los números que serían designados oralmente en el juego. Esta decisión hace ingresar el problema de la relación entre el nombre y la escritura de un número, cuestión que sería evitada si esas mismas escrituras fueran realizadas con cifras.

1. Estas son las preguntas y respuestas de un juego. ¿Es posible saber qué número eligió la maestra, si jugaron con un cuadro como el siguiente?

800	801	802	803	804	805	806	807	808	809
810	811	812	813	814	815	816	817	818	819
820	881	822	823	824	825	826	827	828	829
830	831	832	833	834	835	836	837	838	839
840	841	842	843	844	845	846	847	848	849
850	851	852	853	854	855	856	857	858	859
860	861	862	863	864	865	866	867	868	869
870	871	872	873	874	875	876	877	878	879
880	881	882	883	884	885	886	887	888	889
890	891	892	893	~~894~~	895	896	897	898	899
900									

Preguntas	Respuestas
¿Es más grande que ochocientos cuarenta?	No
¿Está en la fila que empieza con ochocientos treinta?	Sí
¿Es más grande que ochocientos treinta y tres?	No
¿Termina en dos?	No

2. Si el número que eligió la maestra fuera 894, ¿qué responderían a cada una de las siguientes preguntas?

Preguntas	Respuestas
¿Es mayor que ochocientos treinta?	
¿Está entre ochocientos ochenta y ochocientos noventa?	
¿Es menor que ochocientos noventa y seis?	
¿Está en la fila de ochocientos noventa?	
¿Termina en noventa y cuatro?	

3. Un equipo tachó todos estos números en su cuadro, mientras trataba de averiguar qué número había elegido la maestra. ¿Es posible saber qué preguntas formularon?

~~800~~	~~801~~	~~802~~	~~803~~	~~804~~	~~805~~	~~806~~	~~807~~	~~808~~	~~809~~
~~810~~	~~811~~	~~812~~	~~813~~	~~814~~	~~815~~	~~816~~	~~817~~	~~818~~	~~819~~
~~820~~	~~821~~	~~822~~	~~823~~	~~824~~	~~825~~	~~826~~	~~827~~	~~828~~	~~829~~
~~830~~	~~831~~	~~832~~	~~833~~	~~834~~	~~835~~	~~836~~	~~837~~	~~838~~	~~839~~
840	841	842	843	~~844~~	845	846	847	848	849
850	851	852	853	~~854~~	855	856	857	858	859
860	861	862	863	~~864~~	865	866	867	868	869
870	871	872	873	~~874~~	875	876	877	878	879
~~880~~	~~881~~	~~882~~	~~883~~	~~884~~	~~885~~	~~886~~	~~887~~	~~888~~	~~889~~
890	891	892	893	~~894~~	895	896	897	898	899
900									

PROPUESTAS Y COMENTARIOS SOBRE LA UTILIZACIÓN DE CIERTOS CÁLCULOS CONOCIDOS PARA RESOLVER OTROS

En los comentarios sobre las actividades referidas al trabajo en torno al repertorio aditivo en primer grado se hizo referencia al establecimiento de relaciones entre cuentas o grupos de cuentas como una de las características del abordaje de este tema.

En este apartado nos interesa presentar y comentar una actividad en la que, justamente, este es el aspecto central de la tarea.

USAR UNA CUENTA PARA ENCONTRAR EL RESULTADO DE OTRA

Usá las cuentas de la columna de la derecha para resolver las cuentas de la columna de la izquierda.

1 + 9 = 10	10 + 90 =
2 + 8 = 10	20 + 80 =
3 + 7 = 10	30 + 70 =
4 + 6 = 10	40 + 60 =
5 + 5 = 10	50 + 50 =
6 + 4 = 10	60 + 40 =
7 + 3 = 10	70 + 30 =
8 + 2 = 10	80 + 20 =
9 + 1 = 10	90 + 10 =

Usar el resultado de un cálculo para encontrar el de otro es un tipo de actividad que exige el empleo de una relación y ya no el cálculo directo utilizando los números que se ofrecen en la operación. Desde ese punto de vista, se trata de un tipo de práctica distinta que los niños deben enfrentar y es posible, por lo tanto que la consigna deba ser acompañada por algunas explicaciones.

A pesar de que sea una propuesta exigente para los niños, alentarlos a establecer relaciones entre lo que se conoce y lo que se desea averiguar resulta enriquecedor, en términos del sentido que van construyendo sobre el trabajo matemático.

En el ejemplo anterior, era necesario en asociar alguna suma de números de un dígito que da por resultado 10, con otra de números redondos cuyo resultado es 100. En la siguiente propuesta se trata de hacer un trabajo similar, pero ahora con números no redondos.

Establecer una relación entre dos cálculos requiere que los niños identifiquen algún aspecto en común entre ellos. Esto resulta más sencillo cuando la propuesta ya señala de alguna manera cuáles son los que deben vincularse, como en el ejemplo anterior. Sin embargo, también es posible dejar este aspecto a cargo de los alumnos.

a) Marcá en esta lista los cálculos que te podrían ayudar a resolver 35 + 48.

30 + 40 = 70	50 + 80 = 130	35 + 40 = 95	48 + 30 = 78
20 + 50 = 70	40 + 5 = 45	5 + 8 = 13	30 + 8 = 38

b) Ahora, resolvé el cálculo.

Este margen de decisión puede ampliarse aún más si la propuesta no incluye ninguna opción. Por ejemplo:

Escribí, para cada caso, qué cálculos te podrían ayudar a resolverlo.

34 + 27	54 - 34	52 + 26	81 – 40

Una de las intenciones de este apartado ha sido la de señalar que saber más sobre cálculos mentales de suma y resta no significa solamente ampliar el repertorio que se tiene disponible, sino también avanzar en la utilización de ese repertorio para cálculos nuevos y números más grandes.

PROPUESTAS Y COMENTARIOS SOBRE SITUACIONES QUE PERMITAN DISTINGUIR SEMEJANZAS Y DIFERENCIAS ENTRE PROBLEMAS DE SUMA Y MULTIPLICACIÓN

Al interactuar con la serie numérica, los niños construyen regularidades: "todos los números (de dos cifras) que empiezan con ocho son de los ochenta", "después de un número que termina en cuatro (como treinta y cuatro) viene otro que termina en cinco," etc., son algunas de estas características que los niños detectan y utilizan.

En segundo grado, al ampliar el rango a números de tres cifras, las características del trabajo con el sistema de numeración se mantienen, respecto de las propuestas planteadas para primer grado. Las situaciones donde los niños deben usar el sistema apuntan a que sea posible cierta reflexión sobre los resultados obtenidos. El establecimiento de algunas regularidades puede ayudar a que los alumnos avancen desde aspectos más figurativos hacia la comprensión de las reglas que rigen el sistema.

Algunas actividades favorecen la identificación de ciertas características de la serie numérica. No solo en relación con la composición escrita de los números, sino también en cuanto al vínculo entre su escritura en cifras y su designación oral. El siguiente es un ejemplo de ese tipo de propuestas.

Juego de las tarjetas

Organización de la clase:

El siguiente juego puede ubicarse en el inicio del tratamiento de la multiplicación. Se trata de que los alumnos elaboren procedimientos para averiguar el puntaje total obtenido a partir de una cantidad de puntos que se repite. Se trata, asimismo, de que dichas estrategias evolucionen. Como parte de ese objetivo, se tratará también de que los alumnos encuentren modos de controlar la cantidad de repeticiones (control de las "veces"). Para ellos, el objetivo del juego está dado por llegar a acumular la mayor cantidad de puntos para ganar.

Material:

25 tarjetas con el número 3.
25 tarjetas con el número 4.
25 tarjetas con el número 5.
Tres tarjetas de un color diferente de las anteriores, con los números 3, 4 y 5, respectivamente. Estas tres tarjetas se colocan en una caja.

Las primeras 75 tarjetas (con los números 3, 4 y 5) se colocan en el escritorio del docente.

El juego consiste en extraer al azar una tarjeta de la caja; por ejemplo, una tarjeta con el número 5. Se devuelve esa tarjeta a la caja y se extrae otra tarjeta, por ejemplo, una con el número 4.

Uno de esos números indica el tipo de tarjeta (de 3, de 4 o de 5 puntos); el otro indica la cantidad de tarjetas de ese valor que se deben tomar. Así, el jugador de nuestro ejemplo podrá tomar 5 tarjetas de 4 puntos, o 4 tarjetas de 5 puntos. Retira las tarjetas con la opción elegida y debe calcular el puntaje obtenido.

Por supuesto, la docente podrá elegir incluir otros números en las tarjetas (5, 6, 7, 8, 9, 10).

También puede decidir la cantidad de rondas que se jugarán, y posibilitar o no apelar a la calculadora.

Presentación del juego:

Se puede realizar una jugada con todo el grupo para comunicar en qué consiste el juego. Un alumno pasa y extrae dos veces una tarjeta de color y retira las tarjetas de puntos correspondientes. Se pide a la clase que calculen los puntos obtenidos por este jugador.

Algunos procedimientos posibles

Por ejemplo, para calcular el puntaje para 5 tarjetas de 4 puntos.

- Hacer marcas representando los puntos y contar el total. Requiere controlar haber realizado 5 grupos de 4 marcas cada uno.
- Anotar los números del 1 al 20, controlando cada vez que se completan 4 números.
- Hacer una suma reiterada de 4, lo cual también supone controlar las 5 veces que se repite el 4:

  4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20

  o

  4 8 12 16 20.
- Agrupar 4 de diferente manera y controlar que haya 5 veces 4 en esos agrupamientos:

  8 + 8 + 4 = 16 + 4 = 20

  o

  12 + 8 = 20.
- Realizar un cálculo multiplicativo, aunque este procedimiento no es esperable, si estamos iniciando el trabajo con la multiplicación:

  5 × 4 = 20

En una puesta en común, se podrán comentar algunos procedimientos utilizados para averiguar el total de puntos. Se trata de llevar a los alumnos a identificar que están buscando el total reunido con una cantidad de tarjetas del mismo puntaje.

Se pueden tomar algunos de esos procedimientos poniéndolos en relación entre sí, identificando en cada uno cómo están representados los puntos de cada tarjeta (4), la cantidad de tarjetas (o cantidad de veces) y el total de puntos.

Se puede organizar la clase en grupos de aproximadamente cuatro alumnos. Cada grupo dispone de papel y lápiz donde buscar y anotar las tarjetas extraídas y el puntaje. Un representante pasa y extrae dos veces una tarjeta de la caja y se lleva las tarjetas así ganadas. En el grupo, calculan el puntaje. Se insiste en que deben estar muy seguros del puntaje obtenido y de cómo se hace para obtenerlo. Es posible disponer de fichas indicando los puntos, si algún alumno no encontrara alguna manera de averiguarlo y lo necesitara para representar los puntos de cada tarjeta.

Cada grupo o cada alumno debe también calcular lo que han encontrado otros grupos para verificar si acuerdan con los puntajes hallados.

Se les pueden distribuir tablas como la que aparece a continuación. Es necesario además que dispongan de papel para desplegar los procedimientos de búsqueda de los puntajes.

Nombre:

Equipo Nº	Primera vuelta	Segunda vuelta	Total
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

Una puesta en común puede permitir analizar diferentes procedimientos (basados en el conteo, en sumas reiteradas, etc.) deteniéndose en la equivalencia entre ellos, en el modo en que pueden controlar las "veces" que se repite el valor de cada tarjeta.

El juego se puede reiterar las veces que el docente considere apropiado, haciendo varias vueltas por juego. Con el tiempo y el análisis de los diversos procedimientos, se podrá ir desalentando algunos por considerarlos muy costosos como el apoyo en los dibujos o el contar uno por uno...

Con el avance de los procedimientos, en algún momento sería posible presentar la escritura multiplicativa como por ejemplo $3 \times 5 = 15$ para tres veces cinco o 3 tarjetas de 5, relacionándola con los otros procedimientos desplegados para este mismo cálculo. La extensión de los números involucrados en las tarjetas, así como la disponibilidad de la calculadora (en la cual es posible identificar la escritura multiplicativa) pueden facilitar esta presentación.

INICIO DE CONSTRUCCIÓN DE UN REPERTORIO MULTIPLICATIVO

Es posible ir armando un inventario de los modos en los que se calculan los puntajes para cada extracción de tarjetas. Por ejemplo:

$3 \times 6 = 18$
$6 + 6 + 6 = 18$
$5 \times 7 = 35$
$7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$
$2 \times 10 = 20$
$10 + 10 = 20$
$8 \times 6 = 48$
$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48$
$9 \times 4 = 36$
$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 36$
$5 \times 9 = 45$
$9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45$
$4 \times 10 = 40$
$10 + 10 + 10 + 10 = 40$
$6 \times 7 = 42$
$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 42$
$4 \times 6 = 24$
$6 + 6 + 6 + 6 = 24$

El docente puede proponer entonces ordenar de alguna manera los cálculos que ya se han averiguado durante el juego. Por ejemplo, agrupando los cálculos para las tarjetas del mismo valor. A esta primera clasificación de los resultados conocidos, se pueden ir agregando o insertando los nuevos que vayan apareciendo.

9×4	3×6	5×7
5×9	2×10	4×6
6×7	4×10	8×6

Otra organización posible podría agrupar los cálculos según la cantidad de veces que se repite la tarjeta:

$2 \times 10 = 20$
$3 \times 6 = 18$
$4 \times 6 = 24$
$4 \times 10 = 40$
$5 \times 7 = 35$
$5 \times 9 = 45$
$6 \times 7 = 42$
$9 \times 4 = 36$

A lo largo del juego, es frecuente que los alumnos identifiquen, por ejemplo, que 3 tarjetas de 5 otorgan el mismo puntaje que 5 tarjetas de 3. Habiendo jugado y analizado los procedimientos muchas veces, avanzando hacia el reconocimiento de la presencia de una multiplicación, será posible instalar frente al grupo la pregunta de si esto será así cualesquiera sean los valores o la cantidad de tarjetas. Llegados a este punto, el docente podrá ofrecer una explicación asimilable por los alumnos, como por ejemplo:

Al disponer de 3 tarjetas de 5 puntos, es posible contar los puntos de la siguiente manera:

X X X X X
X X X X X
X X X X X

- Es posible contar los puntos de cada tarjeta haciendo 3 veces 5, o...
- Contar el primero de cada tarjeta, luego el segundo de cada tarjeta, el tercero de cada tarjeta y así... haciendo 5 veces 3.

De cualquiera de las dos maneras se recorren todos los puntos, obteniendo la misma cantidad de puntos.

Esto es posible pensarlo para cualquier multiplicación.

Otras relaciones que pueden aparecer y será interesante retomar:

- Si sabemos que 3 tarjetas de 5 son 15, 6 tarjetas de 5 es el doble, 30. Al doble de tarjetas del mismo puntaje le corresponderá el doble de puntaje.
- Si conocemos los puntos de 3 tarjetas de 4 y de 5 tarjetas de 4, podemos averiguar el de 8 tarjetas de 4. A la suma de tarjetas de un mismo puntaje le corresponde la suma de puntajes correspondientes a aquellas tarjetas. Etcétera.

Objetivos de aprendizaje Números naturales y operacio

Tercer grado

Establecer regularidades de la serie numérica oral y escrita para interpretar, producir y comparar escrituras numéricas de hasta cuatro cifras.

Componer y descomponer números en forma aditiva y multiplicativa analizando el valor posicional de las cifras. Producir explicaciones en el marco de los intercambios colectivos de la clase que apelen a las operaciones subyacentes a la organización de los números escritos.

Resolver problemas que remitan a diferentes significados de la suma y de la resta, bajo diferentes formas de presentación, que puedan ser abordados mediante distintos recursos de cálculo (por ejemplo: cálculos mentales exactos y aproximados, algorítmicos, etcétera).

Participar en prácticas de validación de procedimientos de resolución de problemas y cálculos.

Resolver problemas de multiplicación –que remitan a las relaciones de proporcionalidad simple– en situaciones sencillas, bajo diferentes formas de presentación y que puedan ser abordados con diversos recursos de cálculo (cálculos mentales exactos y aproximados, algorítmicos).

Resolver problemas de repartos y particiones equitativas, bajo diferentes formas de presentación, y que puedan ser abordados mediante diferentes recursos de resolución.

Ampliar del repertorio de resultados de sumas, restas y multiplicaciones. Utilizar el repertorio de resultados de suma, resta y multiplicación disponibles para resolver nuevos cálculos y para construir una justificación de sus resultados apelando a relaciones entre ellos.

Realizar cálculos mentales de suma y resta basándose en descomposiciones de los números y en resultados conocidos.

Problemas con billetes[6]

Materiales:

Un juego de billetes de fantasía para cada alumno.
Monedas de $1; billetes de $10; de $100; de $1.000 (veinte de cada uno).
Nueve cheques de fantasía cada cuatro alumnos (los cheques serán completados por el maestro).

Organización de la clase:

En grupos de cuatro alumnos, para la primera parte.

Descripción general del juego:

Que los niños progresen en la comprensión del sistema de numeración decimal no significa solamente que estén en condiciones de aumentar el rango de números con los que trabajan, sino también que puedan profundizar el análisis de las relaciones aritméticas subyacentes a la escritura de un número. Por esta razón, resulta interesante proponerles situaciones que les permitan conceptualizar el sistema, comprendiendo la organización recursiva de los agrupamientos, el rol de la base y el valor posicional.

El contexto del dinero es especialmente favorable ya que, al ser conocido por los niños, aporta informaciones que tal vez no estarían en condiciones de utilizar, tratando con los números fuera de contexto. Se espera que haya un interjuego entre el contexto y el sistema de numeración de modo tal que, apoyándose en el primero, se establezcan relaciones sobre el segundo.

Primera parte

Primer momento: el cajero paga los cheques

En cada grupo, uno de los niños hace de cajero y posee todos los billetes de ese grupo. El maestro entrega a cada uno de los tres niños restantes, tres cheques ya completos con un número de tres cifras y les pide que cada uno anote el monto de sus cheques y que, por turnos, los cambien en el banco. Los alumnos anotan el importe de los cheques y los cambian de a uno

6 Adaptado de *Grado de Aceleración 4º/5º. Proyecto de conformación de grados de aceleración. Programa de reorganización de las trayectorias escolares de alumnos con sobreedad en el nivel primario de la ciudad de Buenos Aires*. G.C.B.A. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento.

por vez, requiriendo así de tres rondas para que cada uno llegue a cambiar sus tres cheques. Así, cada niño del grupo cambiará un cheque en la primera ronda, otro en la segunda, etcétera. Cuando hayan finalizado el maestro deberá preguntar cuánto dinero ha reunido cada alumno del grupo.

Es de esperar que para averiguar la cantidad de dinero que poseen, los niños:

- Agrupen los billetes según su valor, cuenten cuántos billetes de cada clase se tienen y luego sumen esas cantidades. Si los alumnos ponen en juego esta estrategia, será conveniente pedirles que anoten la cantidad de billetes de cada clase que tienen, para luego usar estos datos como recurso de control.
- Sumen directamente los números de los cheques.

En la puesta en común, el maestro deberá chequear si está claro para todos los alumnos que ambas estrategias son válidas y conducen al mismo resultado. Si los alumnos no estuvieran convencidos de ello, deberá hacer notar que si se reagrupan las cantidades de los billetes, la suma que surge de la primera estrategia puede transformarse en la que corresponde a la segunda. En otros términos, se trata siempre del mismo total (total de billetes, total de importes de los cheques), compuesto de maneras diferentes.

Segundo momento: el cajero sólo paga con la menor cantidad posible de billetes

Cada niño tiene ahora su juego de billetes y el maestro le propone que completen de manera individual, una tabla como la siguiente, teniendo en cuenta la restricción de pagar con la menor cantidad posible de billetes:

Importe a cobrar en el cheque	Billetes de \$1.000	Billetes de \$100	Billetes de \$10	Billetes de \$1
\$1.398				
\$2.408				
\$6.360				
\$512				

Es posible que, para completar el cuadro, algunos niños realicen efectivamente el canje y compongan la cantidad con los billetes, o utilicen esa estrategia al menos para los números de las primeras filas. Otros alumnos, seguramente, no necesitarán emplear los billetes. En este punto se espera que los niños puedan realizar formulaciones del tipo: "no hace falta usar los billetes, te alcanza con mirar el número", "el número te dice cuántos de cada uno", "este te dice cuántos de mil; este, cuántos de cien", etcétera.

Si este tipo de expresiones no aparecieran y las estrategias estuvieran centradas en la composición con los billetes, el maestro puede:

a) Agregar nuevos importes de cheques en la columna de la izquierda (no es necesario darles nuevos cheques a los niños), de modo tal que aparezca cierta regularidad en la descomposición al completar el cuadro. Por ejemplo, si se agregaran diversos importes con cero en alguna de sus cifras intermedias ($3.048; $2.308, etc.), podría analizarse por qué no es necesario solicitar billetes de determinado valor o, para esos mismos importes, si hay alguna relación entre los tres billetes de mil o de cien y los tres que aparecen escritos en el cheque.

b) Colocar números cuyas cifras sean nueve o cercanas a nueve, de modo tal de hacer fatigosa la composición. Por ejemplo: $6.898, $3.989.

c) Solicitar a los alumnos que, en grupos de a tres, se pongan de acuerdo para pedirle de una sola vez al maestro –que hará de cajero de cada grupo– la cantidad necesaria de billetes de cada tipo para pagar un determinado cheque propuesto por el docente.

Segunda parte

A través de la siguiente actividad, se propone profundizar en las relaciones de valor entre posiciones contiguas de una escritura numérica. En la situación anterior fue posible analizar con los alumnos que en nuestro sistema de numeración el valor de las decenas representa 10 unidades, el de las centenas, 100, etc. Sin embargo, los alumnos no tuvieron aún la oportunidad de poner en juego las relaciones entre las diferentes posiciones: 1 de 1.000 es 10 de 100; 1 de 100 equivale a 10 de 10, etc. La relación entre estas últimas expresiones y la multiplicación (decir que 10 de 10 es 100 equivale a decir que 10 × 10 = 100) no es evidente para los niños, y será objeto de trabajo explícito en las actividades siguientes.

Se retoma la situación del cajero: sigue pagando con la menor cantidad posible de billetes, pero algunos billetes se acabaron.En esta actividad, nuevamente los niños deben completar un cuadro, pero no pueden utilizarse billetes de $1.000.

Importe a cobrar en el cheque	Billetes de $100	Billetes de $10	Billetes de $1
$1.207			
$2.017			
$1.027			
$7.021			

Al bloquear la posibilidad de utilizar billetes de $1.000, aparece en escena que 1 de 1.000 puede descomponerse en 10 de 100. Es posible que algunos niños usen implícitamente esta relación y planteen directamente que, para saber cuántos billetes de 100 hacen falta, alcanza con mirar las dos primeras cifras de la izquierda "porque son doce de cien", o "porque tenés dos de cien que te lo dice el número y uno de mil que son diez de cien, entonces tenés doce", etc. Será tarea del docente contribuir a que estas relaciones se expliciten para todos los alumnos y se relacionen con las operaciones aritméticas correspondientes.

Los alumnos deberán comprender que si deben "armar", por ejemplo, 1.207 sin billetes de 1.000, ese billete se "canjea" por 10 de 100, que se agregan a los 2 de 100 para el 200. Una relación a extraer de este trabajo es que 12 × 100 es 1.200.

Es importante que el docente lleve a confrontar esta actividad con la realizada en la primera versión del cajero, en la que se disponían de "billetes para cada valor posicional".

Se espera que, a raíz de esta actividad, los alumnos puedan anotar conclusiones del siguiente tipo:

- el número indica cuántos billetes de cada tipo son necesarios;
- hacen falta 10 billetes de 100 para 1 de 1.000;
- 10 × 100 = 1.000 y, a partir de esto, 12 × 100 = 1.200; 20 × 100 = 2.000, etcétera.

PROBLEMAS QUE REMITEN AL JUEGO

1. **A un señor le pagaron con tres billetes de $1.000, nueve billetes de $100 y cuatro billetes de $1. ¿Qué cantidad de dinero recibió?**
2. **Un señor tiene que recibir $1.500. ¿Alcanzan 15 billetes de $10 para pagarle? ¿Y 200 billetes de 10? ¿Cuántos billetes de 10 se necesitan para pagarle?**
3. **Un señor recibió un cheque de $1.240 y pidió que se lo paguen en billetes de $10. ¿Cuántos billetes deberá darle el cajero?**
4. **El cajero del banco tiene que pagar un cheque de $750 y solo tiene 3 billetes de $100 y el resto de $10. ¿Cómo podrá formar esa cantidad?**
5. **A un señor le pagaron con tres billetes de $1.000, doce billetes de $100, diez billetes de $10 y tres billetes de $1. ¿Qué cantidad de dinero recibió en total?**

6. Martín y Claudio, están pensando cómo juntar $2.845 con la menor cantidad posible de billetes de $1.000, $100, $10 y $1.

Martín escribió en su carpeta:	Claudio escribió:
2 billetes de $1.000	2 × 1.000
8 billetes de $100	8 × 100
4 billetes de $10	4 × 10
5 billetes de $1	5 × 1

a) Martín no entiende lo que escribió Claudio. ¿Cómo se lo explicarías?

b) Si tuvieran que juntar $4.537, ¿cómo escribiría Martín su respuesta? ¿Y Claudio?

c) ¿Cómo juntarías vos $2.363 con la menor cantidad posible de billetes de $1.000, $100, $10 y $1? Respondé “al estilo Claudio”.

7. Carlos tiene que juntar $3.875 con la menor cantidad posible de billetes de $1.000, $100, $10 y $1. Él utiliza este procedimiento:

1.000	100	10	1
1.000	100	10	1
1.000	100	10	1
	100	10	1
	100	10	1
	100	10	
	100	10	
	100		
3.000	800	70	5

Paula dice que se puede hacer más rápido así:

3 × 1.000 = 3.000

8 × 100 = 800

7 × 10 = 70

5 × 1 = 5

Si Paula tuviera que juntar $3.754, ¿qué cuentas pensás que haría?

8. Para pagar $3.578 con la menor cantidad posible de billetes de $1, $10, $100 y $1.000, Juan hizo las siguientes cuentas:

3 × 1.000

5 × 100

7 × 10

8 × 1

A partir de estas cuentas, ¿es posible saber qué cantidad de billetes utilizó? ¿En qué parte de las cuentas está escrito?

9. Carla dice que con solo mirar el número que indica cuánto debe pagar se da cuenta de cuántos billetes de $1, $10, $100 y $1.000 va a utilizar. Por ejemplo, si la cantidad es $5.429, ella sabe que son 5 de $1.000; 4 de $100; 2 de $10 y 9 de $1. Es decir, que en total son 20 billetes. Si la cantidad a pagar fuera $1.002 ¿Cuántos billetes serían necesarios? ¿Y si fuera $9.090?

10. ¿Cuál de los dos procedimientos que te presentamos te permiten encontrar la respuesta del siguiente problema? Decidí, y si te hace falta, luego comprobá con la calculadora realizando todas las cuentas:
El cajero de un banco tiene que pagar $7.453 con la menor cantidad posible de billetes de $1; $10; $100 y $1.000.

Procedimiento 1:
5 × $10
7 × $1.000
4 × $100
3 × $1

Procedimiento 2:
5 × $10
7 × $1
4 × $1.000
3 × $100

11. Un cajero tiene que pagar siempre con la menor cantidad posible de billetes de $1, $10, $100 y $1.000. Al finalizar el día, había escrito las siguientes cuentas. ¿Es posible saber cuánto había pagado en cada caso, sin hacer ninguna cuenta?

Para pagarle a la Sra. Martínez:
3 × 1.000
2 × 100
9 × 10

Para pagarle al Sr. Gómez:
9 × 1
3 × 100
4 × 10
6 × 1.000

12. El cajero del banco tiene que pagar un cheque de $750 y solo tiene 5 billetes de $100, 3 de $10 y el resto de $1. ¿Cómo podrá formar esa cantidad?

13. A un señor le pagaron con tres billetes de $1.000, doce billetes de $100, diez billetes de $10 y tres billetes de $1. ¿Qué cantidad de dinero recibió en total?

14. ¿Es posible formar $3.452 utilizando solo billetes de $100 y de $10? ¿Y formar 6.430 con los mismos billetes?

Problemas con dados

Primera parte

Esta actividad se puede jugar con 3 o con 4 dados. Para llevar adelante el juego no es requisito que los niños conozcan los números que van a emplearse; la actividad puede ayudar a que los niños generen ese conocimiento. Así, por ejemplo, tal vez algunos alumnos no estén en condiciones de escribir el 1.516, pero sí de componerlo a partir de los puntajes obtenidos en los dados (1.000 + 500 + 10 + 6). Es justamente a partir de la composición y descomposición que los niños podrán reflexionar sobre las características de estos números y acceder a ellos.

Materiales:

4 dados (para cada grupo de 4 alumnos).
Calculadora (opcional).

Organización de la clase:

En grupos de 4 alumnos.

Descripción general del juego:

Se juega, primero, con 3 dados.
- Uno de los dados será súpermágico: cada punto en él valdrá 100 puntos.
- Otro será mágico: cada punto en él valdrá 10 puntos.
- Otro será común: cada punto valdrá 1 punto.

Dentro de cada grupo de jugadores, por turnos, cada jugador lanza los 3 dados y, una vez que ve qué números salieron, decide cuál dado será súpermágico, cuál mágico y cuál común, escribiendo el puntaje obtenido en una tabla como la que se presenta a continuación. Sugerimos que todos los jugadores lleven control del juego, anotando y calculando los puntajes obtenidos por él mismo y por sus contrincantes. En la tabla registrarán los puntos de la cara de cada dado (4 para el supermágico, 3 para el mágico, etc.) o bien el puntaje obtenido con cada dado, de acuerdo con el valor que le corresponda, como muestran los ejemplos que aparecen debajo.[7] El docente podría mostrar en el pizarrón cómo anotar.

7 Si apareciesen ambos tipos de anotaciones, en la puesta en común posterior, sería interesante confrontarlas analizando cómo se relacionan unas con otras: es decir, qué relación existe, por ejemplo, entre el 4 del dado y 400 del puntaje obtenido.

Jugador	Dado súpermagico	Dado mágico	Dado común	Total	Espacio para usar si necesitan hacer cálculos
	400	40	3		
	600	40	3		
	600	50	5		

Jugador	Dado súpermagico	Dado mágico	Dado común	Total	Espacio para usar si necesitan hacer cálculos
	4	4	3		
	6	4	3		
	6	5	5		

Un alumno pasa el turno al jugador siguiente, y así sucesivamente. Al término de cada vuelta, gana el jugador que haya obtenido mayor puntaje.

Después de haber jugado dos o tres partidas, el docente organizará una puesta en común con la finalidad de analizar los procedimientos utilizados para calcular los puntajes obtenidos y los criterios para decidir cuáles conviene que sean los dados supermágico y mágico.

Para gestionar esta parte de la clase, el docente podrá seleccionar procedimientos que sean suficientemente diversos entre sí,[8] y anotarlos en el pizarrón. Se busca así generar mejores condiciones para que los alumnos puedan interpretar los procedimientos de otros compañeros; será conveniente dejar un tiempo destinado a que los niños los analicen y tomen posición al respecto. Recién después podrá organizar una

8 Muchas veces, con la intención de favorecer las interacciones sociales, los docentes organizan las puestas en común pidiendo que todos los alumnos describan sus soluciones. Sin embargo, si las estrategias desplegadas son muy próximas entre sí, la actividad, por no generar una tensión suficiente, suele ser tediosa para los alumnos y poco productiva desde el punto de vista de la construcción colectiva de conocimientos. En esta propuesta, estamos pensando la puesta en común como un espacio de producción de aspectos que difícilmente los alumnos elaborarían en las resoluciones individuales.

discusión colectiva sobre dichos procedimientos.

Durante la discusión, cuando los alumnos dicen que conviene que el dado con el puntaje mayor sea supermágico, porque hace ganar más puntos, se podrá preguntarles si eso es así cualesquiera sean los números que salgan en los dados.

Luego, se analizarán los diferentes procedimientos utilizados para calcular los puntajes obtenidos:

algoritmo de la suma

calculadora

cálculos mentales: sumando 100 + 100, ... los puntajes de un dado; luego, 10 + 10, ... los puntajes de otro dado, etc.; apoyándose en la multiplicación, 5 de 100 = 500; 3 de 10 = 30 y 1 de 1.

Entre los diferentes procedimientos posibles, el docente podrá identificar algunos basados en las sumas y otros, en las multiplicaciones.

Se espera poder concluir con los alumnos que, en este caso, el total obtenido puede calcularse fácilmente a partir de lo que saben sobre el sistema de numeración, en afirmaciones del tipo: "este dado te dice el de los cienes; este, el de los dieces, y este, el de los unos"; o "mirá cómo queda en la tabla, ahí te dice el número", o en cálculos similares al que señalamos, apoyándose en la multiplicación.

En el caso de que señalen una regularidad descubierta sobre sus anotaciones en la tabla de seguimiento del juego, será necesario reflexionar con ellos acerca de por qué se cumplen esas regularidades, llevándolos a establecer relaciones como las que manifiestan las otras afirmaciones que se presentan.

Segunda parte

a) Puede volver a jugarse con tres dados, pero esta vez varias vueltas por partida, ganando aquel que obtenga el mayor puntaje al término de las mismas. Presentamos una tabla para anotar los puntajes de la primera vuelta. En tablas idénticas podrán registrarse las vueltas siguientes para luego calcular el puntaje total.

Primera vuelta

Jugador	Dado súpermagico	Dado mágico	Dado común	Total	Espacio para usar si necesitan hacer cálculos

b) Luego, podrá jugarse incluyendo un cuarto dado: cada uno de sus puntos valdrá 1.000. En este caso, para que los números no aumenten más allá del rango de los miles, es recomendable volver a jugar una ronda por participante.

Se optó aquí por colocar en el cuadro el valor de los puntos del dado, para cada tirada.

Jugador	Puntaje obtenido con el dado con puntos que valen 1.000	Puntaje obtenido con el dado con puntos que valen 100	Puntaje obtenido con el dado con puntos que valen 10	Puntaje obtenido con el dado con puntos que valen 1	Total	Espacio para usar si necesitan hacer cálculos
Ejemplo:	4.000[9]	300	20	1	4.321	

Se organizará una breve puesta en común analizando qué agrega el nuevo dado al cálculo de los puntajes obtenidos. En este espacio colectivo es interesante orientar la reflexión hacia el valor posicional, proponiendo a los alumnos analizar qué relación tienen, por ejemplo, para nuestro cuadro, el tres del dado y el 3 del 300 en el puntaje obtenido.

Si bien resulta más complejo jugar con 4 dados que con 3, por el rango numérico que se maneja en cada caso, no es este el único progreso posible en esta actividad. El avance también puede estar dado por la posibilidad de profundizar en la reflexión, por el análisis de las características de los números que se están poniendo en juego, o por el tipo de discusión que se lleva a cabo.

9 Para el caso en que se anotara colocando números de una cifra para cada dado, resultará interesante discutir cómo hacer para calcular el puntaje total obtenido y si este valor tiene alguna relación con el número que se forma al completar cada casillero del cuadro.

PROBLEMAS QUE REMITEN AL JUEGO

1. Un chico sacó estos dados:

¿Cuál es el valor que le conviene darle a cada dado? ¿Qué puntaje obtiene de ese modo?

¿Qué puntajes podría haber obtenido si no le daba a cada dado el valor más conveniente?

2. Otro chico anotó 3.121 en una vuelta. ¿Eligió la mejor opción? Si no, ¿cuál hubiera sido la más conveniente?

3. Se juegan dos tiradas de tres dados. En la primera, un chico sacó 5, 5, 6. Acomodó los dados del modo más conveniente. ¿Qué dados sacó en la segunda tirada, si en total sumó 1.000 puntos?

4. Se juegan dos tiradas de tres dados. En la primera, un chico sacó 3, 6, 1. ¿Pudo haber alcanzado 1.000 puntos al sumar la segunda tirada? ¿Y si se sacó 5, 6, 4?

5. Dos nenes discuten cuando juegan con 3 dados. Uno de ellos dice que si en el primer tiro alguno de los dados es un 1, es imposible alcanzar los 1.000 al sumar los puntos de la segunda tirada. El otro nene dice que sí es posible. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

PROBLEMAS CON LA CALCULADORA

Los siguientes problemas permiten explorar aspectos del valor posicional en el contexto de la calculadora.

1. Escribir el 3.270 en la calculadora utilizando solo los números 1 y 0 y los signos + e =. Esta consigna se puede reiterar con otros números, con ceros ubicados en diferentes posiciones (5.048, 3.001, etcétera).

2. Hacer desaparecer de la calculadora un número, por ejemplo el 3.247, utilizando solo los números 1 y 0 y los signos – e =, y logrando que las cifras se conviertan en 0, de a una por vez.

3. En el visor de la calculadora aparece el número 5.468. ¿Cómo lograr que aparezca el número 5.068, sin borrar? Nuevamente, esta tarea se puede realizar con diferentes números y pidiendo que el 0 aparezca, cada vez, en una posición diferente.

4. ¿Cómo lograr transformar en cada caso el número que aparece en el visor, sin borrarlo?

En el visor aparece	¿Cómo lograr que aparezca...?
53	530
87	870
52	5.200
38	3.800
125	1.250
34	340
931	9.310

Nuevamente, a propósito de esta actividad, se obtendrán conclusiones acerca de los "efectos" de multiplicar un número por 10 o por 100. La calculadora, en este caso, podrá funcionar como un instrumento para verificar el resultado de las anticipaciones realizadas.

5. Hacer aparecer en la pantalla ciertos números dados, a partir de un original. Por ejemplo, se les pide a los alumnos que completen la siguiente grilla, anotando en el espacio entre un número y otro qué operación realizaron para obtener el número indicado.

143		243		1.243		1.043		3.243		3.203	

6. Lograr que aparezca en la pantalla el número indicado sin utilizar las teclas que se mencionan. Por ejemplo, formar 537 sin tocar 3, 5 ni 7. Comparar con los cálculos de otros compañeros.

7. Dado un número inicial (en este caso, 12), obtener los siguientes números en el visor de la calculadora, utilizando las teclas de multiplicar y dividir.

12 → 120 → 1.200 → 600 ⟶ 300 → 30 → 3 → 1

PROPUESTAS Y COMENTARIOS SOBRE LA UTILIZACIÓN DE ESTRATEGIAS DE CÁLCULO PARA ESTIMAR RESULTADOS DE SUMAS Y RESTAS

Estimar un resultado puede ser particularmente complejo para los niños, porque requiere la utilización de algunos recursos de cálculo mental. Estos recursos pueden consistir en la memorización de cierto repertorio aditivo y en el redondeo de los números en juego.

En efecto, estimar implica establecer cierta aproximación a un resultado exacto a partir de modificar los números en juego por otros con los que resulte más cómo operar y que permitan obtener una respuesta relativamente cercana a la que se conseguiría si efectivamente se realizara el cálculo.

Esta transformación de unos números dados en otros más "manejables" no es sencilla ni evidente para los niños, y es necesario por lo tanto que sea motivo de trabajo en el aula.

Por ejemplo, analicemos las sumas y restas que intervienen en la siguiente actividad:

Sin resolver los cálculos, marcá entre qué números creés que va a estar el resultado. Si lo necesitás, comprobá con la calculadora.

	Resultado correcto				
	0 y 200	**200 y 400**	**400 y 600**	**600 y 800**	**800 y 1.000**
a) 699 + 99					
b) 112 + 21					
c) 860 – 101					
d) 999 – 953					

En el caso a) es posible pensar que 699 es casi 700 y 99 es casi 100; entonces, la suma original (699 + 99) se podría reemplazar por 700 + 100. Esta estrategia de redondeo no es necesaria en el caso b), porque si se evalúa que a 112 se le suma 21, el resultado que se obtenga va a seguir siendo menor que 200, es decir, va a seguir dentro del primero de los intervalos que se proponen.

Algo similar puede pensarse para las restas. En el caso c) alcanza con redondear el 101 y pensar que se va a restar 100, que es más sencillo. En la resta d), como los números son prácticamente iguales, es posible anticipar que el resultado va a estar entre 0 y 200. En ese caso, no es necesario redondear ninguno de ellos.

Como vemos, la estrategia a desarrollar está asociada a evaluar los números que intervienen en el cálculo, no hay una única alternativa.

A su vez, los intervalos que se ofrecen también resultan una variable de la situación. Por ejemplo, si en lugar de la propuesta anterior los intervalos fueran más amplios, como los siguientes, la estimación podría ser mucho más general.

	Resultado correcto	
	0 y 500	**500 y 1.000**
a) 699 + 99		
b) 112 + 21		
c) 860 – 101		
d) 999 – 953		

Al ampliar los intervalos, se requiere de una estimación menos exigente y, al mismo tiempo, la disminución de la cantidad de intervalos hace que la actividad sea más sencilla.

En los ejemplos anteriores analizamos las estrategias posibles para estimar y el rol de los intervalos. En la actividad que proponemos a continuación se trata de seleccionar un resultado entre varios que se ofrecen.

Sin hacer la cuenta, marcá cuál creés que es el resultado correcto de estos cálculos. Después, comprobalo con la calculadora.

	Resultado correcto		
a) 617 + 199	516	816	916
b) 375 + 112	387	487	887
c) 945 – 909	36	136	336
d) 448 – 278	170	370	470

En este caso, se trata de seleccionar el resultado correcto entre tres opciones. En rigor, la forma de determinar cuál es la respuesta correcta es descartando las que resultan inverosímiles. Por ejemplo, para el caso a) 617 + 199 es seguro que el resultado 516 no puede ser correcto, porque es menor que uno de los sumandos. Es posible considerar que 199 es aproximadamente 200; entonces, la suma propuesta no puede dar 916, porque 600 + 200 no llega a ese valor. El resultado tiene que ser, entonces, 816.

Como puede verse, hay una estrategia de estimación al transformar la cuenta dada (617 + 199) en otra más sencilla (600 + 200) y el resultado obtenido (800) es aproximado, porque se han cambiado los números en juego.

Los recursos que hemos mencionado para este ejemplo permiten elegir la respuesta correcta de entre las que se ofrecen y controlar que esa elección sea razonable.

Calculá cuál va a ser el resultado aproximado de cada uno de los siguientes cálculos.

a) 201 + 398
b) 158 + 47
c) 315 – 19
d) 476 – 62

Esta última situación es exigente para los alumnos, porque demanda encontrar relaciones entre los números que componen el cálculo original. Por ejemplo, para el caso a) 201 + 398 es posible pensar que esos números son aproximados a 200 y a 400, respectivamente. Entonces, el resultado va a ser cercano a 600. A su vez, para la resta c) 315 – 19 es posible pensar que 19 es mayor que 15; entonces, el resultado tiene que ser menor que (y muy cercano a) 300.

La exigencia de la situación para los niños no está dada solo por la necesidad de establecer relaciones entre números, sino también por el hecho de establecer cuál es el rango en el que un resultado puede ser considerado aproximado. Esta cuestión debe ser tratada en clase, ya que los niños suelen rechazar las actividades de estimación, posiblemente porque el trabajo sostenido con resultados exactos en el terreno del cálculo les haga suponer que respuestas como "aproximadamente 600" o "algo menos que 300" son insuficientes o incompletas.

PROPUESTAS Y COMENTARIOS SOBRE LA CONSTRUCCIÓN PROGRESIVA DE UN REPERTORIO MULTIPLICATIVO

Definimos como repertorio multiplicativo a la disponibilidad en memoria de un conjunto de resultados de multiplicaciones y divisiones, de forma que puedan convocar autónomamente esos resultados frente a las situaciones que lo requieran.

La construcción de estos cálculos y su disponibilidad son objeto de enseñanza. Asumir esto supone también un cierto trabajo de memorización y automatización, pero que sigue a un proceso de otorgar sentido a estos cálculos a través de la resolución y el análisis de diversos problemas, un sentido apoyado en la relación entre los cálculos y problemas que permiten resolver y, también, en diferentes relaciones entre los números y diferentes cálculos. Es decir, las actividades que aquí proponemos no constituyen en absoluto inicios del trabajo con los cálculos multiplicativos, sino momentos de sistematización que recogen relaciones abordadas a lo largo de segundo grado y de tercer grado, y que deberán ser retomadas en el segundo ciclo.

La actividad sobre el juego de las tarjetas propuesta en este documento puede dar lugar, como se señaló, a un inicio de identificación de algunas multiplicaciones cuyos resultados los niños reconocen ya por haberlos encontrado en muchas oportunidades, o por haber discutido y analizado en la clase maneras de hallarlos rápidamente.

Actividades sobre el soporte de la tabla pitagórica

El docente puede entregar una tabla pitagórica al grupo. Se puede contextualizar históricamente la aparición de esta tabla, comentando que Pitágoras fue un filósofo y matemático griego que vivió aproximadamente en el año 500 a.C. y que se le atribuye la invención de una tabla de doble entrada parecida a la que aquí se presenta, para reunir y ordenar los resultados de algunas multiplicaciones que colaboran en la resolución de otras. Será necesario detenerse a mostrar cómo está organizada, pensar entre todos algunos ejemplos. Se puede en este caso preguntar por resultados que ellos ya conozcan de memoria y proponerles ubicarlos en la tabla.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

1. Luego se les puede señalar algunos casilleros en particular –seleccionados por el docente– para completar en forma individual; luego se dará lugar a una discusión con toda la clase, respecto de los modos posibles de acceder a los resultados de las multiplicaciones solicitadas.
   Por ejemplo, si se trata de completar el casillero correspondiente a 6 × 7, algunos procedimientos podrían ser:
   - Contar de 7 en 7, con 6 veces el "salto" de 7, quizás recorriendo los casilleros de la columna del 7.
   - Sumas reiteradas de 7, controlando sumar 6 veces ese número.
   - Uso de resultados conocidos; por ejemplo, 6 veces 7 como:
     - el doble de 3 veces 7;
     - el triple de 2 veces 7;
     - 4 veces 7 más 2 veces 7;
     - 10 veces 7 menos 4 veces 7;
     - equivalente a 7 veces 6, a partir del uso de la propiedad de conmutatividad;
     - etcétera.

   En todos los casos, la riqueza de este intercambio consiste en analizar relaciones que pueden constituir puntos de apoyo para conocer resultados de multiplicaciones y las razones de su funcionamiento. Por ejemplo, en relación con la equivalencia 6 × 7 = 4 × 7 + 2 × 7.

- Si se despliegan los cálculos en sumas, en el segundo caso, se han agrupado los sumandos, pero siempre sigue siendo la misma cantidad de 7:

7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7

7 + 7 + 7 + 7   7 + 7

- Lo mismo puede decirse cuando se trata del doble de 3 × 7:

7 + 7 + 7   7 + 7 + 7

2. Es posible pedir que ubiquen un conjunto de números en todas las casillas en las que aparezca este resultado:

12 16 18 19 20 21 24 30 36 42

- En espacios de discusión posterior a la resolución, es posible identificar que un número puede formarse con diferentes multiplicaciones. Por ejemplo:

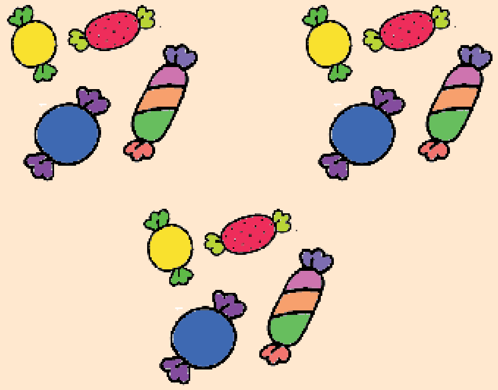
12 = 3 × 4 = 4 × 3 = 2 × 6 = 6 × 2

Por otro lado, no se incluye en la tabla pitagórica, pero también es igual a 1 × 12 o 12 × 1.

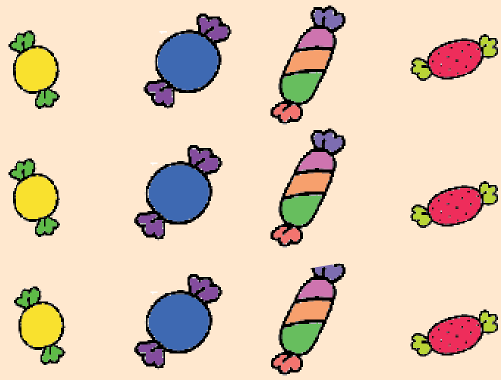
Se puede avanzar en alguna justificación de estas equivalencias:

Si tenemos, por ejemplo, 3 grupos de 4 caramelos y queremos averiguar cuántos son en total, es posible contarlos de diferente manera:

- Contando cada grupo de 4, es decir, contando 3 veces 4; o

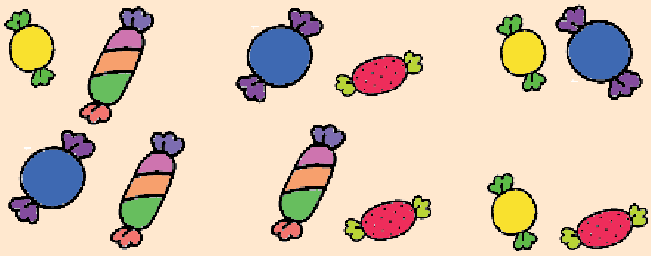


- Contando el primero de cada grupo, luego el segundo de cada grupo, así hasta agotarlos, es decir, contando 4 veces 3.



Se presenta aquí una posible justificación de la conmutatividad. Es posible identificar entonces que, una vez conocida una fila de tabla, se conoce también la columna correspondiente al mismo número, y viceversa. También es posible analizar la equivalencia entre 3 × 4 y 6 × 2 como modos de armar diferentes agrupamientos con la misma cantidad de elementos.

Si tenemos 3 grupos de 4 caramelos, se puede armar dos grupos de 2 caramelos por cada uno de esos grupos, obteniendo entonces 6 grupos de 2 caramelos:



- Otros números, como 21, solo pueden ubicarse en 3 × 7 y 7 × 3. Será necesario pensar que 21 puede también armarse con las multiplicaciones 1 × 21 y 21 × 1, que "se salen" de la tabla, y que todos los números pueden armarse con multiplicaciones de sí mismo por 1; es el caso de 19, que no puede ubicarse en ninguno de estos casilleros y solo puede armarse con las multiplicaciones 1 × 19 y 19 × 1.

3. Se les puede proponer completar cálculos de la siguiente forma:

..... × ..... = 12   ..... × ..... = 24
..... × ..... = 30   ..... × ..... = 36

4. Una posibilidad para analizar relaciones entre diferentes tablas consiste en pedirles que completen fragmentos de la tabla pitagórica. Por ejemplo:

×	2	4	8
5			
6			
7			
8			

El análisis de los resultados de estos casilleros permitirá al docente identificar con toda la clase que el resultado de hacer 4 veces un número (o una cantidad) es el doble de hacer 2 veces ese mismo número (o cantidad). El resultado de hacer 8 veces un número equivale a calcular el doble de hacerlo 4 veces.

×	3	6	9
5			
6			
7			
8			

De manera análoga, en fragmentos de tablas como el anterior, es posible analizar cómo 9 veces un número equivale a hacer el triple de 3 veces ese número, o 6 veces el número más 3 veces el número.

×	2	5	7
5			
6			
7			
8			

Esta tabla permitirá analizar la equivalencia entre hacer 7 veces un número y sumar 5 veces ese número con 2 veces ese número.
También se puede retomar la conmutatividad para 5 × 7 y 7 × 5, etcétera.

5. También podrá analizarse por qué no presentamos una tabla que se extendiera más allá de 10. Si es posible, continuar la tabla por el lado de las filas y de las columnas más allá de 10. Así, se les puede proponer calcular 12 × 8 a partir de lo que ellos conocen. Y analizar modos posibles de hacerlo:
- el triple de 4 × 8;
- el doble de 6 × 8;
- 10 × 8 + 2 × 8;
- 7 × 8 + 5 × 8;
- etcétera.

6. *¿Cuáles de los siguientes números se encuentran en la tabla del 5?*

35 23 40 31 15 55 82 100

Después de la resolución, se podrá analizar cuál es la multiplicación por 5 que permite incluir cada resultado en la tabla. Será necesario recordar que las tablas exceden los resultados incluidos en la tabla pitagórica.
Los niños quizás reconozcan, o el docente lo resalte, que los números que se encuentran en la tabla del 5 terminan en 0 o en 5, y avanzar en la justificación de esta regularidad identificando que nuestros números se organizan de 10 en 10, entonces al avanzar de a 5 se cae en un número terminado en 5 o en 0, cada dos veces 5 se avanzan 10...
Se puede pedir también que propongan otros números de la tabla e indiquen con qué multiplicación es posible armarlos.
¿Cuáles de los siguientes números se encuentran en la tabla del 4?

12 19 24 30 32 34 35 36 42

Esta lista incluye números que posiblemente los niños crean que son múltiplos de 4, como por ejemplo 30, 34, 42. Se tratará de ver que no es posible armar ese número con una cantidad de grupos de 4. Para 30, es posible pensar que con 24 se pueden armar 6 grupos de 4; entonces, con 6 más se arma un grupo más y sobran 2, etcétera.

7. Se puede pedir a los alumnos completar el resto de la tabla. En un espacio de discusión colectiva, se podrá retomar las diferentes relaciones a las que es posible recurrir para completar los diferentes resultados. Dada la cantidad de resultados, es posible llevar adelante este análisis progresivamente, retomándolo en diferentes momentos.

Será necesario comunicar a los alumnos la necesidad de disponer de algunos resultados de memoria o fácilmente reconstruibles para poder realizar otros cálculos. Para memorizarlos más fácilmente, nos podemos ayudar con todas las relaciones que venimos analizando entre los diferentes cálculos.

Anotar en los cuadernos o en un afiche las regularidades descubiertas por el grado colaborará a poder volver a ellas en diferentes oportunidades.

A partir del reconocimiento de la conmutatividad, es posible establecer también que la tabla posee un eje de simetría a lo largo de una de sus diagonales y se reiteran los resultados de uno y otro lado. Por esa razón, con conocer una mitad de los resultados se conoce la otra mitad.

El análisis de las regularidades presentes entre las multiplicaciones permitirá retomar aquí una reflexión acerca de lo que sucede en la fila y columna del 10. Se puede solicitar a la clase continuar esa fila y/o columna. También se puede solicitar que anticipen el resultado de números mayores multiplicados por 10, tales como 73 × 10 o 10 × 96. Se trata de llegar a identificar con el grupo que al multiplicar por 10, los números van de 10 en 10: por ejemplo, 73 veces 10 o 96 veces 10. Hacer 73 veces 10 equivale a hacer 70 veces 10 más 3 veces 10. Cada 1 que se hace 10 veces, se convierte en un 10; cada 10 que se hace 10 veces, se convierte en un 100. Entonces, 73 × 10 es 730.

8. Juego para acompañar la memorización de las tablas de multiplicación.

Cada alumno dispone de un juego de tarjetas con todos los cálculos de la tabla pitagórica.

Por ejemplo:

1 × 1	1 × 2	1 × 3	1 × 4	1 × 5	1 × 6	1 × 7	1 × 8	1 × 9	1 × 10
2 × 1	2 × 2	2 × 3	2 × 4	2 × 5	2 × 6	2 × 7	2 × 8	2 × 9	2 × 10
3 × 1	3 × 2	3 × 3	3 × 4	3 × 5	3 × 6	3 × 7	3 × 8	3 × 9	3 × 10
4 × 1	4 × 2	4 × 3	4 × 4	4 × 5	4 × 6	4 × 7	4 × 8	4 × 9	4 × 10
5 × 1	5 × 2	5 × 3	5 × 4	5 × 5	5 × 6	5 × 7	5 × 8	5 × 9	5 × 10
6 × 1	6 × 2	6 × 3	6 × 4	6 × 5	6 × 6	6 × 7	6 × 8	6 × 9	6 × 10
7 × 1	7 × 2	7 × 3	7 × 4	7 × 5	7 × 6	7 × 7	7 × 8	7 × 9	7 × 10
8 × 1	8 × 2	8 × 3	8 × 4	8 × 5	8 × 6	8 × 7	8 × 8	8 × 9	8 × 10
9 × 1	9 × 2	9 × 3	9 × 4	9 × 5	9 × 6	9 × 7	9 × 8	9 × 9	9 × 10
10 × 1	10 × 2	10 × 3	10 × 4	10 × 5	10 × 6	10 × 7	10 × 8	10 × 9	10 × 10

Cada alumno dispone también de dos sobres, rotulados con las siguientes leyendas, respectivamente:

"Multiplicaciones que recuerdo de memoria", y

"Multiplicaciones que tengo que seguir practicando".

De a dos, cada alumno coloca boca abajo sus tarjetas y las mezcla. Por turnos, cada alumno toma una de sus tarjetas y dice el resultado correspondiente. Si lo sabe de memoria, esa tarjeta se incluye en el primer sobre; si no, en el segundo.

Al terminar de pasar todas las tarjetas de cada uno de los dos alumnos, se propone un trabajo con el sobre que incluye las “Multiplicaciones que tengo que seguir practicando”. Se puede proponer a cada alumno que haga una lista de ellas, que las ordene para identificar en cuáles se les presentan dificultades.
El docente podrá retomar con todos las multiplicaciones en las que haya habido dificultades más sistemáticas en todo el grado, analizando cuáles son las relaciones en las que se pueden basar para recordarlas. Para la semana siguiente, se les propone estudiar, con las relaciones sugeridas u otras, las multiplicaciones del segundo sobre. Se repite entonces la dinámica iniciada en el primer momento, pero solo con las multiplicaciones que tenían que seguir practicando.

EL REPERTORIO MULTIPLICATIVO COMO RECURSO PARA RESOLVER DIVISIONES

9. Proponemos analizar con los alumnos la posibilidad de utilizar la tabla pitagórica o los resultados de multiplicaciones conocidos para resolver divisiones. Por ejemplo, si se trata de hallar el resultado de 24 dividido 3, se puede analizar la posibilidad de usar el conocimiento de 8 × 3.
El docente puede apelar para este análisis a algún contexto en el que se plantee la división; incluso, será interesante referir a los dos sentidos de los repartos conocidos posiblemente por los alumnos: búsqueda de la cantidad de repeticiones o búsqueda del número a repetir.
Por ejemplo,

- *Se quieren distribuir 24 empanadas en bandejitas de a tres, ¿cuántas bandejas se necesitan?*

  Se trata de buscar cuántas veces hay que repetir el número 3 hasta alcanzar 24:

  3 + 3 + 3 + … 24

  … × 3 = 24
- *Se quieren distribuir 24 empanadas en tres platos con la misma cantidad de empanadas cada uno. ¿Cuántas empanadas se colocarán en cada plato?*

En cambio, en este caso se trata de buscar qué número repetido tres veces permite alcanzar 24:

… + … + … = 24

3 × … = 24

En este análisis, es posible identificar también la relación entre la operación de división y la búsqueda del factor desconocido de una multiplicación.
Se puede solicitar a los alumnos que anoten divisiones que ellos pueden conocer a partir de los resultados de la tabla pitagórica: por ejemplo, que hagan una lista de divisiones (anoten los cocientes en otra hoja) y la intercambien con un compañero para que las resuelva y luego cotejen juntos los resultados.
De manera análoga, será importante retomar divisiones en las cuales el resto no sea nulo. Con ejemplos similares a los anteriores, si se tratara de 25 empanadas, se trataría, en el primer caso, de buscar cuántas veces repetimos el 3 acercándonos lo más posible al 25, sin pasarnos:

3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 = 25

8 × 3 + 1 = 25

O sea, se necesitarían 8 bandejas y sobra 1 empanada. Dejando el contexto de lado, tenemos allí el cociente y resto de la división, que pueden leerse en los cálculos presentados. Nuevamente, el conocimiento de 8 × 3 permite identificar la respuesta al problema.
En el segundo ejemplo, si disponemos de 25 empanadas a distribuir en partes iguales en 3 platos, tenemos:
$8 + 8 + 8 + 1 = 25$
$3 \times 8 + 1 = 25$
Nuevamente, se podrá proponer a los alumnos anotar divisiones que puedan conocer a partir de los resultados de la tabla pitagórica.

10. Otra situación para acompañar la construcción de un repertorio multiplicativo podría consistir en realizar un dictado de cálculos. El docente elegirá si se restringe a dictar cálculos correspondientes a una misma tabla o a diferentes tablas. Como puede notarse en los ejemplos de formulaciones que ofrecemos, este dictado es una oportunidad para referirse de distintos modos a multiplicaciones y divisiones. Por ejemplo:

6 veces 9
5 multiplicado por 8
9 por 4
El número 3 repetido 7 veces
El producto entre 8 y 2

¿Se encuentra 54 en la tabla del 8?
¿Qué número multiplicado por 8 da 40?
¿Por qué número hay que multiplicar a 2 para que dé 18?
¿Cuántos grupos de 6 se arman con 60?
¿Cuánto es 45 dividido 5?
¿Cuántas veces entra 3 en 9?
¿Cuánto es 28 repartido entre 7?
¿Cuántas veces entra 4 en 32?

Los alumnos van anotando los resultados en sus cuadernos. El docente puede seleccionar unos cinco cálculos para dictar y, después, se trata de abrir un análisis con todo el grupo acerca de:

- el resultado y el modo en que lo pueden saber;
- la relación entre la formulación del cálculo y la operación.

Así, se podrá identificar cada una de las formulaciones para multiplicaciones propuestas como modos de referirse a un mismo número (uno de los factores de la multiplicación) repetido una cierta cantidad de veces (el otro de los factores). También es posible señalar el resultado de una multiplicación como producto.
Son muchas las formulaciones posibles para un cálculo de división. Analizar estas formulaciones permite retomar la relación entre la división y la búsqueda del factor que falta en una multiplicación. Por ejemplo:
"¿Qué número multiplicado por 8 da 40?" (puede relacionarse con $\ldots \times 8 = 40$, o $8 \times \ldots = 40$).
De la misma manera, la formulación "¿Cuántas veces entra 4 en 32?" puede relacionarse con el cálculo $\ldots \times 4 = 32$ y la división de 32 entre 4.
Estas sugerencias, en relación con los cálculos multiplicativos en el tercer grado del Nivel Primario, pueden complementarse con aquellas presentadas en otros documentos.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Bartolomé, O. y Fregona, D. "El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales", en Panizza, M. (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y Primer Ciclo de EGB*. Buenos Aires, Paidós, 2003.

Broitman, C. *Las operaciones en el primer ciclo. Aportes para el trabajo en el aula.* Buenos Aires, Novedades Educativas, 1999.

Broitman, C. "Análisis didáctico de los problemas involucrados en un juego de dados", en 0 a 5. *La educación en los primeros años*, N° 2, Buenos Aires, *Novedades Educativas*, 1999.

Broitman, C.; Kuperman, C. y Ponce, H. *Números en el Nivel Inicial*. Buenos Aires, Hola Chicos, 2003.

Etchemendy, M. y Zilberman, G. "Hablar y escribir en la clase de matemática: interacciones entre alumnos y maestros", capítulo VI de Broitman, C. (comp.): *Matemáticas en la escuela primaria (II). Saberes y conocimientos de niños y docentes.* Buenos Aires, Paidós, 2013.

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires *Diseño Curricular para la Escuela Primaria*. Buenos Aires, 2004.

Lerner, D., Sadovsky, P. y Wolman, S. "El sistema de numeración: un problema didáctico", en Parra y Saiz (comps.): *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Paidós, 1994.

Lerner, D. "Hacia la comprensión del valor posicional. Avances y vicisitudes en el trayecto de una investigación didáctica", en Broitman, C. (comp.): *Matemáticas en la escuela primaria (I). Números naturales y decimales con niños y adultos.* Buenos Aires, Paidós, 2013.

Panizza, M. (2003): "Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la matemática", en Panizza, M. (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y Primer Ciclo de EGB.* Buenos Aires, Paidós, 2003.

Parra, C. y Saiz. I. *Los niños, los maestros y los números. Desarrollo Curricular. Matemática 1° y 2° grado*. Dirección de Curriculum, Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires, 1992.

Parra, C. "Cálculo mental en la escuela primaria", en Parra y Saiz (comps.): *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Paidós, 1994.

Parra, C y Saiz, I. *Enseñar aritmética a los más chicos. De la exploración al dominio*. Rosario, Homo Sapiens, 2007.

Quaranta, M. E. y Tarasow, P. "Validación y producción de conocimientos sobre interpretaciones numéricas", en RELIME, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Publicación oficial del Comité Latinamericano de Matemática Educativa, 2002.

Quaranta, M. E. y Wolman, S. "Discusiones en las clases de matemática. Qué, para qué y cómo se discute", en Panizza, M. (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y Primer Ciclo de EGB*. Buenos Aires, Paidós, 2003.

Quaranta, M. E. , Tarasow, P. y Wolman, S. "Aproximaciones parciales a la complejidad del sistema de numeración: avances de un estudio acerca de las interpretaciones numéricas", en Panizza, M. (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y Primer Ciclo de EGB*. Buenos Aires, Paidós, 2003.

Quaranta, M. E. y Wolman, S. "Procedimientos numéricos de resolución de problemas aditivos y multiplicativos: relaciones entre aspectos psicológicos y didácticos", en IICE. *Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación*. Facultad de Filosofía y Letras. Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires, Miño y Dávila Editores, 2000.

Ressia de Moreno, B. *La enseñanza de contenidos numéricos en Educación Inicial*. Buenos Aires, Aique, 2013.