Para hacer 26 x 12 podemos hacer: 26 x 10 = 260
260 + 26 + 26 =
260 + 26 x 2 =
260 + 52 = 312
O:
26 X 6 = 156
156 X 2 = 312
Porque 12 es el doble de 6.

Expresiones decimales

PROGRESIONES
DE LOS APRENDIZAJES

Segundo ciclo

Matemática

Suma y resta • Multiplicación y división

Figuras geométricas

Buenos Aires Ciudad
Vamos Buenos Aires

PROGRESIONES DE LOS APRENDIZAJES

Segundo ciclo

Matemática

Buenos Aires Ciudad

Vamos Buenos Aires

Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires
04-04-2026

Progresiones de los aprendizajes : segundo ciclo : Matemática
Mercedes Etchemendy ; Paola Tarasow ; contribuciones de Fernando Bifano ... [et al.] ; coordinación general de Celina Armendáriz. - 1ª edición para el profesor - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa, 2019.
220 p. ; 29 x 21 cm. - (Progresiones de los aprendizajes / Armendáriz, Celina; . Segundo ciclo ; 2)

ISBN 978-987-549-799-3

1. Matemática. I. Bifano, Fernando, colab. II. Armendáriz, Celina, coord. III. Título.
CDD 372.7

ISBN: 978-987-549-799-3

Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa
Av. Pte. Roque Sáenz Peña 788, 8° piso
(C1035AAP) Ciudad Autónoma de Buenos Aires
(+54) 11 4320 5798 | ueicee@bue.edu.ar

Jefe de Gobierno
Horacio Rodríguez Larreta

Ministra de Educación
María Soledad Acuña

Jefe de Gabinete
Luis Bullrich

Subsecretario de Planeamiento e Innovación Educativa
Diego Javier Meiriño

Subsecretaria de Coordinación Pedagógica y Equidad Educativa
Andrea Fernanda Bruzos Bouchet

Directora Ejecutiva de la Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa
Tamara Vinacur

Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa

Coordinadora General de Evaluación Educativa
Lorena Landeo

Coordinadora del proyecto Progresiones de los aprendizajes
Celina Armendáriz (UEICEE)

Autoras
Mercedes Etchemendy
Paola Tarasow

Lectura crítica y discusión del material
Fernando Bifano (UEICEE)
Paula Inés Olivetti (DGEGP)
Héctor Ponce (GOC)
María Emilia Quaranta (GOC)
Alejandro Rossetti (EM)

Coordinadora de Comunicación
Flor Jiménez Gally

Edición y corrección
Gabriela Berajá, Irene Domínguez

Colaboración
Alejandra Lanía

Diseño gráfico
Agustín Burgos, Adriana Costantino, Magalí Vázquez

Web
Luca Fontana

Índice

Presentación

¿Qué saben y son capaces de hacer los alumnos
en un área en cierto momento de su recorrido escolar?

¿Cómo podemos ayudarlos a avanzar en su proceso
de aprendizaje apoyándonos en lo que ya saben?

¿Cómo abordar en el aula la diversidad de cada grupo, reconociendo
las diferencias en los niveles de aprendizaje, y ofrecer a distintos
alumnos las oportunidades adecuadas para que continúen aprendiendo?

¿Qué hacemos con los alumnos que están en un grado
y que requieren completar aprendizajes de años anteriores?

Estas y muchas otras preguntas similares atraviesan las progresiones para la enseñanza y el aprendizaje que aquí se presentan y han orientado el proceso de su elaboración. Se trata de interrogantes típicos para quienes nos dedicamos a la enseñanza y compartimos el desafío de fortalecer la calidad y la equidad en el acceso al conocimiento para todos los estudiantes.

El material propone una mirada sobre el aprendizaje que parte del reconocimiento de la heterogeneidad de la clase escolar como rasgo constitutivo de la realidad del aula, y se propone colaborar con el diseño de la enseñanza atendiendo a la singularidad de los avances que cada estudiante manifiesta.

¿Qué son las progresiones?

Se entiende por progresiones la descripción de recorridos posibles y pertinentes para la enseñanza y el aprendizaje de contenidos fundamentales de la trayectoria escolar. Estas descripciones se sustentan en el enfoque didáctico adoptado por el Diseño Curricular para cada área. Por lo tanto, las progresiones no representan líneas de desarrollo natural sino que reconocen un contexto escolar situado en el marco de las definiciones propias del sistema educativo en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Sin embargo, al estar basadas en evidencia de aula e investigación didáctica, son verificables y proporcionan criterios claros y compartidos para el monitoreo de los aprendizajes con una perspectiva formativa, orientada a la toma de decisiones para la enseñanza.

Las progresiones en desarrollo corresponden a las áreas de Prácticas del Lenguaje/Lengua y Literatura y Matemática, en los niveles Primario y Secundario. La definición de las áreas atiende a su carácter básico, transversal e instrumental en el recorrido formativo de la educación obligatoria. Al interior de cada área (o asignatura en el Nivel Secundario) se establecen ejes (tomados de los respectivos diseños curriculares) que permiten organizar la descripción de los aprendizajes prioritarios, con secuencia y complejidad creciente. Vale destacar que en tal sentido, no se toman todos los contenidos del currículum, sino aquellos respecto de los cuales resulta posible, a la vez que necesario, establecer algunas pautas para la evaluación formativa.

Un aspecto contemplado en la elaboración es el progreso relativamente dispar o desparejo que las trayectorias escolares ponen frecuentemente de manifiesto aun al interior de una misma área o asignatura. Los avances en un área de conocimiento no siempre son homogéneos. Un niño puede progresar más rápidamente en su dominio de las operaciones que en la exploración del espacio y los contenidos del campo de la geometría, por ejemplo. O bien, puede desplegar estrategias lectoras muy interesantes y aún requerir más apoyo en la producción de textos. Por ello las progresiones se han organizado asumiendo que un alumno puede avanzar con ritmo dispar en los diversos recorridos que se proponen según los ejes de cada área.

¿Cómo se relacionan las progresiones con el marco curricular?

Las progresiones ponen en relación los contenidos de enseñanza y objetivos establecidos en los documentos curriculares de la jurisdicción (*Diseño Curricular para la Escuela Primaria*, *Diseño Curricular. Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad de Buenos Aires*, *Metas de aprendizaje. Niveles Inicial, Primario y Secundario de las escuelas de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires* y *Objetivos de aprendizaje para las escuelas de Educación Inicial y Primaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires*) y los aprendizajes manifestados por los alumnos, considerando la heterogeneidad de los puntos de partida. En este sentido, como instrumento para la evaluación formativa, las progresiones resultan un complemento del marco curricular en el que se basan y dialogan con los materiales de desarrollo curricular que apuntan a fortalecer la intervención didáctica.

¿Para qué se pueden usar en la escuela las progresiones de aprendizaje?

El desarrollo del material busca contribuir a la tarea docente en lo que hace al proceso de observación y análisis del aprendizaje de los alumnos, relevando elementos centrales a observar en cada área curricular. Ayudan a poner en diálogo las prescripciones curriculares con la realidad de los grupos para responder, de manera oportuna y pertinente, a las necesidades heterogéneas de aprendizaje que se identifican en el aula.

A la vez, esta mirada sobre los aprendizajes permite también a maestros y profesores establecer expectativas desafiantes y viables para cada alumno, en función de las oportunidades generadas en el aula y en la escuela mediante la enseñanza. Es indudable que para la configuración de mejores trayectorias escolares resulta fundamental incorporar en la escuela estrategias de trabajo y herramientas que reconozcan los distintos ritmos de aprendizaje, así como los puntos de partida de cada alumno.

¿Cuál es la relación entre los niveles de las progresiones y los grados o años escolares?

Las progresiones se plantean por ciclo. Esta decisión fue adoptada con el propósito de alentar una mirada más amplia que el grado como horizonte de intervención, contemplar los logros de los niños en perspectiva y favorecer su uso para la definición de secuencias de trabajo específicas que se ajusten a las necesidades reales de aprendizaje.

Al mismo tiempo, permiten plasmar la idea ya expresada de que los avances no se dan de manera "pareja" u "homogénea" en relación con las diversas áreas ni ejes de una misma área. Las progresiones deben ayudar, en este sentido, a individualizar las intervenciones en el aula y romper con la expectativa de homogeneidad en la clase escolar. Este material puede asimismo alimentar aquellas experiencias de reagrupamiento de alumnos que ya existen y que son promovidas por diversas acciones, como el programa Grados de Aceleración o las instancias de promoción acompañada.

Desarrollo de las progresiones del aprendizaje

El siguiente esquema representa las progresiones de los aprendizajes a desarrollar en Prácticas del Lenguaje/Lengua y Literatura y Matemática. Comprende los niveles Primario y Secundario en una lógica de trayectoria o recorrido extenso por la escolaridad obligatoria.

Las progresiones de cada área se organizan por ejes, establecidos a partir de los respectivos diseños curriculares.

Área	Educación Primaria		Educación Secundaria
	Primer ciclo	Segundo ciclo	
Matemática	**Números y operaciones** *Sistema de numeración* *Suma y resta* *Multiplicación y división*	**Números y operaciones** *Números naturales* *Números racionales*	
	Espacio, formas y medida *Espacio* *Formas geométricas* *Medida*	**Geometría** **Medida** *Medidas de longitud, capacidad, peso y tiempo* *Perímetro, área y volumen*	
Prácticas del Lenguaje	Lectura	Lectura	
	Escritura de textos	Escritura de textos	
	Sistema de escritura	Conocimiento ortográfico	
		Reflexión sobre la lengua	

Este documento presenta las progresiones de aprendizaje en **Matemática** para el segundo ciclo de la escuela primaria.

Introducción

A continuación, se presentan las progresiones de los aprendizajes esperados para el área de **Matemática** durante el segundo ciclo. El sentido central de este documento es aportar ideas para orientar la enseñanza asumiendo la diversidad de conocimientos relativos a los contenidos matemáticos que van construyendo los alumnos en su escolaridad y el largo plazo de esos procesos. Identificar esa diversidad permite tomar decisiones sobre la enseñanza, tanto a nivel grupal como individual.

Cada grupo de contenidos se presenta en diferentes niveles de progreso. No se espera que los alumnos avancen de nivel por el paso del tiempo, el cambio de grado o cierta evolución "natural". Por el contrario, son las condiciones de enseñanza sistemática, intencional, prolongada y explícita las que permiten a los alumnos ir progresando en los niveles de apropiación de los contenidos.

Los niveles son, necesariamente, cortes arbitrarios de un proceso, por eso no se espera que los niños se ubiquen precisamente en un nivel, sino que pueden estar también en tránsito de uno a otro. La progresión está pensada para orientar la interpretación de sus conocimientos. Se espera que esta descripción sirva a la comprensión de los aprendizajes ya logrados y permita delinear recorridos posibles para la enseñanza. De ningún modo se pretende que los alumnos sean clasificados según este esquema propuesto.

Es preciso explicitar que según los ejes de contenido abordados se determina diferente cantidad de niveles y que estos no suponen correspondencia con los grados del ciclo. Un alumno puede estar en distintos niveles en relación con cada contenido y ello va a depender principalmente de la enseñanza y de las sucesivas oportunidades que ha tenido para enfrentarse a dicho contenido. Se asume que los puntos de partida de los alumnos, sus actitudes hacia la matemática, su vínculo con la escuela y el estudio, y los puntos de llegada nunca son homogéneos en un grupo escolar, lo que implica que frente a una misma secuencia de enseñanza algunos alumnos habrán alcanzado un nivel y otros, otro diferente.

Este material busca ser un punto de apoyo para la escuela y los maestros en su tarea de organizar y reorganizar las propuestas de trabajo específicas para todos los niños, con especial atención a aquellos alumnos que precisan nuevas intervenciones docentes para avanzar hacia los aprendizajes esperados. Las progresiones permiten reconocer quiénes precisan nuevas oportunidades de aprendizaje, respecto de cuáles contenidos y alentar el diseño de situaciones de trabajo que superen la ilusión de que todos los alumnos de un mismo grado aprenden lo mismo al mismo tiempo. A partir del diagnóstico del estado de conocimientos de los niños, es posible organizar agrupamientos con alumnos de diferentes grados que tienen que aprender los mismos contenidos, diseñar dispositivos de reingreso para aquellos que hayan interrumpido su trayectoria escolar, proponer instancias de aceleración para alumnos con sobreedad, pensar y explorar acciones de integración o adecuación curricular, etcétera. Se espera que estas progresiones sean herramientas que se usen en la escuela para diseñar dispositivos específicos de enseñanza asentados en aquello que "sí saben los niños", y no en "lo que les falta" o lo que "no saben".

Para la elaboración de las progresiones, se ha realizado un recorte de algunos contenidos fundamentales del diseño curricular vigente en la jurisdicción y en línea de continuidad con la producción curricular del área y de la Ciudad desde 1992. Si bien se han priorizado aquellos contenidos que suelen reconocerse como centrales, la ausencia de otros no implica de ninguna manera la intención de que no sean enseñados. Simplemente se comunican algunas prioridades frente a otras posibles.

Las progresiones para **Matemática** en el segundo ciclo se presentan organizadas en torno a los tres ejes del diseño curricular: Números y operaciones, Geometría y Medida.

- Números y operaciones
  - › Números naturales
    1. Sistema de numeración
    2. Suma y resta: resolución de diversos tipos de problemas y estrategias de cálculo
    3. Multiplicación y división entera: resolución de diversos tipos de problemas y estrategias de cálculo
    4. Divisibilidad
  - › Números racionales
    1. Fracciones
    2. Expresiones decimales
- Geometría
    1. Figuras y cuerpos geométricos
- Medida
    1. Medidas de longitud, capacidad, peso y tiempo
    2. Perímetro, área y volumen

Debe advertirse que el desarrollo de cada eje es más extenso en algunos casos que en otros. Ello se debe a que hay contenidos centrales del ciclo, que demandan varios años de trabajo y que no tienen presencia en el primer ciclo –por ejemplo, los números racionales– y, por lo tanto, requieren un tratamiento más extenso y mayor detalle en la progresión de los aprendizajes esperados. Otra aclaración a considerar es que el trabajo sobre proporcionalidad se aborda como uno de los aspectos del campo multiplicativo –tanto en el caso de los números naturales como en el caso de los números racionales– y no como un contenido independiente.

Para cada eje se proponen ejemplos de actividades posibles destinadas a relevar los aprendizajes alcanzados por los alumnos. Se trata de ejemplos de situaciones problemáticas que permiten hacer una lectura e interpretación sobre los estados de conocimiento logrados por los niños en determinado momento del proceso. Completar la lectura de estos ejemplos con el apartado “Situaciones didácticas e intervenciones docentes” puede enriquecer el diseño de situaciones de enseñanza que propicien avances en los aprendizajes.

Condiciones didácticas

Se ha mencionado que estas progresiones no implican niveles de desarrollo espontáneo ni habilidades o capacidades que evolucionan con el paso del tiempo, ni tampoco constituyen el único recorrido posible de aprendizaje. Se trata de aprendizajes escolares que solamente pueden lograrse a partir de la enseñanza sistemática y organizada. Es decir que, si la mayor parte de un grupo escolar no se encuentra en un cierto nivel esperado, esa dificultad nos habla de la enseñanza y no del "nivel" de los alumnos. En otras palabras, estos aprendizajes se producen bajo ciertas condiciones didácticas.

Entre las condiciones didácticas, resulta central el rol del docente, quien selecciona y propone secuencias de problemas similares a lo largo de varias clases. En ellas, los alumnos resuelven los problemas por sus propios medios usando diversos recursos. El maestro interactúa con los alumnos, organiza espacios para difundir y analizar estrategias de resolución y resultados obtenidos, explica, propone escrituras y formas de representación, favorece la identificación de relaciones y permanentemente ayuda a una progresiva toma de conciencia de aquello que espera que esté disponible para ser reutilizado en siguientes problemas. Al interior de una secuencia didáctica, será necesario generar momentos específicos para que algunos alumnos que han avanzado menos que sus compañeros tengan oportunidades de acercarse nuevamente a esos conocimientos.

Durante la enseñanza es importante propiciar espacios de debate e intercambio que beneficien a todos los alumnos. Para que estos espacios sean productivos, se requiere que el docente registre las conclusiones y las nuevas estrategias en carteles o en el pizarrón y los alumnos en sus cuadernos o carpetas, a fin de promover la disponibilidad de los nuevos recursos para su uso en los problemas siguientes.

En este enfoque didáctico, es central diferenciar la producción colectiva de la individual. Los alumnos, individualmente, exploran formas de resolución de cada tipo de problemas, pero es en el ámbito colectivo que se dirimen las direcciones hacia las que conducir los esfuerzos. Lo colectivo alimenta lo individual y, en siguientes clases, evocar los aprendizajes logrados y las nuevas herramientas permite que todos las recuerden y las vuelvan a usar, alentando permanentemente un ida y vuelta entre ambas aproximaciones. En las progresiones que se presentan, se parte de esta distinción y se promueve el reconocimiento de cuáles aprendizajes están en un nivel más exploratorio y grupal y de cuáles se espera que los alumnos puedan dar cuenta de manera personal y escrita.

Ahora bien, este pasaje del análisis y la resolución colectiva de cierto tipo de problemas a la resolución individual y escrita de un problema similar por parte de cada niño del grupo, no se realiza de manera directa. Nuevamente cabe destacar la importancia de las interacciones con los pares y con el docente. En ese proceso, frente a algunos alumnos que inicialmente dicen *"no sé"*, *"no puedo"*, *"no entiendo"*, *"no me sale"*, son claves algunas intervenciones tales como leerles el problema en voz alta, ayudarlos a buscar en su cuaderno o carpeta si se parece a otro problema ya resuelto, proponerles uno parecido pero con menor nivel de complejidad para luego retomar el problema original, o incluso sugerirles alguna estrategia específica (*Podés dibujar. ¿Te servirá hacer una recta numérica? Fijate si te conviene agrupar los números para sumar más rápido. Pensar cuántos cuartos entran en el entero, ¿te sirve para este problema?*, etcétera). Si bien en estos casos el alumno recibe cierta ayuda, tiene a su cargo una porción de responsabilidad. La ayuda no le resuelve el problema, sino que funciona como un aliento para atreverse a proponer una solución o una estrategia, punto de partida para seguir produciendo.

Otra consideración merece el tratamiento de los errores que aparecen en las resoluciones de los alumnos. Desde la perspectiva didáctica adoptada, esos errores también nos informan sobre qué sabe un alumno. Muchos tienen una lógica que es posible develar, una razón de ser que implica una cierta idea o teoría errónea que es preciso revisar. Algunos son muy típicos, anticipables por los docentes y producidos simultáneamente por varios alumnos y por varios grupos escolares. También hay errores menos habituales, menos estudiados, que responden a lógicas infantiles que es importante conocer. En todos los casos, cuando un error es importante, significativo, y no es una simple equivocación, merece ser analizado colectivamente para promover interacciones entre los alumnos que ayuden a todos a avanzar. Justificar por qué una solución es incorrecta, rechazar alguna idea equivocada, identificar alertas y cuidados a considerar en el tratamiento de un tipo de problemas implica, también, un progreso en los conocimientos.

Una última consideración: este documento necesita ser complementado con la lectura del documento *Progresiones de los aprendizajes. Primer ciclo. Matemática*. El hecho de que un niño curse grados del segundo ciclo, no asegura que se haya apropiado de todos los conocimientos esperados para los grados anteriores. Como ya se ha dicho, para favorecer los avances en los aprendizajes de los niños, es necesario primero conocer cuáles son los conocimientos de los que disponen para decidir las intervenciones de enseñanza. En muchas situaciones es posible que resulte necesario volver a considerar aquellos niveles de progreso planteados para el primer ciclo. Por esa razón, en el caso de contenidos que tienen también presencia en el primer ciclo, se ha agregado a la tabla una primera columna en la que se presentan aprendizajes correspondientes a los últimos niveles del primer ciclo.

¿Qué observar para recabar información sobre los aprendizajes de los alumnos?

En el trabajo cotidiano en el aula, observar el desempeño de los alumnos mientras resuelven los problemas que se les plantean y analizar el tipo de intervenciones y preguntas que hacen, los comentarios o las explicaciones que pueden dar de su trabajo, dan indicadores para conocer qué saben. Sin embargo, se hace necesario también plantear momentos específicos de trabajo individual que permitan mirar más detenidamente la producción de cada uno. Esas instancias nos permiten reconocer qué es lo que ya pueden hacer solos y realizar interpretaciones sobre cuál es el estado de sus conocimientos respecto de cierto contenido. Esta información es central para poder determinar cómo continuar la tarea de enseñanza con el grupo, y además, planificar intervenciones particulares con algunos niños que así lo necesiten. En el desarrollo del material, para cada uno de los ejes establecidos, se incluyen algunos ejemplos de problemas que podrían ser útiles a la hora de recabar información sobre el estado de conocimientos de los alumnos. Se trata de situaciones que permiten diagnosticar lo que han logrado aprender sobre algunos contenidos de enseñanza y algunas orientaciones para tomar decisiones acerca de cómo continuar el trabajo con el grupo en general y con cada uno de los alumnos en particular.

Es necesario que para el diseño de las evaluaciones se considere qué contenidos y tipos de tareas han sido objeto de enseñanza. Las actividades elegidas para evaluar deben implicar una tarea similar a las realizadas en clase. Es importante señalar que, en el trabajo en Matemática, no solo estamos poniendo a disposición de los niños contenidos del área, sino también formas de trabajo, tipos de prácticas. El sentido de los conceptos para los alumnos está dado por el tipo de prácticas que se despliegan a propósito de ese concepto matemático. Por ejemplo, si se trabajó con cálculos mentales en actividades que apuntan a que se resuelvan cálculos, no sería adecuado presentar por primera vez en una evaluación un problema en el que se deba analizar resoluciones de cálculo hechas por otros y decidir si son correctas o no, porque implica para los niños encarar una tarea muy diferente y nueva. No es lo mismo trabajar solo sobre “resolver cálculos”, que trabajar además sobre “analizar y marcar errores” o “resolver y explicar cómo se resolvió”.

Para poder hacer una interpretación de lo que sabe un niño a partir de sus producciones, es necesario solicitarle que muestre la resolución que pensó, que registre de alguna manera el procedimiento llevado a cabo para la solución de cada problema y no solo la respuesta. Solamente así se tendrá la oportunidad de analizar los procedimientos usados y detectar las cuestiones centrales sobre las que hay que seguir trabajando. En ese sentido, es necesario volver a subrayar que el desempeño de cada alumno dependerá, entre otras cuestiones, de su punto de partida y de la enseñanza sistemática que haya recibido.

En el segundo ciclo se espera una gran diversidad de aprendizajes complejos. Por ejemplo, que los niños construyan nuevos sentidos de las operaciones básicas, no solo en cuanto a la amplitud y la diversidad del campo de problemas, sino también en el abordaje de esas operaciones en otros campos numéricos. Se complejiza asimismo el tipo de tarea esperada, por ejemplo, formular propiedades para argumentar sobre la validez, utilizar escrituras matemáticas para expresar relaciones, etcétera. Es por ello que las actividades para relevar aprendizajes que se presentan toman solo algunos de estos aspectos, sin pretensión de exhaustividad.

Números y operaciones

Números naturales

1. Sistema de numeración

En el primer ciclo de la escuela primaria se privilegia la utilización de los números ante diversos problemas y en contextos significativos. A su vez, se propician las reflexiones de los alumnos que les permitirán reconocer regularidades y apoyarse en ellas para producir e interpretar, comparar y operar con números. Se inicia también el análisis del valor posicional de las cifras.

En el segundo ciclo los alumnos deben trabajar para ampliar la porción de la serie numérica para leer, escribir y ordenar números. Por otro lado, deberán avanzar sobre la conceptualización del sistema comprendiendo la organización recursiva de los agrupamientos, el rol jugado por la base y el significado de la posición de las cifras. Para avanzar en el análisis del valor posicional es necesario abordar las relaciones multiplicativas subyacentes al sistema: "'Mayores conocimientos sobre el sistema de numeración decimal' significa fundamentalmente que los alumnos sean capaces de explicitar las relaciones aritméticas subyacentes a un número (que no se reducen a la descomposición polinómica) y que sean capaces de utilizar la información contenida en la escritura decimal para desarrollar métodos de cálculo, redondeo, aproximación, encuadramiento, etcétera, que les permitan resolver problemas".[1] Un aspecto importante de ese trabajo consiste en que puedan analizar la información que brinda la escritura de un número, según el valor posicional de sus cifras, para resolver una gran variedad de situaciones tales como: resolver cálculos, anticipar el resultado de un cálculo, anticipar restos y cantidad de cifras de un cociente, etc.

El aprendizaje de la numeración en el segundo ciclo de la escuela primaria, entonces, abarca varios tipos de problemas que se ven reflejados en esta progresión: problemas referidos a leer, escribir, comparar y ordenar números, y problemas referidos al análisis del valor posicional de las cifras.

Es muy importante explicitar que la evolución en los niveles de progresión que a continuación se desarrollan podrá aparecer bajo la condición de que los alumnos hayan participado en situaciones sostenidas y sistemáticas de enseñanza para cada clase de problemas.

---

[1] GCABA, Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Dirección de Currícula y Enseñanza (2012) *Diseño Curricular para la Escuela Primaria. Segundo ciclo*. 1ª ed., 1ª reimp. Tomo 2. Buenos Aires, p. 551.

Sistema de numeración

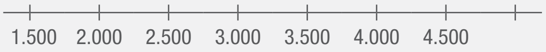
<table>
<tr><th>Primer ciclo</th><th>Nivel I</th></tr>
<tr><td>
Lee, escribe y ordena números hasta aproximadamente 10.000.

En situaciones colectivas explora las regularidades en la serie oral y la serie escrita, intercambiando ideas acerca del nombre, la escritura y la comparación de números de diversa cantidad de cifras.
</td><td>
Lee, escribe y ordena números hasta aproximadamente 1.000.000:

- Escribe números redondos o sin ceros intermedios hasta aproximadamente 1.000.000 (300.000, 350.000, 567.834, etc.).
- Escribe números que tienen ceros intermedios (20.038, 104.009, 10.010, etc.).
</td></tr>
<tr><td>
Resuelve problemas que exijan usar escalas ascendentes y descendentes de 100 en 100, 200 en 200, de 500 en 500 y de 1.000 en 1.000.

Por ejemplo:
En un bosque hay 1.200 árboles. Quieren aumentar la cantidad y cada año plantan 200 árboles. ¿Cuántos árboles se supone que habrá en los próximos 5 años?
</td><td>
Resuelve problemas que exijan usar escalas ascendentes y descendentes de 500 en 500, de 1.000 en 1.000, de 10.000 en 10.000.
</td></tr>
<tr><td></td><td>
Determina la ubicación de números en una recta numérica, en la que ya se han señalado las subdivisiones correspondientes y se dan distintas informaciones numéricas:

Por ejemplo:
Esta es una parte de una recta:

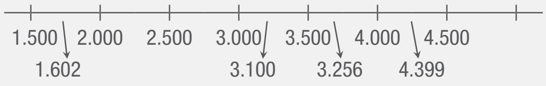


a) ¿Qué número pondrías en la última marca? ¿Cómo te das cuenta?

b) Ubicá entre qué valores están estos números:

2.700 - 3.320 - 1.675 - 3.004 - 4.158

c) Unos chicos ubicaron los números 1.602, 3.100, 3.256 y 4.399 en la recta numérica. Fijate si la ubicación de cada número es correcta o no. Si no lo es, corregila.



</td></tr>
</table>

Nivel II

Lee, escribe y ordena números sin restricciones en la cantidad de cifras.

Lee y escribe números utilizando como referente unitario los miles o los millones.

Por ejemplo:
Decidí qué número es 3 millones y medio, y explicá cómo te diste cuenta:

a) 3.000.005
b) 3.500.000
c) 35.000.000

Determina la ubicación de números en una recta numérica en la que solo se informa el intervalo entre dos números.

Por ejemplo:
En esta recta ubicá de la manera más precisa posible los siguientes números: 200.000, 600.000, 800.000, 850.000.

Construye una recta numérica para ubicar diferentes números tomando decisiones sobre la escala a utilizar.

Por ejemplo:
Elegí para cada recta, una graduación que te permita ubicar, aproximadamente, los números que se indican.

a) 100.000, 25.000, 250.000, 375.000

b) 15.000.000, 12 millones y medio, 8.000.000

Primer ciclo

Resuelve problemas que requieran reconocer y analizar el valor posicional de las cifras con números hasta 10.000.

Por ejemplo:

- ¿Cuántos paquetes de 1.000, cuántos de 100 y cuántos de 10 se pueden armar con 2.348 caramelos?
- Anotá en la calculadora 7.364. Inventá una suma que haga que cambie el 3 pero las otras cifras queden iguales.

Resuelve problemas que requieren poner en juego las relaciones entre las diferentes posiciones de una cifra (determinando que en 100 hay 10 de 10; o en 1.000 hay 10 de 100).

Por ejemplo:

- ¿Cuántas cajas de a 10 se pueden armar con 125 caramelos?
- Si no tengo billetes de $1.000, ¿cuántos billetes de $100, $10 y $1 se precisan para pagar $1.234?

Nivel I

Resuelve problemas que requieren reconocer y analizar el valor posicional de las cifras, poniendo en juego las relaciones contiguas entre ellas (10 de 100 equivalen a 1 de mil; 10 de 1.000 equivalen a 1 de 10.000, etcétera) a partir de:

- Utilizar la información contenida en las cifras para resolver problemas en el contexto de billetes, con calculadora, etc.

  Por ejemplo:
  Sol juega a un juego en el que se pagan y se cobran puntos usando billetes de $1, de $10, de $100, de $1.000, de $10.000, de $100.000. Si tiene que cobrar 3.200 puntos y solo hay billetes de $100, ¿cuántos billetes deben darle? ¿Y si tuvieran que pagarle 13.000 solo con billetes de $1.000?

- Descomponer un número aditiva y multiplicativamente de diversas maneras, apoyándose en el valor posicional de las cifras.

  Por ejemplo:
  Completá cada cálculo para transformarlo en una igualdad. El primero va de ejemplo.

  742 = 7 × 100 + 4 × 10 + 2

  1.234 = 1.000 + 2 × ...... + ... + 4

  12.349 = 10.000 + ... × 1.000 + 3 × 100 + ... + 9

Nivel II

Resuelve problemas que requieren reconocer y analizar el valor posicional de las cifras, poniendo en juego las relaciones entre diferentes posiciones de las cifras y no solamente las contiguas (100 de 100 equivalen a 10 de mil; 1.000 de 1.000 equivalen a 1 de 1.000.000, etcétera) a partir de:

- Utilizar la información contenida en las cifras para resolver problemas en el contexto de billetes, con calculadora, etc.

  Por ejemplo:
  - › Emilio juega a un tiro al blanco que tiene los siguientes puntajes: 10.000, 1.000, 100, 1 y 0.
  - › Escribí tres maneras diferentes de obtener 25.340 puntos.
- Utilizar la información contenida en las cifras de un número para reconocer resto y cociente al dividirlo por 10, por 100 y por 1.000.

  Por ejemplo:
  Sin hacer las cuentas indicadas, encontrá el cociente y el resto de cada una de las siguientes divisiones. Explicá cómo te diste cuenta.

División	Cociente	Resto
927 : 10		
6.284 : 10		
5.038 : 100		
94.806 : 10		

- Descomponer un número multiplicativamente de diversas maneras, incluyendo multiplicación por potencias de 10.
- Expresar un número en términos de unidades, decenas, centenas, unidades de mil, etcétera, considerando también sus relaciones (10 decenas forman 1 centena, etc.).

Actividades para relevar los aprendizajes

Como se señaló en la introducción, se incluyen aquí algunos ejemplos de problemas que podrían ser útiles a la hora de recabar información sobre el estado de conocimientos de los alumnos en relación con el eje Sistema de numeración. En el trabajo cotidiano en el aula, observar su desempeño mientras resuelven los problemas que se les plantean, analizar el tipo de intervenciones y preguntas que hacen y los comentarios o explicaciones que pueden dar de su trabajo, da indicadores para conocer qué saben. Sin embargo, se hace necesario también plantear momentos específicos de trabajo individual que permitan mirar más detenidamente la producción de cada uno. Las situaciones propuestas a continuación responden a este propósito.

Situación 1. Dictado de números

Un dictado de números permite recabar información sobre cuál es el estado de conocimientos de los alumnos sobre la escritura convencional de los números. Cuando la intención es evaluar lo enseñado, es necesario elegir con cuidado los números a dictar, teniendo en cuenta centralmente qué porción de la serie se ha trabajado en la enseñanza sistemática.

Es importante, según el recorte de la serie con el que se trabaja, elegir números más sencillos –que son en general los números redondos– y otros más complejos –por ejemplo, aquellos que llevan ceros intermedios–. Esto permitiría evaluar qué números el niño ya logra escribir convencionalmente, cuáles no y cuáles son los tipos de errores que produce.

Dictado de números:
7.000 - 1.400 - 25.789 - 36.040 - 10.010 - 156.008 - 300.000 - 300.045

Se puede observar si el alumno en su producción:

- Escribe bien los números de cuatro cifras, pero no los números de mayor cantidad de cifras.

- Escribe con errores los números que tienen ceros intermedios (puede ser que en los números del orden del mil escriba pensando que el punto alcanza para que un número se lea “mil”, por ejemplo: “10.10” para 10.010 o “156.8” para 156.008, etc.).

- Logra escribir correctamente números redondos, es decir, dispone del conocimiento de la escritura de los “nudos” (unidades de mil enteras, decenas de mil enteras, etc.).

- Escribe de modo aditivo apoyándose en la numeración hablada, por ejemplo: “12000400” al escribir 12.400 o “71000” al escribir 7.000 (con más o menos ceros).

Situación 2. Escribir números a partir de otro dado

Esta situación supone una opción menos compleja que el dictado de números porque ofrece un apoyo para la escritura. En la tarea de enseñanza de la escritura de números, el poder tomar información de otras escrituras para producir la nueva notación es un aspecto muy importante. Es posible que algunos alumnos, que muestren más dificultades a la hora del dictado, puedan encarar esta tarea con un mejor desempeño, siempre y cuando haya sido objeto de trabajo en el aula.

Si **diecisiete mil tres** se escribe así **17.003**, ¿cómo se escribirán estos números?

a) Diecisiete mil cinco: ....

b) Diecisiete mil once: ....

c) Dieciocho mil tres: ....

Se puede observar si el alumno en su producción:

- Intenta escribir lo pedido, sin considerar la información dada, y lo hace aditivamente (por ejemplo, para diecisiete mil cinco, escribe 170005) o coloca el 5 en una posición incorrecta (por ejemplo, 170050).

- Escribe correctamente los números correspondientes a los “diecisiete mil…” pero no escribe correctamente el dieciocho mil tres ya que implica otro tipo de relación con el número dado. Puede reconocer que los números del “diecisiete mil” empiezan igual en el nombre y por lo tanto en la escritura, pero aún no logra generalizar a otro número de los “diez miles”.

- Puede tomar la información provista por el número dado y realizar los cambios necesarios para escribir los números pedidos.

Análisis del valor posicional

Para evaluar el conocimiento de los niños sobre el valor posicional de las cifras en los números, hay que plantear problemas referidos a contextos que se hayan trabajado durante la enseñanza en el aula: contexto de dinero con billetes de $100, $10 y monedas de $1; juegos de puntajes; calculadora, etcétera. De acuerdo con lo abordado, los problemas pueden poner en juego tanto la descomposición como la composición de números. Asimismo, es importante que los números elegidos se refieran al recorte de la serie numérica que se ha trabajado.

Es necesario considerar que es diferente proponer un problema en el que sea necesario determinar el valor posicional de cada una de las cifras, que analizar las relaciones entre las diferentes posiciones. Por otro lado, no es lo mismo analizar las relaciones entre las posiciones contiguas (cuántas decenas forman una centena, cuántas centenas forman una unidad de mil, etcétera) que establecer relaciones entre cualquier posición (cuántas decenas forman una unidad de mil, etc.).

Situación 1. Descomponer un número en el contexto de un juego de puntaje

En un juego de la kermés se pueden embocar pelotitas en latas que valen 1.000 puntos, 100 puntos, 10 puntos y 1 punto. Débora jugó y obtuvo 2.143 puntos jugando con 30 pelotitas.

a) ¿Cómo habrá embocado sus pelotitas?

b) ¿Hay una sola posibilidad o más de una? Si encontrás otras posibilidades, anotalas.

A partir de las resoluciones, se puede observar si el alumno:

- Logra completar una sola posibilidad descomponiendo el número en un cálculo aditivo: 1.000 + 1.000 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1.
- Logra completar una sola posibilidad atribuyendo directamente, a cada cifra, el valor correspondiente a su posición, sin necesidad de realizar el cálculo (2 de mil, 1 de cien, 4 de diez y 3 de uno).
- Logra encontrar más de una opción, lo que da cuenta de que establece relaciones entre posiciones. Pone opciones como: 21 pelotitas de 100, 4 de 10 y 3 de 1; o 2 de 1.000, 14 de 10 y 3 de 1. Es posible que logre también encontrar esas relaciones descomponiendo correctamente, pero sin tener en cuenta la cantidad de pelotitas con las que se cuenta. Por ejemplo, pone 21 de 100 y 43 de 1.

Situación 2. Descomponer un número de diversas maneras

Completá cada cálculo para que el resultado sea 34.573.

a) 3 × …… + 4 × …… + 5 × …… + 7 × …… + 3

b) 3 × …… + …… × 100 + 73

c) …… × 100 + 73

d) …… × 10 + 3

A partir de las resoluciones, se puede observar si el alumno:

- Solo logra resolver la descomposición a), que implica reconocer el valor de cada una de las cifras sin establecer relaciones entre las distintas posiciones.
- Logra resolver también la descomposición b), que implica reconocer las relaciones entre posiciones contiguas, o sea, en este caso, la relación entre centenas y unidades de mil.
- Logra resolver también las descomposiciones c) y d), que implican establecer relaciones entre posiciones no contiguas, en este caso entre decenas de mil y centenas, y entre decenas de mil y decenas.

2. Suma y resta: resolución de diversos tipos de problemas y estrategias de cálculo

Las progresiones que aquí se presentan se han organizado en dos partes (resolución de diversos tipos de problemas y estrategias de cálculo) solo con el fin de organizar la información sobre la progresión esperable, pero son dos asuntos que están completamente relacionados en la enseñanza. Las estrategias para resolver cálculos utilizadas por los alumnos se relacionan con el tipo de problema presentado y no avanzan de manera paralela para cada tipo de situación.

Comprender y utilizar las operaciones de suma y resta es un objeto de trabajo central en el primer ciclo. En el segundo ciclo estas operaciones ya no ocupan el lugar preponderante que tuvieron en los primeros grados, motivo por el cual se ha determinado un solo nivel en este eje, pues se trata básicamente de consolidar y lograr el dominio de lo abordado en el ciclo anterior.

En cuanto a las estrategias de cálculo, en el segundo ciclo el propósito es asegurar que los niños comprendan mejor y dominen aquellas estrategias ya trabajadas –tanto de cálculo mental como las técnicas algorítmicas–. Será preciso, entonces, retomarlas para permitir mayor comprensión de su funcionamiento, en particular, en el caso del algoritmo de la resta que resulta una de las técnicas más complejas. Se aspira a que los alumnos puedan elegir y adecuar el tipo de técnica a utilizar según el problema y los números en juego y que sean capaces de realizar estimaciones cada vez más eficaces.

En el caso del trabajo con los problemas, se espera que adquieran una mejor comprensión de aquellos que, en general, resultan más complejos en el primer ciclo y necesitan mayor tiempo de trabajo: los problemas de comparación entre cantidades, los de complemento, los que requieren averiguar “cuánto se agregó o se quitó” y aquellos en los que hay que averiguar “cuánto tenía antes” de quitar o agregar.

Es muy importante explicitar nuevamente que la evolución en los niveles de progresión que a continuación se desarrollan podrá aparecer bajo la condición de que los alumnos hayan participado en situaciones sostenidas y sistemáticas de enseñanza para cada clase de problemas.

Suma y resta: resolución de diversos tipos de problemas

<table>
<tr><th>Primer ciclo</th><th>Segundo ciclo</th></tr>
<tr><td>Resuelve problemas en los que hay que averiguar el complemento entre dos cantidades, comparar dos cantidades buscando la distancia entre ellas, averiguar cuánto se quitó o se agregó a una cantidad. Utiliza estrategias de cálculo e identifica diversas escrituras matemáticas posibles.</td><td>Resuelve problemas de comparación de cantidades de complemento, identificando a la suma con incógnita o a la resta como escrituras matemáticas posibles. Pone en juego para su resolución estrategias de cálculo mental o algorítmico.
Por ejemplo:
En un negocio venden una computadora a $15.879 y en otro, la misma se vende a $13.099. ¿Cuánto más cara es la computadora en el primer negocio que en el segundo?</td></tr>
<tr><td>Resuelve problemas en los que hay que averiguar “cuánto tenía antes” de quitar o agregar usando diferentes estrategias. En situaciones de intercambio grupal se espera que los niños puedan reconocer las sumas y las restas que permiten obtener las respuestas.</td><td>Resuelve problemas en los que hay que averiguar “cuánto tenía antes” de quitar o agregar, reconociendo las sumas y las restas que permiten obtener las respuestas.
Por ejemplo:
En un quiosco se vendieron durante la mañana 255 latitas de gaseosa. A la tarde aún quedaban en la heladera 129. ¿Cuántas latitas había en la heladera al abrir el quiosco?
Resuelve problemas en los que una cantidad se modifica sucesivamente con adiciones y sustracciones y hay que establecer el total de la modificación ocurrida, independientemente de la cantidad inicial y final.
Por ejemplo:
Un tren sale con pasajeros desde Buenos Aires. En la primera estación bajan 30 personas y suben 45. En la segunda parada bajan 15 y suben 19. Después de esta segunda parada, ¿habrá más o menos pasajeros arriba del tren que cuando salió de Buenos Aires? ¿Cuántos más o cuántos menos?</td></tr>
<tr><td>Resuelve problemas de sumas y restas con dos o tres pasos (con cantidades hasta 1.000) usando cálculos mentales de sumas y restas, el algoritmo o la calculadora. En situaciones de intercambio grupal se espera que la mayor parte de los alumnos pueda reconocer que las sumas y las restas pueden resolverse en diferente orden y que el resultado que se obtiene es el mismo.
Resuelve problemas de suma y resta en los que la información se presenta en dibujos o cuadros y se debe seleccionar qué datos son necesarios para responder cada pregunta.</td><td>Resuelve problemas de sumas y restas con varios pasos, que presentan información de distintas maneras (enunciados, tablas, gráficos, etcétera), reconociendo y registrando los diferentes cálculos necesarios para su resolución.
Por ejemplo:
› Un señor compró una heladera de $9.300, un secador de pelo de $345 y una plancha a $529. Por pagar en efectivo, le descontaron $930. Cuando salió del negocio le quedaban en su billetera $125. ¿Cuánto dinero tenía cuando entró en el negocio?
› Completá los datos que faltan en esta tabla de puntajes de un juego.
<table>
<tr><th>Jugador</th><th>1ª vuelta</th><th>2ª vuelta</th><th>3ª vuelta</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>Joaquín</td><td>12.400</td><td>7.334</td><td>7.879</td><td>……</td></tr>
<tr><td>Franco</td><td>11.765</td><td>……</td><td>8.970</td><td>29.230</td></tr>
<tr><td>Felipe</td><td>9.939</td><td>12.360</td><td>……</td><td>33.590</td></tr>
</table>
a) ¿Por cuántos puntos le ganó Franco a Felipe en la 1ª vuelta?
b) ¿Quién ganó al finalizar el juego?
c) ¿Por cuántos puntos le ganó a cada uno de los otros dos jugadores?</td></tr>
</table>

Suma y resta: estrategias de cálculo

Primer ciclo	Segundo ciclo
Dispone de un conjunto de resultados memorizados o que puede recuperar u obtener con cierta facilidad: ▪ Sumas que dan 100 y 1.000. ▪ Dobles de 100, 200, 300, etc. y de 1.000, 2.000, 3.000, etc. ▪ Sumas de números redondos hasta el 1.000 (100 + 200; 300 + 500; 100 + 50, 250 + 250, etc.). ▪ Restas de cualquier número de tres cifras menos 100 y resta de cualquier número de cuatro cifras menos 1.000. ▪ Restas de números redondos de tres y de cuatro cifras (400 – 200; 5.000 – 3.000, etc.). ▪ Restas de 100 menos números redondos (100 – 4; 100 – 70, etc.). ▪ Restas de 1.000 menos números redondos de tres cifras (1.000 – 300; 1.000 – 800).	Dispone de un conjunto de resultados memorizados o que puede recuperar u obtener con cierta facilidad: ▪ Sumas que dan 1.000 y 10.000. ▪ Dobles de 1.000, 2.000, 3.000, etcétera y de 10.000, 20.000, 30.000, etc. ▪ Sumas de números redondos hasta el 100.000. ▪ Restas de cualquier número de cuatro cifras menos 1.000 y de cinco cifras menos 10.000 (4.879 – 1.000; 36.085 – 10.000). ▪ Restas de 1.000 menos números redondos de tres cifras (1.000 – 400; 1.000 – 2.000; etcétera) y restas de 10.000 menos números redondos de cuatro cifras (10.000 – 4.000). ▪ Sumas y restas de múltiplos de 25 entre sí (25 + 25; 75 + 25; 250 + 250; 125 + 75; 75 – 50; 150 – 75).
Obtiene resultados de cálculos apoyándose en resultados memorizados, en propiedades del sistema de numeración y en descomposiciones aditivas. Por ejemplo, para resolver 2.340 + 1.300, un alumno hace 2000 + 1000 + 300 + 300 + 40 o 2000 + 1000 + 340 + 300, etc.	Para resolver cálculos de sumas y restas de números que son múltiplos de 25, usa resultados disponibles de sumas o restas de otros múltiplos de 25. Por ejemplo, para resolver 1.225 + 275, tiene en cuenta que 75 + 25 = 100; para 6.150 – 75, tiene en cuenta que 150 – 75 = 75. Usa las sumas y restas de 10, 100 y 1.000 para resolver otras sumas y restas con números cercanos: 99, 900, 999, etc. Dispone de recursos de cálculo (redondeo, descomposición de números, cálculos memorizados, etcétera) que permiten averiguar uno de los sumandos, dado el otro y el resultado. Por ejemplo, completa cálculos como los siguientes: 472 + …… = 500 o 720 + …… = 1.000.

Primer ciclo	Segundo ciclo
Realiza cálculos estimativos cuyos resultados son hasta 10.000 aproximadamente. Por ejemplo, puede estimar para contestar preguntas como: ¿3.489 + 5.376 dará más o menos que 8.000? ¿Y que 10.000?	Realiza cálculos estimativos en situaciones que requieren un análisis exhaustivo de los números involucrados: Por ejemplo: Antes de hacer la cuenta, rodeá el resultado estimado. 23.000 55.150 – 32.108 = 23.200 23.500 Utiliza cálculos dados para resolver otros de suma o resta utilizando las propiedades de la suma. Por ejemplo, sabiendo que 5.134 + 6.226 = 11.360, un alumno resuelve 5.144 + 6.226 agregando 10 a 11.360. Explora en forma grupal algunas propiedades del cálculo de resta; sabiendo el resultado de una resta encuentra el resultado de otras restas que resultan de: ▪ Sumar una cierta cantidad al minuendo. ▪ Sumar una cierta cantidad al sustraendo. ▪ Sumar la misma cantidad al minuendo y al sustraendo. Por ejemplo: Sabiendo que 843 – 558 = 285, calculá los siguientes resultados y explicá cómo lo pensaste. 853 – 558 = 843 – 568 = 853 – 568 =
Resuelve sumas y restas usando algoritmos (cuentas verticales) escribiendo o no cálculos parciales intermedios y anotando o no marcas o números que indiquen agrupamientos. En el intercambio grupal se espera que puedan comparar diferentes notaciones, composiciones y descomposiciones y establecer su relación con el valor posicional.	Resuelve sumas y restas usando algoritmos con números de diversa cantidad de cifras. Decide qué estrategia de cálculo usar según el tipo de números involucrados. Por ejemplo: ¿Cuáles de estos cálculos creés que podés resolver mentalmente? ¿En cuáles puede ser útil hacer la cuenta parada? Resolvelos. 3.700 – 1.500 = 6.400 – 900 = 2.600 + 2.600 = 1.630 + 415 = 4.295 – 1.578 = 3.027 – 735 = 6.000 – 199 = 25.678 – 5.678 =

3. Multiplicación y división entera: resolución de diversos tipos de problemas y estrategias de cálculo

Las progresiones sobre estos contenidos se han organizado en dos tablas: una para la resolución de diversos tipos de problemas y otra para estrategias de cálculo.

La sección referida a la resolución de diversos tipos de problemas comprende los diferentes sentidos de cada operación. Para la multiplicación, en primer lugar, se propone retomar los problemas con los que se trabajó en el primer ciclo: situaciones de proporcionalidad (presentadas con enunciados o con tablas) y problemas que implican determinar la cantidad total de elementos ordenados en una disposición rectangular a partir de conocer la cantidad de filas y de columnas. Cobrarán ahora más presencia los problemas que exigen averiguar la cantidad de combinaciones posibles. En cuanto a la división, se retoman las situaciones de repartos y particiones y se propone profundizar el análisis de lo que sucede con el resto. Se presentan además otros problemas más complejos, en los que no hay un reparto o una partición evidentes, que amplían el sentido de la división. Finalmente se incluye el trabajo con situaciones que implican el análisis de las relaciones en la división entera: las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto.

Tanto en el trabajo con división como con multiplicación, el propósito es que los alumnos avancen en su posibilidad de reconocer y poner en juego las relaciones de proporcionalidad para resolver problemas. El avance supone que los niños puedan pasar de un uso implícito de sus propiedades a poder explicitarlas y reconocer qué situaciones implican relaciones de proporcionalidad y cuáles no. Se espera también que los niños sean capaces de resolver problemas en casos particulares de proporcionalidad como las escalas y el porcentaje. Por otro lado, la progresión que se plantea para el trabajo con la proporcionalidad en el campo de los números naturales debe ser complementada con el trabajo en el campo de los números racionales. Se espera finalmente que los niños puedan abordar problemas con varios pasos que incluyan las cuatro operaciones.

Resolver problemas supone gran complejidad para los alumnos ya que demanda la articulación de diversas capacidades. Implica construir mentalmente una representación de la situación planteada en el enunciado, reconocer una serie de datos e identificar preguntas que exigen reflexión y toma de decisiones. Para aprender a resolver problemas los alumnos deben tener oportunidades reiteradas de enfrentar diversos tipos de situaciones que requieran analizar cuáles son los datos pertinentes o necesarios, cuál es la pregunta que se plantea, si es posible encontrar una solución, más de una o si no la hay, etc.

El avance de los alumnos en las estrategias de cálculo implica continuar con el trabajo sobre el uso y memorización del repertorio multiplicativo construido en el primer ciclo. Involucra a su vez la profundización del trabajo con el cálculo mental exacto y aproximado: se espera que los alumnos pongan en juego la descomposición de cantidades usando sumas y restas y también multiplicaciones. Se avanza desde el uso "intuitivo" de relaciones y propiedades de la multiplicación y la división para resolver cálculos a su sistematización y formulación. A lo largo del segundo ciclo, se propone la construcción y el dominio de los algoritmos de multiplicación y división, avanzando en las posibilidades de analizar su funcionamiento y las propiedades implicadas en ellos. Se incluye el trabajo sobre cálculos estimativos como una herramienta fértil para anticipar resultados y controlarlos. Se espera que los niños sean capaces de discernir frente a un problema si es necesario dar una respuesta exacta o aproximada y en función de ello seleccionar la modalidad de cálculo más adecuada.

Como en el caso del trabajo con suma y resta, aquí también es necesario aclarar que la distinción entre la resolución de diversos tipos de problemas y las estrategias de cálculo se realiza solo con el fin de organizar la presentación de la información sobre la progresión esperable, pero son dos asuntos que están completamente relacionados en la enseñanza. Ambos aspectos deben abordarse de manera simultánea a la hora de programar el trabajo en el aula. Las estrategias de cálculo utilizadas por los alumnos se relacionan con el tipo de problema presentado y no avanzan de manera paralela para cada tipo de situación. Por otra parte, el trabajo con los distintos sentidos de las operaciones permite analizar y establecer diferentes relaciones entre procedimientos de cálculo posible.

Multiplicación y división entera: resolución de diversos tipos de problemas

Primer ciclo

Resuelve problemas que involucran series proporcionales y organizaciones rectangulares reconociendo la escritura multiplicativa y apelando a diversos procedimientos (uso de la tabla pitagórica,[2] sumas reiteradas, descomposición de números en sumandos y multiplicaciones parciales de cada uno de ellos, etc.).

Nivel I

Resuelve problemas que involucran relaciones de proporcionalidad directa, presentados en forma de enunciado o tablas:

- En problemas en los que se informa el valor correspondiente a la unidad, el niño usa la multiplicación (cálculo mental o algoritmo).
- En problemas en los que no se informa el valor correspondiente a la unidad, el niño pone en juego implícitamente –y según los números presentes– sus propiedades: búsqueda del valor unitario; adjudica al doble del valor de una variable, el doble del valor de la otra variable; al triple, el triple; a la mitad, la mitad; a la suma de dos valores en una variable, le adjudica la suma de los valores de la otra; etc.

En situaciones colectivas analiza la conveniencia de procedimientos posibles a utilizar según los datos del problema.

Por ejemplo:

- › Si 15 paquetes de figuritas traen 135 figuritas, ¿cuántas figuritas habrá en 30 paquetes, en 60 paquetes y en 90 paquetes?
- › Completá la siguiente tabla:

Cantidad de libros	3	5	8	9
Precio	$162	$270		

---

[2] La tabla pitagórica es un cuadro con números del 1 al 10 tanto en la primera fila como en la primera columna. En los casilleros correspondientes aparecen los productos.

[3] El porcentaje aparece aquí como uno de los últimos logros posibles dentro del extenso trabajo con las relaciones de proporcionalidad. Es importante aclarar que, dentro del trabajo con porcentaje, hay diferentes niveles de complejidad según el tipo de tarea exigida (no es lo mismo calcular el 20% de una cantidad dada que averiguar el valor que corresponde al 100% dado el valor que corresponde al 120%). Por otra parte, los contextos en los que se pone en juego, le dan o no sentido a la existencia de porcentajes mayores al 100%. Otra cuestión que es importante tener en cuenta, es que los niños puedan relacionar el porcentaje con las expresiones fraccionarias correspondientes. Por ejemplo, comprender que 25% equivale al $\frac{25}{100}$ de una cantidad. En las progresiones referidas a los números racionales se señala también este aspecto.

Nivel II	Nivel III
Resuelve problemas de proporcionalidad directa presentados en forma de enunciado o tablas en los que no se informa el valor de la unidad y explicita las propiedades de la proporcionalidad que se ponen en juego en su resolución: ▪ En problemas en los que, según los datos en juego, es necesario averiguar el valor unitario. ▪ En problemas en los que, según los datos en juego, es posible también utilizar relaciones del tipo: al doble del valor de una variable le corresponde el doble de la otra variable; a la mitad, la mitad; a la suma de dos valores de una variable le corresponde la suma de los valores de la otra; etc.	Resuelve problemas de proporcionalidad directa en los casos particulares de escalas y porcentaje, usando diferentes estrategias, según los datos en juego.[3]
Elabora tablas para organizar datos y para permitir su análisis en problemas de proporcionalidad.	
En situaciones colectivas, analiza problemas que relacionan magnitudes, determinando en cuáles es posible o no encontrar la solución y por qué (según sean o no de proporcionalidad directa). Por ejemplo: Marcá con una cruz los problemas que NO se pueden resolver. Explicá cómo te diste cuenta. a) Un equipo de fútbol hizo 5 goles en 2 partidos. ¿Cuántos goles hará en 4 partidos? b) Si para trasladar a 30 alumnos de una escuela se utilizan 3 combis con la misma cantidad de asientos que van llenas, ¿cuántas se necesitarán para trasladar a 60 alumnos? c) 7 turistas tomaron 14 fotos del barrio de La Boca en un paseo. ¿Cuántas fotos tomarán 21 turistas?	Decide si una situación en la que se relacionan dos magnitudes es o no de proporcionalidad directa y explica por qué apelando a sus propiedades. Por ejemplo: Indicá si las siguientes situaciones son de proporcionalidad directa y explicá por qué. Para las que no lo sean proponé alguna modificación en el enunciado de modo que sí resulten de proporcionalidad directa. a) Un auto que marcha siempre a la misma velocidad recorrió 180 km en dos horas. ¿Se puede saber qué distancia recorrerá en 4 horas? ¿Y en 10 horas? b) Hay muchos clientes comiendo en un bar. Tres de los clientes que ya comieron pagaron $330. ¿Se puede saber cuánto pagarán 6 comensales? ¿Y 1? ¿Y 20?

Primer ciclo	Nivel I
	Resuelve problemas que involucran organizaciones rectangulares, usando la multiplicación o la división (en cálculo mental o algorítmico). Por ejemplo: › En el patio hay 25 filas de 19 baldosas cada una. Este verano se va a ampliar y se agregarán 4 filas completas más. ¿Cuántas baldosas tendrá el patio después de la reforma? › Para el acto del 25 de Mayo hay que colocar 280 sillas en el patio de la escuela. Solo hay lugar para 56 filas. ¿Cuántas sillas habrá que colocar en cada fila?
Explora, en situaciones colectivas, problemas que implican determinar la cantidad que resulta de combinar elementos de dos colecciones distintas por medio de diversas estrategias y cálculos.	Resuelve problemas que requieren combinar elementos de dos conjuntos diferentes, usando diversos procedimientos: dibujos, diagramas, cuadros de doble entrada, cálculos. En situaciones colectivas se reconocen las escrituras multiplicativas que corresponden. Por ejemplo: Pablo quiere pintar su autito de carrera. Puede elegir uno de los siguientes colores para la base: azul, rojo, verde, naranja o negro. Para decorarlo encima puede usar pintura dorada o plateada. ¿De cuántas maneras distintas puede Pablo pintar su auto?

<table>
<tr><th>Nivel II</th><th>Nivel III</th></tr>
<tr><td>En situaciones colectivas analiza el funcionamiento de la multiplicación en problemas que involucran organizaciones rectangulares (por ejemplo, advierte que cuando se duplican ambos factores se cuadruplica el producto, o si se duplica un factor y se triplica el otro se sextuplica el producto, etc.).

Por ejemplo:
En un patio hay un sector con 10 filas de 9 baldosas cada una. Si se duplica el largo y el ancho, ¿se duplicará la cantidad de baldosas totales? Explicá cómo te diste cuenta.</td><td>Resuelve problemas que involucran organizaciones rectangulares, analizando el funcionamiento de la multiplicación y apoyándose en sus propiedades para dar explicaciones.

Por ejemplo:
En una hoja cuadriculada se dibujó un rectángulo de 24 cuadraditos de largo por 8 de ancho. Si se duplica la cantidad de cuadraditos de largo y se triplica la cantidad de cuadraditos del ancho, ¿es cierto que aumenta seis veces la cantidad de cuadraditos totales? Explicá cómo te diste cuenta.</td></tr>
<tr><td>Resuelve problemas que exigen combinar elementos de dos o tres conjuntos diferentes utilizando la multiplicación.

Por ejemplo:
En un hotel deben decidir qué menú se va a servir para una cena. En la tabla aparecen las distintas posibilidades para el primer plato, el segundo y el postre. ¿Cuántos menús distintos se pueden armar?

<table>
<tr><th>Primer plato</th><th>Segundo plato</th><th>Postre</th></tr>
<tr><td>› Sopa
› Salpicón de ave
› Ensalada rusa</td><td>› Ravioles
› Pollo con papas</td><td>› Duraznos en almíbar
› Helado
› Ensalada de frutas
› Flan</td></tr>
</table></td><td>Resuelve problemas de combinatoria que involucran combinar elementos de un mismo conjunto entre sí, utilizando procedimientos diversos.

En forma grupal se discuten los cálculos posibles para resolverlos.

Por ejemplo:
Mariela, Cecilia, Luciana y Paula van al teatro y se sientan las cuatro juntas. ¿De cuántas maneras diferentes podrían sentarse?</td></tr>
<tr><td>En forma colectiva explora la resolución de problemas de conteo de tipo recursivo, discutiendo posibles procedimientos: diagramas y cálculos que implican multiplicaciones de factores iguales.

Por ejemplo:
Un día un chico envía un mensaje a dos amigos, al día siguiente cada uno de esos dos amigos envía un mensaje a otros dos. Al tercer día cada uno de estos últimos envía un mensaje a otros dos amigos. ¿Cuántos chicos reciben el mensaje durante el tercer día?</td><td>Resuelve problemas de tipo recursivo utilizando la potenciación.</td></tr>
</table>

Primer ciclo	Nivel I
Resuelve problemas de repartos y particiones equitativos y de series proporcionales –con números de la tabla pitagórica– apoyándose en la multiplicación y reconociendo la escritura matemática del cálculo de división. Explora en forma grupal la resolución de problemas de división que demandan analizar el resto. Explora en forma grupal problemas de reparto que implican partir el resto en partes iguales apelando a mitades.	Resuelve problemas de repartos y particiones –con resto cero y distinto de cero– usando la división. Resuelve diversos problemas de división que demandan analizar el resto: ▪ En situaciones en las que la respuesta implica sumar uno al cociente. Por ejemplo: Juana quiere ordenar los CD que ya no usa más para poder guardarlos. Consiguió cajas en las que entran 15 CD. Si tiene 335, ¿cuántas cajas necesita para guardarlos todos si quiere usar la menor cantidad posible de cajas? ▪ En situaciones en las que la respuesta implica calcular la diferencia entre el resto y el divisor. Por ejemplo: Agustín colecciona muñequitos para armar equipos de fútbol de 11 jugadores. Si ya tiene 157 muñequitos: a) ¿Cuántos equipos completos puede formar? b) ¿Cuántos le faltan como mínimo para tener todos los equipos completos? ▪ En situaciones en las que la respuesta implica partir el resto en partes iguales (usando números racionales).[4] Por ejemplo: Susana reparte en partes iguales 6 chocolates entre 4 amigos. No quiere que le sobre nada. ¿Cuánto chocolate le dará a cada amigo?
	En forma colectiva, explora la resolución de situaciones contextualizadas que implican averiguar el dividendo, dados el divisor, el cociente y el resto. Por ejemplo: Juana tenía caramelos. Le dio 4 a cada una de sus 6 amigas y se quedó con 2. ¿Cuántos caramelos tenía en total?

---

[4] En el eje Números racionales se despliega el avance que se espera que los niños realicen al resolver estas situaciones de reparto con una división, vinculando los números que intervienen en esa división entera, con la fracción que expresa el resultado de ese reparto. Por ejemplo, al repartir 13 alfajores entre 4, reconocen que el resultado es la fracción $\frac{13}{4}$ o $3\frac{1}{4}$.

Nivel II	Nivel III
Resuelve problemas de división en los que el enunciado no se refiere explícitamente a situaciones de reparto, usando diversos procedimientos de cálculo. En situaciones colectivas reconoce a la división como la operación que los resuelve. Por ejemplo: Ana María tiene en el banco $7.000. Todos los días retira $250. ¿En cuántos días habrá retirado todo el dinero?	
Resuelve problemas que implican poner en juego la relación $D = d \times c + r$:[5] ▪ En situaciones contextualizadas encuentra el dividendo, dados el divisor, el cociente y el resto. Por ejemplo: Cecilia llevó caramelos a la escuela, repartió 5 a cada uno de sus 23 compañeros y le quedaron 4 para ella. ¿Cuántos caramelos llevó a la escuela? ▪ En situaciones descontextualizadas encuentra el dividendo, dados el divisor, el cociente y el resto. Por ejemplo: Escribí un número que al dividirlo por 5 dé 12 y tenga resto 2. $\begin{array}{r\|l} & 5 \\ \hline & 12 \\ 2\!/ & \end{array}$	Resuelve problemas que implican poner en juego la relación $D = d \times c + r$ y $r < d$, en situaciones en las que se dan dos de los datos de esa relación y se pregunta por los otros dos, y en las que hay una, varias, ninguna o infinitas respuestas posibles. Da argumentos para explicar sus respuestas. Por ejemplo: › Inventá una cuenta que tenga divisor 5 y cociente 9. $\begin{array}{r\|l} & 5 \\ \hline & 9 \end{array}$ › ¿Podés inventar otra? ¿Cuántas? › Inventá tres cuentas de dividir que tengan cociente 8 y resto 5. ¿Se pueden inventar más cuentas? Explicá por qué.

---

[5] Es decir, la relación entre los elementos de la división entera: el dividendo (D) es igual al producto del divisor (d) por el cociente (c) más el resto (r), teniendo en cuenta que el resto debe ser menor que el divisor.

Resuelve problemas en los que hay que averiguar varias incógnitas y la información se presenta de diferentes modos (tablas, enunciados, cuadros de doble entrada, facturas, etc.).

Por ejemplo:
Completá el detalle de la siguiente factura que corresponde a una compra en una tienda deportiva:

Cantidad	Descripción	Precio unitario	Precio total
7	Remera manga corta	$23	……
5	Short	……	$150
……	Musculosa	$18	$198
Total			$……

Nivel II	Nivel III
Resuelve problemas de varios pasos, con las cuatro operaciones, donde la información se presenta de diferentes modos: tablas, enunciados, cuadros de doble entrada, facturas, etc. Por ejemplo: La bicicleta que le gusta a Ernesto puede pagarse de estas formas: Contado: $5.400 Plan A: 12 cuotas de $485 Plan B: 18 cuotas de $332 a) ¿Cuánto más se paga en el plan A que de contado? b) ¿Cuánto más se paga en el plan B que de contado?	Resuelve problemas con mayor cantidad de pasos intermedios, con las cuatro operaciones y donde la información se presenta de diferentes modos: tablas, enunciados, cuadros de doble entrada, facturas, etc. Por ejemplo: Karina quiere comprar un auto que cuesta $148.380. En la concesionaria, le ofrecen dos formas de pago: Plan A: $28.500 al contado y el resto en 36 cuotas fijas iguales. Plan B: la mitad al contado y el resto en 12 cuotas fijas iguales. ¿Cuál es, en cada caso, el valor de la cuota?

Multiplicación y división entera: estrategias de cálculo

Primer ciclo	Nivel I
Memoriza algunos productos de la tabla pitagórica.	Memoriza los productos de la tabla pitagórica o puede reconstruirlos fácilmente a partir de otros conocidos.
Multiplica mentalmente números de una cifra por 10, por 100 y por 1.000.	Multiplica mentalmente números de una cifra por números redondos (múltiplos de 10, de 100, de 1.000 como × 20, × 300, × 500, etc.).
Resuelve cálculos mentales de multiplicación: › Usa resultados de una multiplicación disponible para resolver otra muy cercana completando el procedimiento con una suma o una resta. Por ejemplo, para resolver 7 × 8 calcula 6 × 8 y le suma 8. › Usa resultados de una multiplicación disponible para resolver multiplicaciones de números redondos. Por ejemplo, para resolver 50 × 3, se apoya en 5 × 3. En situaciones de intercambio grupal analiza y usa relaciones entre productos de la tabla pitagórica. Por ejemplo, para completar la tabla del 8, hace los dobles de la tabla del 4. En situaciones de intercambio grupal analiza diferentes cuentas para multiplicar números mayores que no están en la tabla pitagórica por una cifra, recurriendo a cálculos y escrituras intermedias.	Resuelve cálculos mentales de multiplicación de cualquier número por otro número que sea uno más o uno menos que un número redondo. Por ejemplo, cuando el docente le informa que 12 × 20 = 240, resuelve 12 × 21 sumándole 12 a 240 o resuelve 12 × 19 restándole 12 a 240. Resuelve multiplicaciones de números que no están en la tabla pitagórica por números de dos cifras apoyándose en una descomposición aditiva. Por ejemplo, para resolver 45 × 12, hace 45 × 10 + 45 × 2. Usa el resultado de la multiplicación por números redondos para hallar el producto de un número por el doble o la mitad del número redondo. Por ejemplo, cuando el docente le informa que 36 × 20 es 720, resuelve 36 × 40 haciendo el doble de 720. Calcula el doble de cualquier número. Calcula la mitad de cualquier número par. Utiliza el algoritmo de la multiplicación por una y dos cifras, anotando o no cálculos intermedios.

Nivel II	Nivel III
Resuelve cálculos mentales de multiplicación a partir de los resultados de otras multiplicaciones disponibles. Decide qué multiplicaciones sirven de apoyo y explica las razones de su elección: “porque es el doble de”, “porque es la mitad de”; “porque se le resta una vez ese número”, etc. Por ejemplo, para resolver mentalmente el cálculo 15 × 19, se apoya en que 15 por 20 es 300, y entonces para saber 15 × 19 hay que restar 15 a 300.	Identifica y usa adecuadamente las propiedades distributiva y asociativa para la resolución de cálculos de multiplicación. Por ejemplo, para decidir si los siguientes cálculos tienen o no los mismos resultados entre sí, apela a las propiedades asociativa y distributiva de la multiplicación: $400 \times 42 + 20 \times 42 + 4 \times 42 =$ $324 \times 43 - 324 =$ $324 \times 43 - 1 =$ $324 \times 21 \times 2 =$ $324 \times 40 + 2 =$ $324 \times 21 \times 21 =$

Primer ciclo	Nivel I
Realiza cálculos mentales aproximados de algunas multiplicaciones.	Realiza cálculos estimativos para decidir si el resultado de una multiplicación es mayor o menor que un número dado, a partir de redondear alguna de las cantidades. Por ejemplo, para decidir si 48 × 9 será mayor o menor que 500, se apoya en que 48 × 10 es 480.
Usa resultados memorizados, o consulta y usa resultados de la tabla pitagórica para resolver divisiones con resto 0 o con resto diferente de 0. Por ejemplo, para resolver 72 : 8, busca el 72 en la tabla del 8 estableciendo que 9 es el resultado. Para 35 : 6 reconoce que debe buscar el número más cercano a 35 en la tabla del 6 pero sin pasarse de 35 (en este caso 30) y establece que 5 es el resultado de la división.	Usa resultados memorizados de multiplicaciones o consulta y usa resultados de la tabla pitagórica para resolver cualquier cálculo de división.
Resuelve cálculos mentales de división de números redondos por dígitos. Por ejemplo, 800 : 8; 440 : 4, etc.	Realiza cálculos mentales de divisiones de números redondos de dos, tres y cuatro cifras por 10, 100 o 1.000.
	Realiza cálculos mentales de división de números mayores redondos por una y dos cifras, apoyándose en multiplicaciones. Por ejemplo: 2.000 : 2; 2.400 : 12; 3.000 : 15; 3.300 : 30.

<table>
<tr><th>Nivel II</th><th>Nivel III</th></tr>
<tr><td>Realiza cálculos estimativos para encuadrar el resultado entre dos números dados.
Por ejemplo:
Marcá con una cruz entre qué números va estar el resultado de cada cálculo, sin resolverlos. Explicá cómo te diste cuenta.
<table>
<tr><th></th><th>Menos de 1.000</th><th>Entre 1.000 y 10.000</th><th>Más de 10.000</th></tr>
<tr><td>599 × 6</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>699 × 30</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>Resuelve cálculos mentales de división descomponiendo multiplicativamente el divisor.
Por ejemplo, para resolver 852 : 12, hace 852 : 3 y luego el resultado dividido 4.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Encuentra el resto y el cociente que resultan de dividir cualquier número por 10, 100 o 1.000 utilizando la información contenida en las cifras (sin realizar efectivamente la cuenta de dividir).</td><td>Realiza cálculos mentales de división o reconoce la equivalencia entre cálculos y explicita las propiedades de la división puestas en juego.
Por ejemplo:
Determiná si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Justificá tus respuestas sin hacer cuentas.
918 : 54 = 918 : 50 : 4
918 : 54 = 918 : 9 : 6
918 : 54 = 810 : 54 + 108 : 54</td></tr>
<tr><td>Resuelve divisiones por 5, 50 y 500 apoyándose en las divisiones por 10, 100 y 1.000, y reconoce que dividir por 5 equivale al doble de dividir por 10, etc.</td><td></td></tr>
</table>

Primer ciclo	Nivel I

Primer ciclo

Explora en forma colectiva diferentes procedimientos para dividir números mayores (que no estén en la tabla pitagórica) por una cifra. Para hacerlo, se apoya en multiplicaciones por potencias de 10, otros números redondos, restas parciales, multiplicaciones y/o sumas. Por ejemplo, para resolver el cálculo 84 : 6 puede realizar los siguientes procedimientos:

- 6 × 10 = 60
  60 + 6 = 66
  66 + 6 = 72
  72 + 6 = 78
  78 + 6 = 84
- 6 × 10 = 60
  6 × 11 = 66
  6 × 12 = 72
  6 × 13 = 78
  6 × 14 = 84
- 15 × 6 = 90
  13 × 6 = 78
  14 × 6 = 84
- 6 × 10 = 60
  6 × 4 = 24

Nivel I

Resuelve divisiones de números mayores por números de una y dos cifras usando algoritmos basados en aproximaciones sucesivas por búsqueda de factores y restas reiteradas de esos productos. Por ejemplo, para 2737 : 8 hace:

```
 2.737 |8
-  800  100
 1.937  100
-  800  100
  1137   10
-  800   10
   337   10
-   80   10
   257    2
-   80  342
   177
-   80
    97
-   80
    17
-   16
     1/
```

Reconoce la conveniencia de realizar cálculos mentales o el algoritmo según los números involucrados en una multiplicación o en una división.

<table>
<tr><th>Nivel II</th><th>Nivel III</th></tr>
<tr><td>Resuelve divisiones de números mayores por números de una y dos cifras usando algoritmos basados en aproximaciones sucesivas por búsqueda de factores y restas reiteradas de esos productos, disminuyendo la cantidad de pasos intermedios. Por ejemplo, para 5.753 : 24
hace:
$\begin{array}{r|r} 5.753 & 24 \\ \cline{2-2} -\ 4.800 & 200 \\ \cline{1-1} 953 & 20 \\ -\ 480 & 10 \\ \cline{1-1} 473 & 5 \\ -\ 240 & 4 \\ \hline 233 & 239 \\ -\ 120 & \\ \cline{1-1} 113 & \\ -\ 96 & \\ \cline{1-1} 17 & \end{array}$
o hace:
$\begin{array}{r|r} 5.753 & 24 \\ \cline{2-2} -\ 4.800 & 200 \\ \cline{1-1} 953 & 30 \\ -\ 720 & 9 \\ \hline 233 & 239 \\ -\ 216 & \\ \cline{1-1} 17 & \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Anticipa la cantidad de cifras de un cociente por encuadramiento entre potencias de 10. Por ejemplo, indica si el cociente estará entre 1 y 10, 10 y 100 o 100 y 1.000.</td><td>Realiza estimaciones del cociente de una división que exigen mayor precisión.
Por ejemplo:
Señalá el número más cercano al cociente de la división 738 : 95 y explicá cómo te diste cuenta.</td></tr>
<tr><td>En situaciones colectivas explora la resolución de cálculos horizontales que ponen en juego la jerarquía entre cálculos. Por ejemplo, se analiza grupalmente la diferencia entre resolver el cálculo 95 × 8 + 27 × 93 en una calculadora común y una calculadora científica, analizando las razones por las cuales los resultados obtenidos son diferentes.</td><td>Resuelve cálculos horizontales teniendo en cuenta la jerarquía entre las operaciones implicadas.
Por ejemplo:
Uno solo de estos cálculos da como resultado 900. ¿Cuál?
99 – 9 × 4 + 6
99 – 9 × (4 + 6)
(99 – 9) × (4 + 6)
(99 – 9) × 4 + 6</td></tr>
</table>

Actividades para relevar los aprendizajes

Se incluyen aquí algunos ejemplos de problemas que permiten recabar información sobre el estado de conocimientos de los alumnos en relación con las operaciones de multiplicación y división, tanto para la resolución de diversos tipos de problemas, como respecto de la resolución de cálculos.

Como ya se señaló, observar el desempeño de los alumnos en el aula, sus preguntas e intervenciones en el trabajo colectivo permite conocer qué saben. Sin embargo, también resulta valioso planificar momentos específicos que permitan detenerse en su producción individual. En este apartado se presentan situaciones que responden a este propósito. Para instancias de evaluación corresponde seleccionar aquellas propuestas que guarden relación con el tipo de problemas y el campo numérico trabajados durante la enseñanza. Cabe considerar que hay distintos tipos de problemas que se resuelven con multiplicaciones y divisiones y su complejidad es muy variable. El tipo y el tamaño de los números involucrados son también una variable central que afecta la complejidad de las situaciones elegidas.

Es importante pedir a los alumnos que registren de alguna manera el procedimiento que llevaron a cabo para la resolución de cada problema y no solo la respuesta.

Situación 1. Problemas de proporcionalidad con datos presentados en tablas (en los que no se indica el valor de la unidad)

El completamiento de una tabla con valores proporcionales puede ser realizado correctamente a partir de diversos procedimientos. Las estrategias que un niño utilice dependerán de los datos presentes y de los conocimientos que tenga disponibles. Luego de haber trabajado con las propiedades de la proporcionalidad en el aula, es deseable que el alumno pueda ponerlas en juego a partir del análisis que hace de los valores numéricos presentes en una situación problemática. Usar el valor correspondiente a la unidad es una estrategia siempre válida en las relaciones de proporcionalidad, pero hay otras opciones que, según los datos en juego, pueden resultar más eficientes. Es necesario subrayar que los valores que se presentan (tanto aquellos dados como información, como aquellos que deben completarse) pueden variar para promover diferentes tipos de relaciones, lo que implica diferentes niveles de complejidad para los niños. Por ejemplo, podría presentarse una tabla en la que no se indique el valor unitario como en la situación que se presenta a continuación, o una tabla en que sí se lo haga; o una donde no se explicite el valor de la unidad pero se pide que el alumno lo encuentre, etcétera. La relación entre los valores numéricos presentes –por ejemplo, si son dobles o triples entre sí– es otra variable a considerar.

Completá la siguiente tabla teniendo en cuenta que en todas las bandejas se puede colocar la misma cantidad de medialunas. Explicá lo que pensaste para cada casilla.

Cantidad de bandejas	4	8	12	16	20	
Cantidad de medialunas				128		256

A partir de las resoluciones, se puede observar si el alumno:

- Logra completar la tabla buscando el valor unitario y usándolo para todos los casos.
- Usa la relación “dobles y mitades” para completar los datos en los que esto es posible. Por ejemplo, puede completar el valor correspondiente a 8 calculando la mitad de 128, luego el valor de 4 usando la mitad del valor de 8 o la cuarta parte del valor de 16 y el que le corresponde a 256, usando el doble de 16.
- Logra completar el valor correspondiente a 20, apoyándose en la suma de los valores de 12 y de 8 ya averiguados.
- Completa usando propiedades de la proporcionalidad solo en el caso del conjunto “de llegada”, pero no reconoce que 256 es el doble de 128, y para ese valor usa otro procedimiento, por ejemplo, divide a 256 por el valor unitario.

Todos los procedimientos mencionados son posibles y correctos, y resulta importante estar atento a esas diversas resoluciones. En el aula podrán aparecer algunas o todas y el intercambio sobre las que aparezcan y su justificación enriquecen el repertorio de procedimientos a los que los alumnos pueden recurrir.

Si aparecen errores en los resultados obtenidos para cada valor, es importante analizar si se trata de un error de cálculo o si es que se ha puesto en juego una relación errónea. Por ejemplo, como de 16 a 20 la variable aumenta en 4, puede ser que algún alumno a 128 le aumente 4.

Es posible que algunos niños no expliquen sus procedimientos, aunque esté expresamente pedido en la consigna. En tal caso el docente oralmente puede volver a pedir esa explicación, ya que es importante considerar los procedimientos puestos en juego y no solamente si los alumnos logran o no encontrar el resultado.

Situación 2. Problema de división que demanda analizar el resto

Agustín colecciona muñequitos para armar equipos de fútbol de 11 jugadores. Si ya tiene 405 muñequitos:

a) ¿Cuántos equipos completos puede armar?

b) ¿Cuántos muñequitos le faltan para completar un equipo más?

A partir de las resoluciones se puede observar si el alumno:

- Para la pregunta a) comprende que se trata de un problema que exige partir el 405 en grupos de a 11. Esto no implica necesariamente que lo resuelva por medio de una división, el niño puede encontrar la respuesta por alguno de estos procedimientos:
  - › Sumando o restando de a 11.
  - › Usando multiplicaciones: busca multiplicaciones que por 11 lleguen lo más próximo posible a 405. Es importante observar si hace esa búsqueda tomando valores de referencia útiles según los números en juego, por ejemplo, parte de que 11 × 10 es 110, u 11 × 20 es 220 y busca desde allí, o si empieza buscando desde números pequeños sin esa consideración.
  - › Usando cualquier algoritmo de la división. En este caso es importante observar la cantidad de pasos intermedios que necesita realizar: si inicia usando multiplicaciones por 10 o advierte que puede multiplicar directamente por 30.

  Si aparece un error en la respuesta, es importante analizar si es que el alumno no comprendió la situación planteada y elige una operación no pertinente para este problema (por ejemplo, multiplicar ambos números del enunciado) o si se trata de un error en el cálculo realizado.

- Para la pregunta b):
  - › No advierte que la respuesta implica considerar el resto y da cualquier otra respuesta, por ejemplo 11, que es el divisor, etc.
  - › Advierte que la pregunta implica considerar el resto de la división, pero no puede determinar que, en este caso en particular, se trata de considerar la diferencia entre el resto y el divisor, y da como respuesta directamente el resto (9).
  - › Advierte que la pregunta implica considerar la diferencia entre el resto y el divisor y da como respuesta 2.

Situación 3. Problema de división en el que el enunciado no se refiere explícitamente a situaciones de reparto

Resolvé la siguiente situación usando la calculadora y escribí todos los cálculos que realices.

Sebastián separó de su sueldo $1.700 pesos para los gastos de almuerzo. El menú del bar de al lado de la oficina tiene almuerzos por $85. ¿Para cuántos días le alcanza ese dinero?

A partir de las resoluciones se puede observar si el alumno:

- Comprende que se trata de un problema que exige partir el 1.700 en grupos de a 85. Esto no implica necesariamente que lo resuelva por medio de una división, sino que el niño puede encontrar la respuesta por alguno de estos procedimientos:
    - Sumando o restando de a 85, o múltiplos de 85 hasta llegar a 1.700 o a 0 según el procedimiento.
    - Usando multiplicaciones: busca multiplicaciones por 85 que lleguen a 1.700. Es importante observar si hace esa búsqueda tomando valores de referencia útiles según los números en juego, por ejemplo, parte de que 85 × 10 es 850 y a partir de allí prueba con la calculadora otras multiplicaciones. O recurre a multiplicaciones probando con números más pequeños sin esa consideración.
    - Utilizando el cálculo de división.

  Si no logra encontrar la respuesta correcta, es importante analizar si se trata de un error en el cálculo elegido o de una dificultad al interpretar los resultados obtenidos. Por ejemplo, si usa la suma o la resta tiene que considerar además, para responder, que la respuesta está en la cantidad de veces que sumó o restó el 85. Es necesario entonces que haga ese control al realizar el cálculo.

Situación 4. Estrategias de cálculo mental y propiedades de las operaciones

Transformá cada uno de estos cálculos en otro equivalente pero más sencillo de resolver, usando las propiedades de la multiplicación. Resolvelo y aclará cuál es la propiedad o las propiedades que utilizás en cada caso.

a) 102 × 98

b) (384 × 5) × 2

c) 25 × 134 × 4

A partir de las resoluciones se puede observar si el alumno:

- Resuelve los tres casos o alguno de ellos de manera correcta, aunque no logre explicitar cuál es la propiedad que pone en juego en cada caso, o lo hace de manera incorrecta.
- Resuelve de manera correcta, aunque las transformaciones numéricas que pone en juego no producen cálculos sencillos. Por ejemplo, en el punto c), advertir que 25 × 4 es 100 y que luego multiplicar 100 por 134 resulta sencillo. No es lo mismo que multiplicar primero 134 × 4 y después 536 (el resultado de 134 × 4) por 25, aunque ambas transformaciones son correctas.
- Intenta poner en juego algunas de las propiedades pero lo hace erróneamente. Por ejemplo, en el punto a) hace 102 × 100 – 2 o 98 × 100 + 2.
- Transforma correctamente los cálculos en otros equivalentes, pero produce algún error al resolverlos.
- Transforma correctamente los cálculos en otros equivalentes, los resuelve e identifica las propiedades que utiliza en cada caso.

4. Divisibilidad

El trabajo con la divisibilidad, que se inicia en el segundo ciclo, resulta una oportunidad para propiciar avances en los alumnos en relación con sus posibilidades de argumentar sobre la validez de procedimientos, resultados y afirmaciones. Permite un trabajo exploratorio potente sobre los modos de establecer la verdad en Matemática.

Al inicio, se espera que los niños resuelvan situaciones que involucren las nociones de múltiplo y divisor, múltiplo común y divisor común, usando estrategias diversas: uso de escalas, restas sucesivas, sumas sucesivas, etcétera. La intención es que a lo largo del segundo ciclo exploren e incorporen otras estrategias que ya se apoyen en cálculos multiplicativos.

Otro aspecto del trabajo a abordar en este ciclo –y que implica un avance importante respecto del primer ciclo–, se refiere a la posibilidad de descomponer multiplicativamente los números en dos o más factores. Se espera que estas descomposiciones constituyan herramientas para resolver otras situaciones y les permitan la búsqueda de divisores y múltiplos, anticipar el resultado de cálculos nuevos apoyándose en otros resultados conocidos, decidir la validez de afirmaciones y determinar restos y cocientes de cálculos sin necesidad de efectuar las divisiones.

Es posible también pensar, para este contenido, que los alumnos efectúen un avance desde la resolución de situaciones planteadas en contextos extramatemáticos que dan sentido a las nociones de múltiplo y divisor, a situaciones en contextos intramatemáticos en las que las relaciones entre los números en juego pasan a ser objeto de trabajo, enriqueciendo la conceptualización de las propiedades de la multiplicación y la división.

En el trabajo con los criterios de divisibilidad se espera que los alumnos puedan lograr aprendizajes de diverso tipo: por una parte, ensayar la construcción de alguno de los criterios a partir del análisis de los rasgos comunes entre múltiplos de un mismo número y su fundamentación; por otra parte, usar los criterios de divisibilidad para anticipar resultados sin resolver cálculos y producir argumentos acerca de la validez de ciertas afirmaciones.

Divisibilidad

Nivel I	Nivel II
Resuelve problemas que involucran el uso de múltiplos poniendo en juego estrategias diversas (escalas, sumas sucesivas, restas sucesivas, búsqueda en tablas de multiplicación, cálculo de división, etc.). Por ejemplo: Para un juego, en una pista de números que va desde el 0 al 200, se avanza con la ficha saltando siempre de la misma manera. Las fichas se colocan en el 0 y desde allí se comienza a avanzar. Escribí tres números mayores que 30 en los que caerá la ficha si se avanza saltando de a 3.	Resuelve problemas que involucran el uso de múltiplos de cualquier número, seleccionando la estrategia más conveniente según los números en juego. Por ejemplo: Escribí un número de cuatro cifras en la calculadora de modo que al restarle el número 4 todas las veces que se pueda, se obtenga 0. a) ¿Podés encontrar otros dos números posibles más? ¿Cuáles? b) ¿Cuántos números se pueden encontrar que cumplan con esa condición?
Resuelve problemas que involucran el uso de múltiplos comunes sin apelar a ningún mecanismo preestablecido y usando estrategias diversas. Por ejemplo: Juan y Ernesto están jugando a un juego con una pista numerada que empieza en el 0. Los dos mueven sus fichas hacia adelante. Juan tiene que dar saltos de 5 en 5, en cambio Ernesto los realiza de 7 en 7. ¿En qué números menores al 100 se van a encontrar?	Resuelve problemas que involucran el uso de divisores usando estrategias diversas (escalas, sumas sucesivas, restas sucesivas, tablas de multiplicación, divisiones, etc.). Por ejemplo: Un juego consiste en partir de un número de tres cifras y llegar a cero restando siempre un mismo número todas las veces que sea posible. Si el número de partida es 192, ¿cuál de los cuatro números siguientes permitirá llegar a 0? 4 3 5 10 Resuelve problemas que involucran el uso de múltiplos y divisores comunes. Por ejemplo: Se están armando bolsitas con golosinas. Se quieren llenar con 40 chupetines y 24 caramelos de modo que en todas las bolsitas haya la misma cantidad de cada tipo de golosina. ¿Cuántas bolsitas pueden armarse? ¿Hay una sola respuesta?

Nivel III

Analiza afirmaciones relativas a las nociones de múltiplo y divisor en situaciones particulares y argumenta sobre su validez, poniendo en juego implícitamente las propiedades de la multiplicación y la división. Por ejemplo, ante la situación "*si 12 es múltiplo de 3, ¿podemos saber sin hacer la cuenta si el doble de 12 es múltiplo de 3?*", el alumno puede argumentar que sí porque el 12 se puede descomponer como 3 × 4 y 3 × 4 × 2 es múltiplo de 3.

En situaciones colectivas explora el análisis de afirmaciones generales relativas a las nociones de múltiplo y divisor y argumenta sobre su validez.

Por ejemplo:
Siempre que sumo dos múltiplos de 6, ¿obtengo un múltiplo de 6? ¿Por qué? ¿Y pasa lo mismo con cualquier múltiplo?

Analiza las informaciones que provee la escritura de un cálculo de multiplicación para decidir si un número es múltiplo o divisor de otro. Pone en juego descomposiciones multiplicativas y las relaciones entre múltiplo y divisor para fundamentar.

Por ejemplo:
Sabiendo que 12 × 18 = 216, sin hacer las cuentas, respondé las siguientes preguntas y explicá cómo las pensaste.

¿216 es múltiplo de 12?
¿216 es múltiplo de 4?
¿6 es divisor de 216?

En forma colectiva analiza la información que provee la escritura de un cálculo que involucra diferentes operaciones para decidir si un número es divisor de otro.

Por ejemplo:
¿15 × 17 × 4 + 3 es o no múltiplo de 4?
¿Y de 5? ¿Y de 3?

Nivel I	Nivel II
En situaciones descontextualizadas reconoce y explica la idea de múltiplo y múltiplo común. Utiliza cualquier definición posible. Para múltiplo: “Está en la tabla de…”, “es un resultado de multiplicar por…”, “cuando lo divido por… no sobra nada”, “está en la escala del…”, “cuando cuento de… en... lo nombro”, etc. Para múltiplo común: “Está en las dos tablas”, “está en la escala de… y también en la escala del…”, etc.	En situaciones descontextualizadas reconoce y define la noción de múltiplo y múltiplo común, divisor y divisor común y las relaciones entre ellos. Utiliza cualquier definición posible: “está en la tabla de…”, “es un resultado de multiplicar por…”, “cuando lo divido por… no sobra nada”, “está en la escala del…”, “cuando cuento de… en… lo nombro porque está en la tabla”, “como este número es múltiplo de…, entonces este es su divisor”, etc. Descompone multiplicativamente un número de diversas maneras (incluyendo descomposiciones en más de dos factores). Reconoce números primos y compuestos.

Nivel III

Utiliza los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 9 y 10 para anticipar si una división tendrá resto cero o diferente de cero.

Utiliza los criterios de divisibilidad por 2, 4, 5 y 10 para calcular el resto de una división.

En situaciones colectivas, analiza y fundamenta los criterios de divisibilidad por 2, 4, 8, 5 y 10.

Actividades para relevar los aprendizajes

Se incluyen aquí algunos ejemplos de problemas que permiten recabar información sobre el estado de conocimientos de los alumnos en relación con la divisibilidad. Como se ha comentado ya anteriormente es importante atender tanto a las preguntas e intervenciones de los niños en su interacción en el aula como a su desempeño en la resolución individual de problemas.

Las situaciones que el docente seleccione para evaluar tienen que tener relación con el tipo de problemas que se haya trabajado durante la enseñanza. En el trabajo sobre este contenido cobra un rol muy relevante el aprendizaje de los modos de argumentar sobre la validez o no de afirmaciones, procedimientos o resultados. En ese sentido, resulta particularmente pertinente pedir a los niños que registren sus explicaciones.

Situación 1. Problemas que involucran el uso de múltiplos

a) Escribí un número de cuatro cifras en la calculadora de modo que al restarle el número 4 todas las veces que se pueda, se obtenga 0. Explicá cómo lo encontraste.

b) Encontrá otros dos números que cumplan con esa condición. ¿Cuántos se pueden encontrar? Explicá por qué.

A partir de las resoluciones, se puede observar si el alumno:

- Encuentra una respuesta correcta para el punto a) por alguno de estos procedimientos:
  - › Elige un número al azar y comprueba si es correcto por medio de sumas y/o restas.
  - › Elige un número al azar, pero reconoce que puede usar la multiplicación o la división para comprobar si cumple la condición señalada.
  - › Elige un número pertinente desde el inicio porque multiplica algún número por 4, o reconoce fácilmente algún múltiplo de 4 (por ejemplo, 4.000; 8.000; etcétera) y justifica apoyándose en la idea de múltiplo o divisor: “porque está en la tabla del 4”, “porque al dividir por 4 da resto 0”, “porque es múltiplo de 4”, “porque 300 × 4 da 1.200”, etc.
- En el caso del punto b) puede reconocer la posibilidad de encontrar infinitos números que cumplen esa condición, argumentando:
  - › Que se puede ir sumando de a 4 indefinidamente.
  - › Que se puede ir multiplicando a cualquier número por 4.
  - › Afirmando que hay infinitos múltiplos de 4.

Es posible también que el niño reconozca la posibilidad de encontrar muchos números con esa condición, sin establecer que se trata de infinitas opciones.

Situación 2. Problemas que implican la búsqueda de divisores

Sabiendo que 14 × 18 = 252, encontrá la mayor cantidad de divisores que puedas del número 252.

A partir de las resoluciones, se puede observar si el alumno:

- Identifica al 14 y al 18 como divisores de 252, porque reconoce que los factores de una multiplicación son divisores del producto.
- Identifica también al 252 y al 1 como divisores de 252.
- Encuentra además otros divisores a partir de descomponer multiplicativamente el 14 y el 18 y combina los factores que encuentra, o va transformando el cálculo 14 × 18 en otro usando dobles-mitades / triples-tercios (por ejemplo, usa 7 × 36, 28 × 9, etc.).
- Encuentra todos los divisores descomponiendo ambos números en sus factores primos y realiza todas las combinaciones posibles.

Puede ser que el niño encuentre divisores sin apoyarse en el cálculo de multiplicación dado, dividiendo al 252 por otros números. En este caso, da cuenta de reconocer a qué se llama divisor, pero no está pudiendo establecer la relación entre factores/producto con divisores/múltiplos.

Situación 3. Problemas que implican justificar afirmaciones

Si 42 es múltiplo de 7, ¿podemos saber sin hacer ninguna cuenta si el doble de 42 es múltiplo de 7? Explicá cómo lo pensaste.

A partir de las resoluciones, se puede observar si el alumno:

- Multiplica 42 por 2 y busca determinar si el resultado es múltiplo de 7, pero no logra producir un argumento que le permita anticipar la respuesta sin necesidad de hacer el cálculo efectivamente.

- Reconoce sin necesidad de efectuar el cálculo que el doble de 42 es necesariamente múltiplo de 7 y produce argumentos como:

  › 42 es 6×7 entonces 6×7×2 es múltiplo de 7 también (la explicación indica que el niño pone en juego implícitamente las propiedades de la multiplicación).

  › Si a un múltiplo de 7 lo multiplico por cualquier número, el resultado siempre es múltiplo de 7.

Números y operaciones

Números racionales

1. Fracciones

El estudio de las fracciones ocupa un lugar central del aprendizaje en el segundo ciclo. Si bien los alumnos tuvieron un primer acercamiento al trabajo con algunas fracciones (medios y cuartos) en el primer ciclo –a propósito del trabajo con medida–, es en esta etapa en la que entrarán en contacto sistemático con ese nuevo campo numérico. Se trata de un aprendizaje complejo, dado que en gran medida implica una ruptura con muchas certezas construidas por los niños a propósito de los números naturales.[6]

Las progresiones sobre este contenido comprenden una variedad de aspectos. Por un lado, la resolución de situaciones que pongan en juego diferentes sentidos de las fracciones: aquellas que implican repartos y medidas, situaciones en las que las fracciones expresan una constante de proporcionalidad y aquellas en las que las fracciones indican la relación entre las partes que forman un todo. Como en el caso de los números naturales, se espera que los alumnos avancen en su posibilidad de reconocer y poner en juego las relaciones de proporcionalidad para resolver problemas en los que intervienen números fraccionarios. Otro aspecto incluido en estas progresiones se refiere a las relaciones entre fracciones.

El propósito es que los niños puedan establecer equivalencias y realizar comparaciones en casos cada vez más complejos. Al mismo tiempo, es importante que construyan progresivamente un repertorio de cálculos mentales apoyado en las relaciones entre medios, cuartos y octavos, y luego entre tercios y sextos, quintos y décimos. Se espera que avancen en la construcción de diversas estrategias para realizar sumas y restas de distintas fracciones, así como también para el caso de la multiplicación y la división.

---

[6] Para ampliar esta idea se puede consultar la introducción de los documentos del Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza 2004-2007 (2005) *Matemática. Fracciones y números decimales 4º, 5º, 6º y 7º grado*. Serie Apuntes para la enseñanza. GCABA, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula.

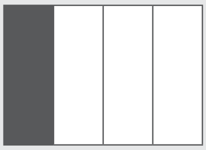
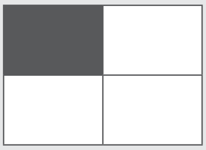
Como se señaló, son varios los aspectos que deben considerarse. Para facilitar la lectura de las progresiones definidas, se ha organizado su presentación en los siguientes bloques:

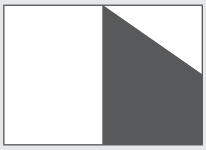
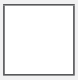
- Fracciones en el contexto de la medición.
- Fracciones en el contexto del reparto.
- Escritura, lectura y equivalencia de fracciones.
- Comparación de fracciones y representación en la recta numérica.
- Fracciones de un número natural.
- Estrategias de cálculos con fracciones.
- Fracciones en el contexto de la proporcionalidad.

Cabe recordar que la progresión en los niveles que se desarrollan a continuación podrá aparecer bajo la condición de que los alumnos hayan participado en situaciones sostenidas y sistemáticas de enseñanza para cada clase de problemas.

Fracciones

Fracciones en el contexto de la medición

Primer ciclo	Nivel I
Resuelve problemas que implican componer enteros usando medios y cuartos en el contexto de medidas de peso y/o capacidad, reconociendo la escritura fraccionaria que corresponde, sin exigencia de usar cálculos. Por ejemplo: ¿Cuántos paquetes de $\frac{1}{2}$ kilo se necesitan para comprar 2 kilos de yerba?	Resuelve problemas que impliquen establecer relaciones entre enteros, medios, cuartos y octavos, en el contexto de medidas de peso y/o capacidad en situaciones cotidianas, reconociendo las escrituras fraccionarias que corresponden.
	Resuelve problemas que implican establecer la relación que existe entre una parte y el entero, en el contexto de medidas de área y longitud. Por ejemplo: ¿En cuáles de los siguientes dibujos se pintó $\frac{1}{4}$ (la cuarta parte)? Explicá cómo lo pensaste en cada caso. Dibujo 1  Dibujo 3  Dibujo 2  Dibujo 4 
	Resuelve problemas que implican reconstruir el entero a partir de una fracción con numerador 1, en el contexto de medida de área y longitudes. Por ejemplo: Se sabe que este rectángulo representa $\frac{1}{4}$ del entero.  Dibujá el rectángulo entero. ¿Hay una sola posibilidad?

Nivel II	Nivel III
Resuelve problemas que implican establecer la relación que existe entre una parte y el entero, en los que se hace necesario fraccionar el área sombreada para reconocer qué fracción representa del entero (ya que la región sombreada no “entra” una cantidad exacta de veces en el entero). Por ejemplo: Determiná qué parte del área del rectángulo representa la región sombreada. 	
Resuelve problemas que implican reconstruir el entero a partir de fracciones con numerador distinto de 1, tanto menores como mayores al entero. Por ejemplo: En cada uno de los siguientes casos, el dibujo representa una fracción de la unidad. Dibujá la unidad.  Representa $\frac{2}{7}$ de la unidad.  Representa $\frac{6}{5}$ de la unidad.	

Fracciones en el contexto del reparto

Primer ciclo	Nivel I
Explora en forma grupal problemas de reparto que implican partir el resto en partes iguales apelando a mitades. Por ejemplo: María compró 9 manzanas para 2 chicos. Si todos comen la misma cantidad y no sobra nada, ¿cuánto le toca a cada uno?	Resuelve problemas que implican repartir el resto y usa fracciones para expresar el resultado de ese reparto, usando procedimientos diversos (dibujos, gráficos, cálculos), primero con fracciones con numerador 1; luego con fracciones con numerador diferente de 1. Por ejemplo: Una pizza se reparte entre cuatro personas en partes iguales. ¿Qué parte le toca a cada uno? ¿Y si se reparten 2 pizzas entre 4? ¿Y si fueran 3 pizzas entre 4?
	Resuelve problemas de reparto y medida reconociendo y explicitando que $\frac{1}{n}$ es aquella fracción en la que *n* partes conforman el entero. Por ejemplo, reconoce que $\frac{1}{5}$ es una cantidad tal que repetida 5 veces forma el entero.

Escritura, lectura y equivalencia de fracciones

	Reconoce el nombre y la escritura de fracciones con numerador 1 y con numerador diferente de 1.
	Reconoce que escrituras diferentes pueden referirse a una misma cantidad, en el contexto de la medida o del reparto. Por ejemplo, reconoce que: $1 + \frac{1}{4}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ y $5 \times \frac{1}{4}$ son expresiones equivalentes (sin necesidad de resolver los cálculos de forma algorítmica).

Nivel II	Nivel III
Resuelve problemas que implican repartir el resto y expresa el resultado como fracción, a partir del uso de cálculos. Por ejemplo, para repartir 35 chocolates entre 8 chicos, un alumno hace 35 : 8 y determina (sin necesidad de dibujar) que los 3 chocolates que sobran, repartidos entre 8, son $\frac{3}{8}$.	En situaciones colectivas reconoce que es posible encontrar una fracción que multiplicada por un número natural dé como resultado otro número natural, teniendo en cuenta que la fracción es un cociente entre números naturales. Por ejemplo, un alumno puede reconocer que, como 5 dividido 8 es $\frac{5}{8}$, entonces $\frac{5}{8}$ por 8 es 5.
Resuelve problemas que implican poner de relieve que la fracción es un cociente entre números naturales. Por ejemplo: Para repartir en partes iguales 67 alfajores entre 4 chicos, de modo que todos reciban la misma cantidad y no sobre nada, es útil resolver esta cuenta. $\begin{array}{r\|l} 67 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 16 \end{array}$ Escribí, mirando los datos que aparecen en la cuenta, el resultado de este reparto.	
Reconoce el nombre y la escritura de números conformados por enteros y fracciones. Por ejemplo, frente a las expresiones “tres cuartos” y “tres y un cuarto”, logra determinar que corresponden a los números $\frac{3}{4}$ y $3\frac{1}{4}$.	
Reconoce que escrituras que combinan enteros y fracciones pueden expresarse de manera diferente, incluyendo o no el signo +. Por ejemplo, reconoce que $2 + \frac{1}{2}$ es lo mismo que $2\frac{1}{2}$.	

Primer ciclo	Nivel I
	Establece la equivalencia de medios, cuartos y octavos entre sí. Por ejemplo, reconoce que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ o que $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$. Reconoce la equivalencia entre diversas fracciones que representan 1 entero, o 2 enteros, o 3 enteros, etcétera. Por ejemplo, reconoce que $\frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{7}{7}$, etcétera, pues todas son iguales a 1.

Comparación de fracciones y representación en la recta numérica

	Decide si una fracción es mayor o menor que 1 entero.
	Compara fracciones entre sí, para determinar cuál es mayor o menor, en los siguientes casos: ▪ Fracciones del mismo denominador y distinto numerador (por ejemplo $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$). ▪ Fracciones de igual numerador y distinto denominador, primero con fracciones de numerador 1 y luego con cualquier numerador, reconociendo que a mayor cantidad de partes en las que está dividido el entero, cada parte es más pequeña. ▪ Una fracción mayor que un entero y la otra menor que un entero (por ejemplo $\frac{5}{4}$ y $\frac{2}{3}$), usando el entero como referencia.

<table>
<tr><th>Nivel II</th><th>Nivel III</th></tr>
<tr><td>Reconoce y encuentra fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$, o a $\frac{1}{3}$ o a $\frac{1}{4}$ apoyándose en la relación entre numerador y denominador.
Establece la equivalencia entre tercios, sextos y doceavos; y entre quintos y décimos.
Establece la equivalencia entre distintas fracciones decimales (con denominador 10, 100 o 1.000).[7] Por ejemplo, reconoce que $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1.000}$
Encuentra fracciones decimales equivalentes a otras dadas con denominador 2, 4 y 5. Por ejemplo, reconoce que $\frac{1}{4}$ es equivalente a $\frac{25}{100}$ y que $\frac{3}{4}$ equivale a $\frac{75}{100}$.
Encuentra fracciones equivalentes a partir de multiplicar o dividir numerador y denominador por el mismo número.</td><td>Reconoce fracciones equivalentes a partir de establecer la relación entre numerador y denominador o al buscar la fracción irreducible de ambas. Por ejemplo, establece la equivalencia entre $\frac{4}{32}$ y $\frac{10}{80}$ apoyándose en que el 4 entra 8 veces en el 32 y el 10 también entra 8 veces en el 80, o porque ambas representan $\frac{1}{8}$.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Decide si una fracción es mayor o menor que $\frac{1}{2}$.
Intercala una fracción entre dos enteros dados.
Por ejemplo:
Estos números se encuentran entre 0 y 3. Ubicalos en la columna de la tabla que corresponda:
$\frac{3}{7}$ $\frac{8}{3}$ $\frac{11}{14}$ $\frac{21}{35}$ $\frac{15}{7}$ $\frac{9}{5}$ $\frac{17}{7}$ $\frac{14}{5}$ $\frac{11}{9}$ $\frac{23}{4}$
<table>
<tr><th>Entre 0 y 1</th><th>Entre 1 y 2</th><th>Entre 2 y 3</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>Intercala una fracción entre otras fracciones dadas.
Por ejemplo:
Las fracciones $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{12}{8}$ están ordenadas de menor a mayor, ¿dónde ubicarías $\frac{1}{2}$? ¿Y $1\frac{3}{8}$?
Resuelve problemas que implican considerar la densidad en el conjunto de los números fraccionarios, como por ejemplo situaciones que implican encontrar fracciones entre otras dos fracciones dadas.
Por ejemplo:
Encontrá una fracción que se ubique entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.
¿Podés encontrar otras? ¿Cuántas?</td></tr>
<tr><td>Compara fracciones entre sí, para determinar cuál es mayor o menor, cuando una fracción es mayor que la mitad y la otra menor que la mitad. Por ejemplo, compara $\frac{7}{9}$ y $\frac{3}{7}$ usando la mitad comoreferencia.
Compara fracciones buscando fracciones de igual denominador que permitan la comparación.</td><td>Compara fracciones entre sí eligiendo diferentes estrategias según las fracciones dadas.</td></tr>
</table>

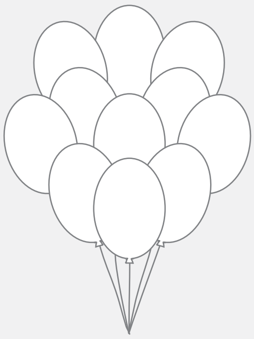
---

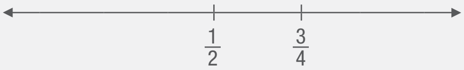
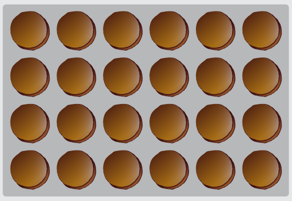
[7] El trabajo con fracciones decimales es un apoyo para el trabajo posterior con expresiones decimales.

Fracciones de un número natural

Resuelve problemas que implican encontrar una fracción de un número natural, en el caso de fracciones con numerador 1 y apoyándose en dibujos dados.

Por ejemplo:
Se sabe que $\frac{1}{4}$ de los globos son rojos. Pintá en el siguiente dibujo los que son rojos.



Nivel II	Nivel III
Determina la ubicación de números en una recta numérica, en la que se han señalado la ubicación del 0 y del 1, y luego del 0 y una fracción. Por ejemplo: Ubicá en la siguiente recta numérica los números $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$.  	Determina la ubicación de números en una recta numérica en la que se ha señalado la ubicación de dos fracciones. Por ejemplo: Ubicá el 0, el 2 y $\frac{7}{8}$ en la siguiente recta numérica.  Elige una unidad conveniente para representar sobre una recta numérica: tercios y sextos; quintos y décimos; medios y tercios; quintos y tercios; medios y quintos; cuartos y tercios, etc.
Resuelve problemas presentados sin dibujos, en los que se ponen en juego relaciones multiplicativas sencillas, que implican encontrar una fracción de un número natural en el caso de fracciones con numerador 1. Por ejemplo: $\frac{1}{5}$ de 20; $\frac{1}{6}$ de 24; $\frac{1}{9}$ de 90. En situaciones colectivas, explora recursos de cálculo para averiguar la fracción de un número natural, en el caso de fracciones de numerador distinto de 1. Por ejemplo, para calcular $\frac{3}{4}$ de 60, averigua primero la cantidad correspondiente a $\frac{1}{4}$.	Resuelve problemas que implican encontrar la cantidad correspondiente a una fracción de un número natural, dado el entero y usando diversas estrategias. Por ejemplo: ¿Cuánto es $\frac{5}{7}$ de 49? Explicá cómo te diste cuenta.
Resuelve problemas que implican encontrar el entero dada la cantidad correspondiente a una fracción de ese entero, apoyándose en gráficos o dibujos disponibles, primero en el caso de fracciones con numerador 1 y luego con fracciones de numerador distinto de 1. Por ejemplo: Una panadería recibió una bandeja con alfajorcitos de dulce de leche para vender. Si en este dibujo está representado $\frac{1}{3}$ de los alfajorcitos, ¿cuántos alfajorcitos en total traía la bandeja? 	Resuelve problemas que implican encontrar el entero, dada la cantidad correspondiente a una fracción de ese entero, usando diversas estrategias. Por ejemplo: Si $\frac{3}{4}$ de los alumnos de 7º grado son 15, ¿cuántos alumnos tiene el grado?

Estrategias de cálculo con fracciones

Primer ciclo	Nivel I
	Resuelve cálculos que implican determinar la fracción que es necesario sumar o restar a otra para obtener 1 entero, apoyándose en procedimientos diversos. Por ejemplo, para completar la suma $\frac{3}{5} + \ldots = 1$, se apoya en que 5 de $\frac{1}{5}$ forman el entero, o en que $\frac{5}{5} = 1$.
	Suma y resta medios, cuartos y octavos entre sí, utilizando diversos procedimientos (y sin utilizar algoritmos).
	Dispone de un repertorio de cálculos memorizados o fácilmente disponibles para sumar y restar enteros, medios, cuartos y octavos. Por ejemplo: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
	A partir de situaciones que implican medidas y repartos, determina los dobles y mitades de medios, cuartos y octavos, usando diversos procedimientos y sin apelar a algoritmos. Por ejemplo: Juan y Andrés se repartieron $\frac{1}{2}$ kg de helado entre los dos en partes iguales. ¿Cuánto helado le tocó a cada uno?

Nivel II	Nivel III
Resuelve cálculos que implican determinar la fracción que es necesario sumar o restar a otra para obtener 2, 3 o 4 enteros, apoyándose en procedimientos diversos. Por ejemplo, para completar la suma $\frac{4}{7} + \ldots = 3$, se apoya en que 3 enteros son $\frac{21}{7}$ y busca la diferencia con $\frac{4}{7}$; o llega primero a 1 entero, agregando $\frac{3}{7}$ y luego completa con $\frac{14}{7}$ que corresponden a 2 enteros; etc.	
Suma y resta quintos y décimos; tercios y sextos entre sí, utilizando diversos procedimientos (y sin apelar a algoritmos). En forma colectiva, explora procedimientos para sumar y restar fracciones de distintos denominadores por medio de la búsqueda de fracciones equivalentes. Estima el resultado de cálculos de suma y resta de fracciones. Por ejemplo: Indicá y justificá sin calcular el resultado, si es cierto que: a) $5 + 1\frac{3}{4}$ es mayor que 7. b) $9 - \frac{1}{4}$ es menor que 8.	Suma y resta fracciones con cualquier denominador usando fracciones equivalentes.
Dispone de un repertorio de cálculos memorizados o fácilmente disponibles para sumar y restar tercios y sextos; quintos y décimos. Por ejemplo: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$ $\quad 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ Dispone de un repertorio de cálculos memorizados o fácilmente disponibles para sumar y restar fracciones decimales entre sí. Por ejemplo: $\frac{1}{10} + \frac{2}{100} =$ $\quad \frac{1}{100} + \frac{1}{1.000} =$ $\quad \frac{1}{10} - \frac{1}{100} =$	
Calcula el doble y la mitad de tercios, sextos, quintos y décimos, usando diversos procedimientos y sin apelar a algoritmos. Por ejemplo, reconoce que $\frac{1}{6}$ es la mitad de $\frac{1}{3}$ porque 2 de $\frac{1}{6}$ forman $\frac{1}{3}$, o porque “si parto a los tercios por la mitad, entran 6 en el entero”. Expresa el cálculo de mitades de fracciones de diversas maneras. Por ejemplo, puede escribir la mitad de $\frac{1}{3}$ como $\frac{1}{3} : 2$ o $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$.	Calcula la mitad de cualquier fracción (sin recurrir a algoritmos), en los casos en que es necesario duplicar el denominador manteniendo el mismo numerador. Por ejemplo, identifica a $\frac{3}{10}$ como la mitad de $\frac{3}{5}$.

Primer ciclo	Nivel I

Nivel II	Nivel III
Multiplica un entero por una fracción en problemas de proporcionalidad directa, cálculo del área de un rectángulo y cálculos descontextualizados.	Multiplica fracciones entre sí en problemas de proporcionalidad directa, cálculo del área de un rectángulo y cálculos descontextualizados.
Resuelve cálculos de multiplicación con incógnita en uno de los factores, en los que se multiplica una fracción por un número natural para obtener 1 o cualquier entero. Por ejemplo: Completá los siguientes cálculos. $\frac{1}{4} \times \ldots\ldots = 1$ $3 \times \ldots\ldots = 1$ $\frac{1}{3} \times \ldots\ldots = 4$	Resuelve cálculos en los que se multiplican fracciones cuyo producto es 1, reconociendo que se trata de encontrar la fracción inversa. Por ejemplo: $\frac{2}{5} \times \ldots\ldots = 1$ $\frac{3}{8} \times \ldots\ldots = 1$
Divide una fracción por un número entero, con fracciones con numerador 1 o fracciones cuyo numerador es múltiplo del divisor, usando procedimientos diversos y sin apelar al algoritmo. Por ejemplo: Resolvé estos cálculos y explicá cómo los pensaste. $\frac{1}{5} : 3 =$ $\frac{12}{7} : 4 =$	Divide cualquier fracción por un número entero usando procedimientos diversos y sin apelar al algoritmo. Divide fracciones entre sí en el contexto de la medida y la proporcionalidad.

Primer ciclo	Nivel I

Fracciones en el contexto de la proporcionalidad

Nivel II	Nivel III

Resuelve problemas de proporcionalidad directa en los cuales la constante es una fracción. Primero lo hace con medios, cuartos y octavos, y luego con otras fracciones, dado el valor de la unidad o cuando su valor sea fácilmente calculable.

Por ejemplo:
Para preparar una receta se utiliza $\frac{1}{4}$ kg de azúcar por cada porción.

Completá la siguiente tabla con las cantidades necesarias, según la cantidad de porciones que se desee preparar.

Porciones	1	2	4	$\frac{1}{2}$	8
Azúcar (en kg)	$\frac{1}{4}$				

Resuelve problemas de proporcionalidad directa en los cuales la constante o los valores de las variables están expresados en fracciones.

Por ejemplo:
Para preparar dulces se usan $\frac{2}{3}$ kg de frutillas cada $\frac{1}{4}$ kg de duraznos. Completá la tabla:

Frutillas (en kg)	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	$1\frac{1}{3}$	$\frac{21}{6}$
Duraznos (en kg)		$\frac{1}{4}$			

Resuelve problemas de proporcionalidad directa en situaciones que implican usar fracciones para expresar la relación entre partes.

Por ejemplo:
Para preparar un jugo de naranja se necesitan dos vasos de agua por cada sobre de jugo en polvo. Si se desea mantener el mismo sabor, ¿cuántos vasos de agua serán necesarios para usar 3 sobres de polvo? Y para 7 vasos de agua, ¿cuántos sobres de polvo serán necesarios?

Compara constantes de proporcionalidad en situaciones que implican la relación entre partes y la comparación de razones.

Por ejemplo:
En 6º A, por cada 6 varones hay 9 mujeres. En 6º B, por cada 4 varones hay 5 mujeres. ¿En qué grado es mayor la proporción de mujeres?

Establece relaciones entre porcentajes, números fraccionarios y proporciones. Por ejemplo, para calcular el 15% de 240, hace $\frac{15}{100} \times 240$.

Actividades para relevar los aprendizajes

Se incluyen aquí algunos ejemplos de problemas que permiten recabar información sobre el estado de conocimientos de los alumnos en relación con las fracciones. Como ya se ha indicado, es importante considerar que las situaciones elegidas para evaluar tengan relación con el tipo de problemas y las fracciones trabajadas. No es lo mismo proponer situaciones con fracciones con numerador 1 que con cualquier numerador; problemas que relacionen fracciones con denominador 2, 4 y 8 que con cualquier otro denominador, etc.

Son varios los aspectos de estos contenidos que es importante considerar a lo largo del segundo ciclo. A continuación, se presentan ejemplos de situaciones posibles que retoman algunos aspectos de todos los que el trabajo en el ciclo incluye. Varias actividades contienen diversas consignas para resolver. En general, cada una de ellas implica diferente complejidad. La elección de cuáles podrían servir para relevar los aprendizajes de un grupo particular de alumnos tiene que guardar relación con lo que efectivamente fue trabajado y con lo que se considera central.

Es importante pedir a los alumnos que registren de alguna manera el procedimiento que llevaron a cabo para la resolución de cada problema y no solo la respuesta.

Situación 1. Usar fracciones para expresar el resultado de un reparto

a) Se necesita repartir un chocolate entre 5 nenes, de modo que a todos les toque la misma cantidad y no sobre nada. ¿Qué cantidad de chocolate le corresponde a cada uno?

b) Se necesita repartir 15 chocolates entre 4 personas, de modo que a todas les toque la misma cantidad y no sobre nada. ¿Qué cantidad de chocolate le corresponde a cada una?

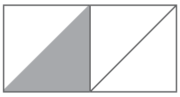
A partir de las resoluciones, se puede observar si el alumno:

- Resuelve correctamente solo el problema a), que pone en juego una fracción con numerador 1, usando alguno de estos procedimientos:
  - › Dibuja el chocolate y lo parte en 5, sin expresar el resultado de ese reparto con una fracción. Por ejemplo, escribe: “Cada uno recibe un pedacito”.
  - › Dibuja el chocolate, lo parte en 5 y expresa el resultado como la fracción $\frac{1}{5}$.
  - › Reconoce que el resultado de ese reparto es $\frac{1}{5}$ sin realizar el dibujo.
- Resuelve también el problema b) usando alguno de estos procedimientos:
  - › Dibuja los chocolates y efectúa los repartos de alguna manera, sin expresar el resultado con una fracción. Por ejemplo, escribe: “Cada uno recibe 3 chocolates y un pedacito más”.
  - › Dibuja los chocolates, efectúa los repartos de alguna manera y expresa los resultados usando fracciones. Por ejemplo, escribe: “Cada uno recibe 3 y $\frac{3}{4}$, o $\frac{15}{4}$, 3 y $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$,” etc.
  - › Determina por algún cálculo que sobran 3 chocolates y expresa el reparto de ese resto como $\frac{3}{4}$, sin necesidad de hacerlo efectivamente con un dibujo.

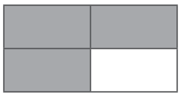
Situación 2. Determinar la relación entre una parte y el entero

Ejemplo:
Indicá qué fracción representa en cada caso la parte sombreada:

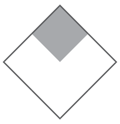
a)



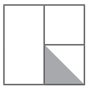
b)



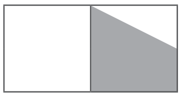
c)



d)



e)



Se puede observar si el alumno logra resolver los cinco ítems o solo alguno/s de ellos. Cada uno de los dibujos presentados permite poner en juego relaciones diferentes:

- En el caso del ítem a), las líneas interiores de la figura facilitan determinar que la parte sombreada es $\frac{1}{4}$ del rectángulo.
- En el caso del ítem b), la complejidad es mayor porque, si bien las líneas interiores también están dibujadas, no se trata de una fracción con numerador 1, que resulta más fácilmente identificable. El niño puede expresar el resultado correctamente como $\frac{3}{4}$ o como “3 de $\frac{1}{4}$”.
- En el caso de los ítems c) y d), los alumnos deben considerar cuántas veces “entra” la parte sombreada en el dibujo ya que en uno de ellos no hay ninguna línea divisoria, y en el otro, si bien las hay, no alcanzan para determinar directamente que se trata de $\frac{1}{8}$. Es posible que algunos alumnos necesiten construir sobre el dibujo líneas auxiliares que faciliten la resolución. En el caso del ítem d) puede suceder que responda erróneamente que se trata de $\frac{1}{4}$ ya que se pueden ver 4 divisiones del entero.
- En el caso del ítem e), se trata de una situación de aun mayor complejidad ya que se hace necesario de alguna manera fraccionar el área sombreada, porque esa región no “entra” una cantidad de veces exacta en la unidad.

Situación 3. Comparación de fracciones

Marcá en cada caso la fracción mayor. Explicá cómo te diste cuenta.

a) $\frac{5}{3}$ y $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{8}$ c) $\frac{7}{10}$ y $\frac{7}{9}$ d) $\frac{5}{10}$ y $\frac{4}{12}$

Cada uno de los pares de fracciones presentados permite poner en juego relaciones diferentes. Por eso, resulta particularmente importante analizar la explicación que el niño pueda dar para interpretar cuáles de esas relaciones está poniendo en juego.

- En los casos del ítem a), se trata de una fracción que es mayor que el entero y otra que no lo es. Es posible que un niño al ver que se trata de “los mismos números” no pueda responder o señale que se trata de fracciones iguales.

- En el caso de los ítems b) y c), son fracciones que tienen igual numerador pero distinto denominador. Permiten poner en juego la idea de que “a mayor cantidad de partes de un mismo entero, cada parte resulta más pequeña”. El hecho de que el denominador mayor indique en realidad una fracción menor es complejo para los niños. Es posible por ello que algún alumno considere erróneamente que $\frac{1}{8}$ y $\frac{7}{10}$ son mayores que $\frac{1}{5}$ y que $\frac{7}{9}$. Hay que señalar también que si bien en ambos casos la relación en juego es similar, no representa la misma complejidad el caso de la fracción con numerador 1 que con otro numerador. Para los niños resulta más sencillo realizar comparaciones con numerador igual a 1.

- En el caso del ítem d), se trata de una fracción que es mayor que la mitad y otra que es menor. Esta relación requiere tener muy disponible el reconocimiento de fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$.

En todos los casos se puede observar entonces si el niño pone en juego alguna de estas relaciones o, si para resolver, necesita apoyarse en dibujos. De ser así es importante analizar qué tipo de dibujos realiza: para poder comparar pares de fracciones es necesario mantener el mismo entero. En algunos de los casos esto puede resultar complejo. Otra estrategia posible para resolver las situaciones planteadas consiste en la búsqueda de fracciones equivalentes.

Situación 4. Equivalencia entre fracciones

Indicá para cada par de fracciones si son o no equivalentes. Contá cómo lo pensaste o cómo te diste cuenta.

a) $2\frac{1}{4}$ y $\frac{18}{8}$ b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{12}$ c) $\frac{9}{3}$ y $\frac{36}{15}$ d) $\frac{2}{8}$ y $\frac{5}{20}$ e) $\frac{4}{32}$ y $\frac{10}{80}$

Al igual que en el ejemplo anterior, cada uno de los pares de fracciones presentados permite poner en juego relaciones diferentes. Resulta entonces particularmente importante analizar la explicación que el niño pueda dar, de manera de interpretar cuáles de esas relaciones son las que tuvo en cuenta.

- En el caso del ítem a), se pone en juego la relación entre cuartos y octavos mientras que en el ítem b), entre tercios y doceavos, lo cual resulta más complejo.

- En el caso del ítem c), la relación involucrada se establece entre tercios y quinceavos. Es una relación que implica reconocer que si el denominador es multiplicado por 5, el numerador debería ser multiplicado por ese mismo número para mantener la equivalencia. También puede analizarse la relación entre numeradores: si 9 fue multiplicado por 4 para llegar a 36, para que las fracciones sean equivalentes, al 3 se lo debería multiplicar también por 4. Otra posibilidad es considerar que, siendo ambas fracciones mayores que el entero, es posible determinar que no son equivalentes pues $\frac{9}{3}$ son 3 enteros y $\frac{36}{15}$ no llega a ser 3 enteros.

- En los casos de los ítems d) y e), ambas situaciones implican mayor complejidad pues no es posible encontrar un número natural que vincule multiplicativamente los numeradores ni los denominadores. Por lo tanto, se hace necesario apelar a otras estrategias para determinar si son o no fracciones equivalentes: encontrar una fracción equivalente a ambas ($\frac{1}{4}$ en un caso y $\frac{1}{8}$ en el otro) o considerar la relación entre numerador y denominador en cada una. En el caso d), ambos numeradores entran cuatro veces en su correspondiente denominador, en tanto que en el caso e), ambos numeradores entran ocho veces en sus denominadores.

Situación 5. Resolver cálculos con fracciones de denominador 2, 4 y 8

Jorge compró en el mercado 1 y $\frac{1}{2}$ kg de pan, $\frac{3}{4}$ kg de manzanas y 2 paquetes de $\frac{1}{2}$ kg de yerba. Puso todo en una bolsa para llevar hasta su casa. ¿Cuánto pesa la bolsa?

Acordate que, además de la respuesta, es importante que escribas cómo pensaste el problema.

A partir de las resoluciones, se puede observar si el alumno:

- Comprende que es un problema donde debe reunir las tres cantidades, pero produce errores al realizar la suma:
  - › Resuelve la suma de la cantidad de pan y la cantidad de yerba reconociendo los 2 y $\frac{1}{2}$ kg, pues reconoce que $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ forman 1 kg, pero produce errores al sumar los $\frac{3}{4}$ de manzanas (por ejemplo, resuelve $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$ como $\frac{4}{6}$, pues suma numeradores y denominadores entre sí).
  - › Escribe que 2 paquetes de $\frac{1}{2}$ forman $\frac{2}{4}$ dado que suma numeradores y denominadores entre sí, sin apoyarse en la relación entre medios y enteros.
- Resuelve correctamente la suma de las tres cantidades por diversos procedimientos:
  - › Se apoya en la equivalencia entre cuartos, medios y enteros.
  - › Usa el algoritmo de la suma de fracciones.

En todas las resoluciones se puede observar si produce escrituras aritméticas o dibujos para representar la resolución de la situación.

Situación 6. Dobles y mitades de fracciones

Completá la siguiente tabla escribiendo los dobles y las mitades de cada una de las siguientes fracciones.

Fracción	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{6}$
Mitad							
Doble							

Cada una de las fracciones presentadas permite poner en juego relaciones diferentes. Incluir todas ellas, o solo alguna, dependerá de lo trabajado en clase.

En general para los niños resulta más sencillo encontrar el doble de una fracción que su mitad, porque existe una estrategia pertinente en todos los casos, cualesquiera sean los números en juego: solo se trata de sumar dos veces la misma fracción, o multiplicar por dos el numerador. También podrían apoyarse en relaciones conocidas entre medios, cuartos y octavos ("dos cuartos forman un medio", "dos octavos un cuarto"); entre quintos y décimos, etcétera. Un error posible en el cálculo de los dobles es duplicar tanto numerador como denominador, sin advertir que resulta en definitiva una fracción equivalente a la primera.

A diferencia de lo que ocurre con el cálculo de los dobles, el tipo de fracciones involucradas es una variable muy importante para calcular las mitades. En el caso de $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ se trata de relaciones más sencillas y, para establecerlas, el niño se puede apoyar en las primeras equivalencias que se trabajan en la enseñanza. De todos modos implican reconocer un funcionamiento diferente entre los números naturales y los racionales: 8 es el doble de 4 pero $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$.

En el caso de $\frac{3}{4}$, es también un tipo de fracción que aparece pronto en la enseñanza, pero, a diferencia de las anteriores, ya no se trata de una fracción con numerador 1. Tiene además un numerador impar, lo que constituye una dificultad importante a la hora de encontrar la mitad de la fracción porque no se puede considerar la mitad del numerador. Es necesario apoyarse en que si $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$, entonces $\frac{3}{8}$ lo será de $\frac{3}{4}$.

De modo semejante, para establecer la mitad de las dos fracciones con denominador 5 es necesario poner en juego la relación entre quintos y décimos.

En el caso de la fracción $\frac{2}{6}$, al tener un numerador par, puede resultar más sencillo encontrar la mitad. Con la última fracción, al tratarse de un numerador impar, se necesita poner en juego la relación entre los sextos y los doceavos.

Situación 7. Fracciones en el contexto de la proporcionalidad

El completamiento de una tabla con valores proporcionales que incluye fracciones puede ser realizado correctamente a partir de diversos procedimientos. Las estrategias a las que un niño recurre dependerán de los datos presentes y de los conocimientos que tenga disponibles. Luego de haber trabajado durante la enseñanza con las propiedades de la proporcionalidad es deseable que el alumno pueda ponerlas en juego, a partir del análisis que hace de los valores numéricos presentes, eso exige tener disponibles relaciones entre fracciones (dobles, mitades, etcétera). Usar el valor correspondiente a la unidad es una estrategia siempre válida en las relaciones de proporcionalidad, pero hay otras opciones que, según los datos, pueden resultar más eficientes. Es necesario subrayar que los valores que se presentan (tanto aquellos dados como información, como aquellos que deben completarse) pueden variar para promover diferentes tipos de relaciones y, por lo tanto, esto implica diferentes niveles de complejidad para los niños.

a) La receta de un postre que rinde para 4 porciones lleva $\frac{4}{5}$ kg de azúcar. Completá esta tabla.

Porciones	4	8	12			1	
Azúcar (en kg)	$\frac{4}{5}$			$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{20}$		1

b) Para realizar otra receta, por cada $\frac{1}{2}$ kg de fruta, hace falta $\frac{1}{8}$ kg de azúcar. Completá la tabla para poder saber qué cantidad de cada ingrediente es necesaria, según el caso.

Cantidad de fruta (en kg)		$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{9}{4}$
Cantidad de azúcar (en kg)	$\frac{1}{16}$			$\frac{1}{8}$				

Cada tabla presenta una complejidad diferente, si bien en ambas la constante de proporcionalidad es una fracción. En la tabla a) solo una de las magnitudes presenta fracciones mientras que en la otra tabla hay fracciones presentes en ambas magnitudes. En los dos casos, los niños tienen que poner en juego las propiedades de la proporcionalidad, dobles y mitades de fracciones y cálculos de suma o de multiplicación.

Por otra parte, la forma en que se organizan los datos en ambas es diferente, en el caso de la tabla b), el par de datos conocido no aparece al inicio de la tabla.

A partir de las resoluciones, se puede observar:

- En qué propiedades de la proporcionalidad se apoya el alumno para resolver la tabla.[8]
- Qué estrategias usa el niño para resolver los cálculos implicados en esas relaciones, según los números en juego. Por ejemplo, en el caso de la tabla del ítem b), se puede calcular la cantidad de azúcar necesaria para 1 kg de fruta duplicando la que se precisa para $\frac{1}{2}$ kg de fruta: $\frac{2}{8}$ o $\frac{1}{4}$ que es el doble de $\frac{1}{8}$. Para $\frac{1}{4}$ kg de fruta se puede recurrir a la mitad de la cantidad de fruta necesaria para $\frac{1}{2}$ kg; o sea, a la mitad de $\frac{1}{8}$ que es $\frac{1}{16}$. Para conocer la cantidad de azúcar que se precisa para $\frac{3}{4}$ kg de fruta, se puede multiplicar por 3 la cantidad necesaria para $\frac{1}{4}$ kg; esto es, $3 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ (o sumar tres veces $\frac{1}{16}$), etc.

En caso de aparecer algún error en los resultados es importante detectar si se trata de un error en la relación puesta en juego o en el cálculo realizado.

---

[8] Las distintas estrategias posibles para completar tablas de proporcionalidad están analizadas en la situación 1 de las "Actividades para relevar los aprendizajes", correspondientes al contenido Multiplicación y división entera: resolución de diversos tipos de problemas y estrategias de cálculo (pp. 52 y 53).

2. Expresiones decimales

En el segundo ciclo los alumnos inician su trabajo sistemático con los números racionales, tanto con las fracciones como con las expresiones decimales, y es un objetivo que logren relacionar ambas representaciones. Se trata de que comprendan que una misma cantidad puede representarse como una fracción o como un número con coma, así como también que, progresivamente, puedan decidir cuándo es preferible utilizar una expresión u otra. El trabajo con fracciones decimales (fracciones con denominador 10, 100, 1.000, etcétera) ocupa en ese proceso un lugar central. Una marca importante de avance será entonces el vínculo que los alumnos puedan establecer entre una fracción decimal y el número decimal correspondiente, y en este sentido, que logren adentrarse en el análisis del valor posicional de las cifras que se ubican a la derecha de la coma. Tal como se señaló a propósito de los números fraccionarios, el aprendizaje de los números decimales implica una ruptura con muchas de las certezas construidas por los niños a propósito de los números naturales.

Un primer acercamiento al trabajo con los números decimales puede darse a partir de la exploración de notaciones en el contexto del dinero (pesos y centavos) y de las medidas de longitud (metros y centímetros). Es central tener en cuenta que esas escrituras de números con coma no son estrictamente números decimales, pues se trata de escrituras que admiten solamente dos o tres lugares después de la coma. Se espera que los niños progresivamente vayan desprendiéndose de esos contextos para avanzar hacia el trabajo con números con varias cifras después de la coma, de manera de poder analizar cuestiones de orden y de densidad. Finalmente se busca también que los niños avancen en la construcción de diversas estrategias para operar con expresiones decimales.

Como ya ha sido señalado, la evolución en los niveles de progresión que a continuación se desarrollan podrá aparecer bajo la condición de que los alumnos hayan participado en situaciones sostenidas y sistemáticas de enseñanza para cada clase de problemas.

Números racionales. Expresiones decimales

Nivel I	Nivel II
Usa números con coma en el contexto del dinero para leer y escribir cantidades expresadas en pesos y reconoce la equivalencia entre diversas escrituras. Por ejemplo, que 50 centavos es igual a \$0,50 y \$0,5.	Reconoce que una fracción decimal[9] puede escribirse como una suma de fracciones decimales. Por ejemplo, que $\frac{54}{100} = \frac{50}{100} + \frac{4}{100} = \frac{5}{10} + \frac{4}{100}$. Reconoce la equivalencia entre la escritura de fracciones decimales y los números decimales. Por ejemplo, reconoce que $\frac{1}{10}$ corresponde a 0,1; $\frac{2}{10}$ a 0,2; $\frac{45}{100}$ a 0,45; $\frac{15}{10}$ a 1,5, etc. Lee y escribe números decimales usando las denominaciones "décimos", "centésimos", "milésimos".
Compone y descompone una cantidad de dinero usando monedas de distintos valores. Por ejemplo, encuentra dos maneras distintas de formar \$2,75.	Compone y descompone números decimales usando sumas de fracciones decimales. Por ejemplo, resuelve 4,34 como $4 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100}$; o $\frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{9}{1.000}$ como 0,369. Resuelve problemas que involucran el análisis del valor posicional en la notación decimal. Por ejemplo, reconoce que para obtener 4,03 a 4,53 hay que restarle 0,5.
Compara números con coma en el contexto del dinero, apoyándose en qué valor de moneda indica cada posición. Por ejemplo, reconoce que \$0,5 no es igual a \$0,05.	Compara y ordena expresiones decimales, teniendo en cuenta el valor posicional de las cifras. Por ejemplo logra reconocer que 0,5 es mayor que 0,49 porque $\frac{5}{10}$ es mayor que $\frac{4}{10}$.

---

[9] En la tabla correspondiente a las progresiones para el trabajo con fracciones, se incluye a la equivalencia entre fracciones decimales como un aprendizaje importante dentro del trabajo con equivalencias entre expresiones fraccionarias en general. Este aprendizaje es un apoyo necesario para el trabajo con los números decimales.

Nivel III

Compone y descompone números decimales usando sumas de fracciones decimales en cálculos que exijan establecer relaciones y reagrupamientos entre posiciones. Por ejemplo, $\frac{3}{100} + \frac{21}{10} + \frac{4.800}{1.000}$.

Compara y ordena expresiones fraccionarias y decimales.

Nivel I	Nivel II
Usa números con coma en el contexto de la medida de longitudes para leer y escribir cantidades expresadas en metros y centímetros, y reconoce la equivalencia entre diversas escrituras. Por ejemplo, que 1,56 m es igual a 1 m y 56 cm o 156 cm.	Establece la equivalencia entre fracciones con denominador 2, 4, 5; fracciones decimales y números decimales. Por ejemplo, reconoce que $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25$.

Nivel III

Reconoce que el cociente entre numerador y denominador de una fracción puede expresarse como un número con coma.

Reconoce cuáles son las fracciones que no se pueden expresar como una fracción decimal. Por ejemplo, reconoce que $\frac{1}{3}$ no puede expresarse con una fracción equivalente con denominador potencia de 10, ya que ninguna potencia de 10 es múltiplo de 3.

En situaciones colectivas se exploran las expresiones decimales periódicas, se establecen relaciones con las fracciones que no pueden expresarse como fracción decimal, y se verifica que cuando se divide numerador por denominador se obtiene un cociente con cifras decimales que se repiten indefinidamente.

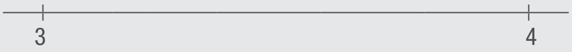
Por ejemplo:
Anticipen cuántos lugares después de la coma tendrán los siguientes números escritos en forma decimal y expliquen cómo se dieron cuenta. Verifíquenlo con la calculadora.

$\frac{1}{3}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{8}$

Determina la ubicación de números decimales y fracciones decimales en una recta numérica a partir de distintas informaciones.

Por ejemplo, resuelve actividades como las siguientes:

- Ubicar en la recta 3,2; 3,25 y $\frac{31}{10}$.



- Ubicar en esta recta los números 2; 2,7; 1 entero con 200 centésimos y $\frac{13}{10}$.

Resuelve problemas que exigen analizar la densidad en el conjunto de los números racionales.

Por ejemplo, logra encontrar números decimales que se encuentren entre 3,4 y 3,5; entre 2,14 y 2,15; o logra encontrar fracciones con denominador 100 que se encuentren entre 1,6 y 1,7.

Nivel I	Nivel II
Resuelve cálculos de suma y resta con números decimales en el contexto de medidas de dinero y longitud, usando procedimientos diversos. Dispone de un conjunto de resultados memorizados o que puede recuperar u obtener con cierta facilidad. Por ejemplo: 0,50 + 0,50 = 1 0,25 + 0,25 = 0,50 0,50 + 0,25 = 0,75	Resuelve cálculos mentales que implican sumas o restas de 0,1; 0,01; 0,001 a cualquier número, apoyándose en el valor posicional de las cifras.
Dispone de recursos de cálculo que permiten averiguar uno de los sumandos, dados el otro y el resultado en el contexto de dinero. Por ejemplo, completa cálculos como \$1,50 + …… = \$2 o \$1,75 + …… = \$3.	Dispone de recursos de cálculo que permiten averiguar uno de los sumandos, dados el otro y el resultado entero. Por ejemplo, completa cálculos como 0,84 + …… = 2; o 0,345 + …… = 1. Resuelve cálculos exactos y aproximados de suma y resta de números decimales usando diversos procedimientos de cálculo mental e incluyendo los algoritmos convencionales.
	Multiplica y divide mentalmente una expresión decimal por una potencia de 10. Analiza en forma grupal las estrategias utilizadas. Multiplica números decimales por enteros apoyándose en diversos procedimientos. Por ejemplo, para resolver 0,4 × 3 hace 0,4 + 0,4 + 0,4; o se apoya en que 4 décimos por 3 son 12 décimos, que se escribe 1,2; razona que $\frac{4}{10} \times 3$ es igual a $\frac{12}{10} = 1{,}2$, etc.
	Resuelve problemas que implican repartir el resto en el contexto de dinero o de medidas de longitud, y usa expresiones decimales para expresar el resultado de ese reparto. Por ejemplo, divide \$25 entre 4 personas y concluye que le corresponden \$6,25 a cada uno, considerando que \$1 dividido entre 4 es igual a \$0,25.

Nivel III

Resuelve cálculos de suma y resta que combinan números decimales y fracciones decimales o fracciones equivalentes a fracciones decimales. Por ejemplo, resuelve $0{,}3 + \frac{1}{4}$ como $\frac{3}{10} + \frac{1}{4}$ o como $0{,}3 + 0{,}25$.

Multiplica números decimales entre sí en el contexto de la proporcionalidad directa.

Por ejemplo:
Si 1 kg de queso cuesta $141,25, ¿cuánto costarán 3,25 kg?

En forma colectiva, analiza y fundamenta el funcionamiento del algoritmo de la multiplicación de números decimales, buscando la relación entre la multiplicación de fracciones decimales y la multiplicación de números decimales.

Resuelve cálculos de división exacta, dividiendo el resto y expresando el resultado como una expresión decimal. Para hacerlo se apoya en las equivalencias entre enteros, décimos y centésimos.

Por ejemplo, establece que, si el resto en una división entera es 3, para seguir dividiendo es pertinente considerarlo como 30 décimos, y escribir el resultado de dividir 30, en el primer lugar después de la coma, es decir, en el lugar de los décimos.

Divide números decimales entre sí. En forma colectiva, analiza y fundamenta el funcionamiento del algoritmo de la división de números decimales.

Resuelve problemas de varios pasos que incluyen operaciones con números racionales.

Actividades para relevar los aprendizajes

Se incluyen aquí algunos ejemplos de problemas que permiten recabar información sobre el estado de conocimiento de los alumnos en relación con los números decimales. Como ya se ha comentado, es importante observar su desempeño en la resolución grupal de problemas, analizar el tipo de intervenciones y preguntas que hacen y los comentarios o explicaciones que pueden dar de su trabajo, así como también plantear momentos específicos de trabajo individual que permitan mirar más detenidamente la producción de cada uno.

A continuación, se ofrecen ejemplos de situaciones posibles. Algunas actividades contienen varios ítems a ser resueltos por los alumnos, que suelen implicar diferente complejidad. La elección de cuáles actividades e ítems podrían servir para relevar los aprendizajes de un grupo particular de alumnos tiene que guardar relación con el tipo de problemas y el rango numérico trabajado (décimos, centésimos o milésimos).

Es importante pedir a los alumnos que registren de alguna manera el procedimiento que llevaron a cabo para la resolución de cada problema y no solo la respuesta.

Situación 1. Reconocer la equivalencia entre la escritura de fracciones decimales y números decimales

Escribí al lado de cada fracción decimal, el número decimal que le corresponde.

$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{15}{10}$	$\frac{2}{100}$
$\frac{75}{100}$	$\frac{105}{100}$	$\frac{8}{1.000}$	$\frac{18}{1.000}$

Es importante observar si el alumno puede resolver todas las escrituras propuestas o solo algunas. En este último caso, es necesario analizar cuáles, pues cada una de ellas implica una complejidad diferente:

- Los ejemplos presentes abarcan desde décimos hasta milésimos.
- Algunos implican considerar la existencia de enteros (como el caso de $\frac{15}{10}$, por ejemplo).
- Otros implican reagrupamientos (por ejemplo en el caso de $\frac{75}{100}$ hay que considerar que 7 ocupa el lugar de los décimos). En los reagrupamientos pueden aparecer algunos errores: por ejemplo, escribir 0,075 en el caso de $\frac{75}{100}$ sin tener en cuenta que $\frac{70}{100}$ forman 7 décimos, es decir, 0,7.

Situación 2. Componer números decimales usando suma de fracciones decimales

Escribí qué número decimal se forma en cada caso:

a) $\frac{1}{10} + \frac{3}{1.000} =$

b) $2 + \frac{1}{100} + \frac{3}{1.000} =$

c) $2 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} =$

d) $\frac{4}{10} + \frac{13}{100} =$

e) $\frac{28}{10} + \frac{14}{100} =$

Es importante observar si el alumno puede resolver todas las escrituras propuestas o solo algunas. En este último caso, es necesario analizar cuáles, pues cada una de ellas implica una complejidad diferente.

La consigna apunta a componer números decimales a partir de fracciones decimales, incluyendo tanto aquellas que tienen numerador de una cifra, como otras que tienen numeradores mayores, y que exigen, por lo tanto, considerar la relación entre las diversas posiciones y hacer reagrupamientos, como en los ítems d) y e). Por ejemplo, el ítem e) requiere considerar al $\frac{28}{10}$ como $\frac{20}{10} + \frac{8}{10}$, es decir como $2 + 0{,}8 = 2{,}8$ y el $\frac{14}{100}$ como $\frac{10}{100} + \frac{4}{100}$, o sea como $0{,}1 + 0{,}04 = 0{,}14$. En total el número decimal es 2,94. El ítem d) requiere también esa consideración para el caso de $\frac{13}{100}$.

En los casos de los ítems a) y b), las fracciones presentadas exigen que el niño considere la inclusión de ceros en algunas posiciones.

Situación 3. Comparar números decimales

Completá en cada caso con los signos mayor, menor o igual y explicá cómo te diste cuenta cuál corresponde.

a) 3,04 …… 3,25

b) 6,5 …… 6,45

c) 18,25 …… 18,7

d) 3,3 …… 3,30

e) 23,7 …… 23,07

f) 2,1 …… 2,01

Cada uno de los pares de números decimales presentados permite poner en juego relaciones diferentes. Por eso, resulta particularmente importante analizar la explicación que el niño brinde para interpretar a cuáles de esas relaciones está recurriendo. En todos los casos, la cantidad de enteros es la misma y esto exige la consideración de la parte decimal del número.

El ítem a) es el que puede resultar más sencillo dado que implica la comparación entre 04 y 25.

En los casos de los ítems b) y c), se pone en juego una cuestión muy compleja de los números decimales, y que implica una ruptura con lo aprendido a propósito de los números naturales: no siempre los números que tienen mayor cantidad de cifras resultan números más grandes. En este caso justamente los números más grandes tienen menor cantidad de cifras en la parte decimal.

En el caso del ítem d) es necesario considerar la equivalencia entre tres décimos y treinta centésimos. Es posible que el niño sostenga que esas dos escrituras son equivalentes apoyándose en diferentes conocimientos. Puede, como se dijo, considerar la equivalencia entre décimos y centésimos. También puede expresar explicaciones del estilo “los ceros de atrás no valen nada”, etc.

Los ítems e) y f) implican tener en cuenta que el 7 (o el 1) ubicado en diferentes posiciones adquiere un valor distinto.

Situación 4. Resolver cálculos mentales con números decimales

Resolvé mentalmente los siguientes cálculos. Explicá cómo pensaste cada uno.

a) 5,80 + 3,20 = ...

c) 12,25 + ... = 20, 4

e) 4,30 x 3 = ...

b) 0,75 + ... = 5

d) 5 – 1,30 = ...

f) 5,90 x 3 = ...

A partir de las resoluciones se puede observar si el alumno encuentra una respuesta correcta usando:

- Alguna estrategia de cálculo mental. Por ejemplo para el ítem a), considera que 80 centésimos más 20 centésimos forman 100 centésimos, o sea un entero, y usa ese entero para sumarlo a los 8 enteros que ya hay. En los ítems b) o c), completa los centésimos para llegar al entero más próximo y luego sigue sumando enteros. En el caso del ítem d) podría considerar restar los enteros y llegar a 4, para luego a 4 sacarle 30 centésimos (puede considerar que cada entero son 100 centésimos). Para resolver las multiplicaciones, podrían multiplicarse los enteros por un lado y los centésimos por el otro, haciendo luego las reagrupaciones necesarias.

- Algoritmos, ya que si bien la consigna pide que se realicen cálculos mentales, es posible que algunos niños utilicen el algoritmo. En tal caso sería importante indagar si el alumno solo puede operar con el algoritmo, o cuenta con otros recursos.

En caso de que aparezcan errores, es importante analizarlos. Algunos alumnos podrían no considerar la necesidad de efectuar los reagrupamientos, tanto en el caso de los cálculos mentales como de los algoritmos. Por ejemplo, en el caso a) poner como resultado 8,100, etc.

Situación 5. Analizar la densidad en el conjunto de los números racionales

Encontrá, en cada caso y si es posible, 3 números racionales que estén entre los dos números dados.

a) 5 y 6
b) 5,7 y 5,8
c) 2,34 y 2,35

A partir de las resoluciones se puede observar si el alumno:

- No logra encontrar los números pedidos y sostiene que no es posible en todos o en alguno de los casos. Será necesario determinar en qué intervalos presenta dificultades. Puede ser que encuentre respuestas correctas para el ítem a), pero no pueda hacerlo con los ítems b) y c). El ítem c) es más complejo pues requiere usar milésimos.

- Logra encontrar correctamente en todos los casos tres números posibles.

Geometría

1. Figuras y cuerpos geométricos

El trabajo geométrico en el segundo ciclo avanza sobre tres aspectos. En primera instancia, es necesario volver sobre el estudio de las propiedades de figuras y cuerpos iniciado en el primer ciclo para profundizarlo. Por otra parte, se espera que los niños avancen en el estudio de algunas figuras y cuerpos que no han sido tratados todavía: circunferencias, círculos, rombos, paralelogramos, polígonos regulares, etcétera. Ligado a este trabajo, es necesario que amplíen el vocabulario específico que les permita identificar y describir figuras y cuerpos. Por último, se promueve que los niños aprendan que las propiedades de las formas geométricas son un medio para realizar afirmaciones o para argumentar a favor o en contra de ellas sin necesidad de constatación empírica. Es decir, se trata de que los niños puedan iniciarse en el modo de pensar propio de la geometría. Uno de los cambios más importantes en la actividad de este ciclo respecto del anterior refiere a los modos de validación, es decir, a la manera en que los alumnos darán cuenta de la validez de resultados y procedimientos que han utilizado para la resolución de problemas. La validación, aunque seguramente incluya algún componente empírico –por ejemplo la superposición de figuras–, involucra argumentos que ponen en juego propiedades de la figura y no únicamente del dibujo en particular. En este sentido, es importante aclarar que el alcance esperado para algunos aprendizajes referidos a la elaboración de conjeturas y argumentos que ponen en juego propiedades de las figuras corresponde a un nivel exploratorio, y se pondrán de manifiesto en situaciones de intercambio colectivo.

En este ciclo se retoma el uso de la regla y la escuadra –iniciado en el primer ciclo– y se incorpora el uso del compás, del transportador y de la regla no graduada. Si bien se espera que los niños adquieran cada vez mayor destreza en ese uso, la precisión tiene que estar al servicio de la resolución de problemas y no es un fin en sí mismo.

Para facilitar la lectura de las progresiones, se ha organizado su presentación en bloques según las formas geométricas consideradas:

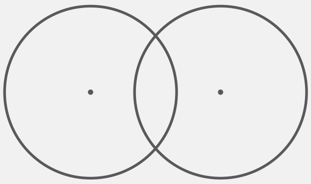
- Circunferencias, círculos, ángulos y triángulos
- Cuadriláteros y polígonos regulares
- Cuerpos

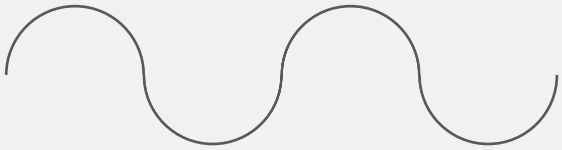
Como ya se ha señalado para otros contenidos, la evolución en los niveles de progresión que a continuación se desarrollan, podrá aparecer bajo la condición de que los alumnos hayan participado de situaciones sostenidas y sistemáticas de enseñanza.

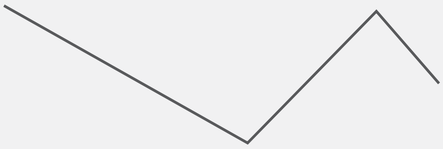
Figuras y cuerpos geométricos

Primer ciclo	Nivel I

Circunferencias, círculos, ángulos y triángulos

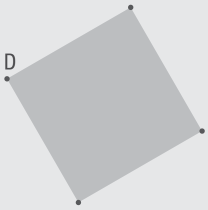
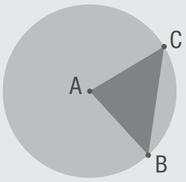
Resuelve problemas que implican la identificación y formulación de algunas características y elementos de las figuras geométricas (cantidad de lados, lados iguales, diagonales, etc.).	Usa el compás para copiar figuras sencillas que contienen circunferencias y para trasladar segmentos, decidiendo que es el centro el lugar para “pinchar” el compás y desde el cual decidir “cuánto abrirlo”. Por ejemplo: Copiá en una hoja lisa la siguiente figura:  Identifica la circunferencia como el conjunto de puntos que equidistan de un centro y al círculo como el conjunto de puntos que están a igual o menor distancia de un centro. Por ejemplo: Marcá todos los puntos que están a 4 cm del punto F. .F Resuelve problemas que implican considerar la medida de diámetros o radios y la ubicación de los centros de la circunferencia. Por ejemplo, traza una circunferencia con compás, dado el radio o el diámetro.

Nivel II	Nivel III
Usa el compás para copiar o construir figuras más complejas que contienen circunferencias o arcos de circunferencias (que requieren del trazado de rectas auxiliares, o que incluyen circunferencias con distintos radios y centros). Por ejemplo: Copiá en una hoja lisa la siguiente figura: 	

Primer ciclo	Nivel I
	Usa las nociones de radio, diámetro y centro de la circunferencia para encontrar puntos que equidistan de otros, a partir de puntos o de figuras que contienen solo circunferencias. Por ejemplo: El punto R es el centro de las dos circunferencias dibujadas. El radio de la circunferencia pequeña es 1 cm y el de la grande es de 2 cm.  Pintá de azul los puntos que están a menos de 1 cm de R, de negro los que están a 1 cm de R, y de rojo los que están a 2 cm de R.
	Copia figuras poligonales que requieren la consideración, no solo de la medida de sus lados, sino también de sus ángulos. Por ejemplo, logra copiar dibujos como el siguiente:  Reconoce ángulos rectos, agudos y obtusos.[10]

---

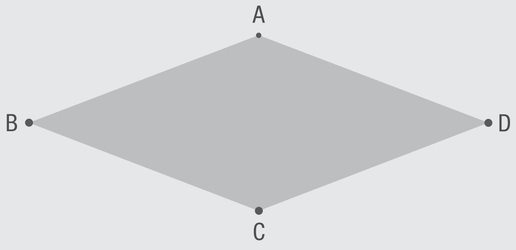
[10] En la tabla correspondiente a la progresión en "Medida", se describe el avance en el uso de transportador como instrumento para medir la amplitud de los ángulos (pp. 126 y 127).

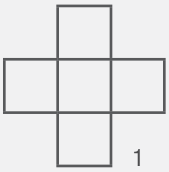
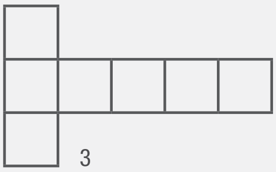
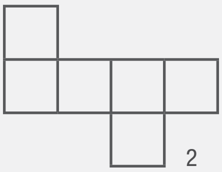
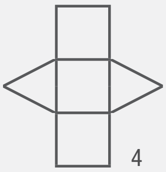
Nivel II	Nivel III
Usa las nociones de radio, diámetro y centro de la circunferencia para encontrar puntos que equidistan de otros, a partir de figuras que no contienen circunferencias dibujadas. Por ejemplo: Este cuadrado mide 6 cm de lado. Colorealo de acuerdo con las instrucciones: de verde la parte que está a 6 cm del punto D; de azul la parte que está a menos de 6 cm del punto D y de rojo la parte que está a más de 6 cm del punto D.  Encuentra puntos que cumplen dos condiciones: estar a una distancia en cm de un punto y al mismo tiempo a una distancia en cm de otro punto. Construye triángulos a partir de las medidas de sus lados. Resuelve problemas que implican reconocer que los lados de un triángulo son radios de circunferencias. Por ejemplo: Esta es una circunferencia de centro A. Decidí, sin medir, si se puede estar seguro de que el triángulo dibujado es isósceles. Explicá por qué.  Resuelve problemas que implican poner en juego la propiedad triangular: la suma de dos lados de un triángulo debe ser mayor que el tercer lado. Por ejemplo, dadas las medidas de tres segmentos, decide, sin construir, si existen triángulos con esas medidas de lados.	Traza la mediatriz de un segmento. Usa la noción de mediatriz para resolver problemas. Por ejemplo, usando regla no graduada y compás, divide un segmento en cuatro partes iguales.
Construye triángulos a partir de las medidas de sus ángulos.	En situaciones colectivas conjetura y argumenta por qué la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Resuelve problemas que implican poner en juego que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

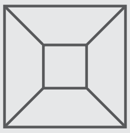
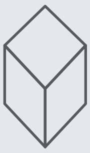
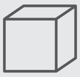
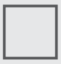
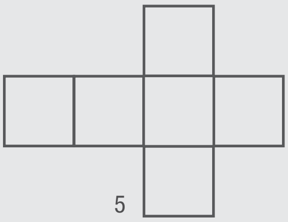
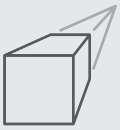
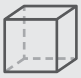
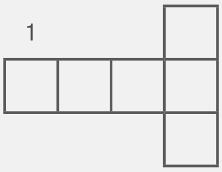
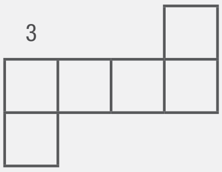
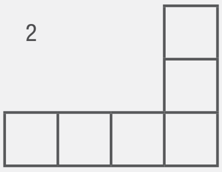
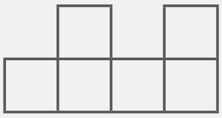
Primer ciclo	Nivel I
Cuadriláteros y polígonos regulares	
Resuelve problemas que implican la identificación y formulación de algunas características y elementos de las figuras geométricas (cantidad de lados, lados iguales, diagonales, etc.). Formula e interpreta breves textos que describen una forma geométrica usando vocabulario específico. Por ejemplo, en una actividad en pequeños grupos, envía un mensaje a otro grupo para que pueda reproducir un rectángulo con una diagonal trazada. Reproduce formas geométricas compuestas por cuadrados y rectángulos con alguna diagonal trazada usando hojas cuadriculadas y regla.	Reconoce y traza rectas perpendiculares y paralelas. Construye figuras con ángulos rectos trazando las rectas perpendiculares necesarias, usando escuadra o transportador.

Nivel II	Nivel III
Construye triángulos a partir de diferentes informaciones (dados tres lados; dados lados y el ángulo comprendido; dados tres ángulos, etcétera), con regla, compás, transportador y escuadra, sin analizar la cantidad de soluciones posibles. Clasifica triángulos según sus lados y/o según sus ángulos.	Construye triángulos a partir de diferentes informaciones, analizando, por los datos dados, si es posible realizar o no la construcción de un triángulo, si es única o si se pueden construir diferentes y explicita las razones. Por ejemplo, analiza que dados dos lados pueden construirse infinitos triángulos porque puede variar la medida del ángulo comprendido; o explica por qué no puede existir un triángulo equilátero rectángulo.
Traza y reconoce la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles.	Traza y reconoce las alturas de cualquier triángulo.
Resuelve problemas (de copia, de dictado o de construcción de figuras según datos) que implican poner en juego y explicitar las propiedades de los lados y ángulos de cuadrados, rectángulos y rombos. Por ejemplo, construye un cuadrado en hoja lisa usando regla no graduada, escuadra y compás y explica por qué se trata de un cuadrado (apelando a la perpendicularidad de sus lados, al paralelismo de los lados opuestos, a la medida e igualdad de sus ángulos, etc.).	Resuelve problemas (de copia, de dictado o de construcción de figuras según datos) que implican poner en juego y explicitar las propiedades de los lados, ángulos y diagonales de paralelogramos. Clasifica cuadriláteros a partir de las propiedades de sus lados (medida, paralelismo, perpendicularidad), de sus ángulos y de sus diagonales (medida, perpendicularidad, se cortan o no en su punto medio).

Primer ciclo	Nivel I

Nivel II	Nivel III
Resuelve problemas que implican poner en juego que la suma de los ángulos interiores de un rectángulo es 360°.	En situaciones colectivas usa la propiedad de los ángulos interiores del triángulo para argumentar por qué la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero es 360°. Resuelve problemas que implican poner en juego que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°. En problemas que implican construcciones o copias de paralelogramos, toma decisiones con respecto al procedimiento a utilizar, los instrumentos y/o los datos necesarios a considerar. Por ejemplo: Los siguientes segmentos son los lados de un paralelogramo. Completá la construcción. Decidí qué instrumentos utilizar y explicá por qué estás seguro de que el dibujo resultante es un paralelogramo.  En situaciones colectivas usa la propiedad de los ángulos interiores del triángulo para determinar la medida de los ángulos interiores y del ángulo central de un polígono regular. Resuelve problemas que implican inferir las medidas de ángulos de triángulos o paralelogramos, sin recurrir a la medición efectiva, apelando a relaciones y propiedades de sus ángulos. Por ejemplo: ABCD es un rombo. El ángulo B mide 50°. Indicá, sin medir, cuál es el valor del ángulo C.  Construye polígonos regulares dada la cantidad de lados, la medida del ángulo central o la medida del ángulo interior.

Primer ciclo	Nivel I
Cuerpos	
En juegos o problemas grupales utiliza cierto vocabulario específico para describir un cuerpo geométrico (cantidad de caras, forma de las caras, cantidad de aristas, cantidad de vértices) teniendo los cuerpos geométricos a la vista.	Resuelve problemas que implican identificar características de cubos, prismas y pirámides de diferentes bases, conos, cilindros y esferas, para poder distinguir unos de otros, usando vocabulario específico.
Reproduce cubos, pirámides y prismas –con el modelo presente– usando elementos que representen aristas y vértices (como varillas y bolitas de plastilina).	Anticipa la cantidad de vértices y aristas necesarias para representar cubos, pirámides y prismas de distintas bases.
	Reconoce desarrollos planos de cubos, prismas, pirámides, con un modelo del cuerpo a la vista, en situaciones en las que solo hay que tener en cuenta la forma y la cantidad de las caras. Por ejemplo, reconoce entre estas opciones cuál corresponde a un cubo.  1  3  2  4

Nivel II	Nivel III
	Reconoce características (forma de las caras, cantidad de caras, aristas y vértices) de poliedros (tetraedro, octaedro, etc.).[11]
Identifica posibles representaciones planas de cubos o prismas de diversas bases. Por ejemplo, reconoce cuáles de estos dibujos representan mejor a un cubo, explicando las razones (permite ver cantidad total de aristas y caras, permite ver la igualdad de caras y aristas, etc.).  1  2  3  4  5  6  7	
Reconoce desarrollos planos de cubos, prismas, pirámides, cilindros y conos, en situaciones en las que hay que tener en cuenta no solo la forma y la cantidad de caras, sino también sus posiciones relativas. Por ejemplo, reconoce entre estas opciones cuál corresponde a un cubo, dando las razones para su respuesta. 1  3  2  4 	Produce desarrollos planos de cubos, prismas y pirámides.

---

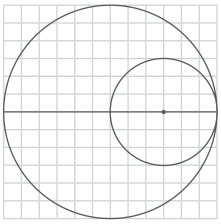
[11] Es necesario tener en cuenta que la progresión de aprendizajes referida a cuerpos geométricos se complementa con las progresiones señaladas para la medida de volúmenes.

Actividades para relevar los aprendizajes

Se incluyen aquí algunos ejemplos de problemas que permiten recabar información sobre el estado de conocimientos de los alumnos en relación con el eje Geometría. El tipo de problemas a plantear puede ser muy variado: construcción, dictado y copia de figuras, anticipación de medidas de lados y ángulos sin recurrir a la medida efectiva, etcétera. A la hora de observar el desempeño de los alumnos, es necesario presentar aquellos tipos de actividades sobre las que se ha trabajado centralmente durante la enseñanza. Dado que las figuras elegidas para las propuestas también pueden ser variables, vale la misma orientación para su selección.

Situación 1. Resolver problemas que implican considerar la medida de diámetros o radios y la ubicación de los centros de la circunferencia

Escribí un mensaje sin dibujos para que otra persona pueda construir una figura igual a esta, sabiendo que el diámetro de la circunferencia más grande mide 6 cm.



A partir de las resoluciones se puede observar si el alumno:

- Elabora un texto que incluye algunas características del dibujo pero no todas. Por ejemplo, incluye la medida de los radios o diámetros de ambas circunferencias sin aclarar la relación entre ellas (por ejemplo, que los centros están sobre la misma recta).

- Elabora un texto que permite reconstruir una figura similar aunque con distintas medidas, pues tiene en cuenta las relaciones entre ambas circunferencias pero no incluye las medidas de los radios o diámetros.

- Elabora un texto que permite reconstruir la figura teniendo en cuenta las relaciones que la caracterizan: los diámetros o los radios de ambas circunferencias y la ubicación de los centros.

Situación 2. Construir triángulos a partir de la medida de sus lados

Construí, si es posible, dos triángulos distintos que tengan un lado de 3 cm y otro lado de 4 cm.

A partir de las resoluciones se puede observar si el alumno:

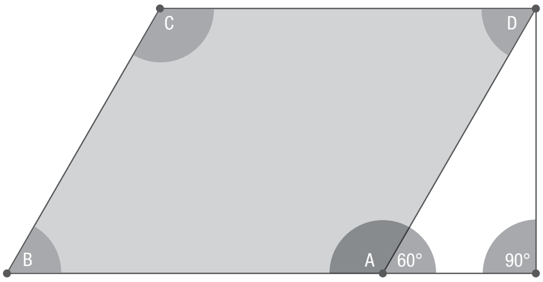
- Construye un solo triángulo. Puede suceder que incluya una explicación y afirme que no hay otro posible o que no puede construirlo. Para poder construir más de uno, el alumno debería considerar que los ángulos pueden variar y producir así otros triángulos con esas medidas de lados. Como la consigna no hace mención a los ángulos, algunos niños no advierten que pueden “manipular” esa medida.

- Construye dos triángulos congruentes pero ubicados en diferentes posiciones. En estos casos, no está teniendo en cuenta que un mismo triángulo puede estar ubicado en distintas posiciones. La posición es una propiedad del dibujo y no de la figura.

- Logra construir ambos triángulos con un lado de 3 cm y otro de 4 cm (o medidas aproximadas).

Situación 3. Resolver problemas que implican poner en juego la suma de los ángulos interiores de triángulos y cuadriláteros

Este dibujo está conformado por un paralelogramo ABCD y por un triángulo rectángulo ADE. Sin usar el transportador, determiná la medida de los ángulos B y C. Explicá cómo lo pensaste.



A partir de las resoluciones se puede observar si el alumno:

- Da una respuesta apoyándose en la percepción (o en la medida efectiva) sin poner en juego relaciones y propiedades de los ángulos interiores.
- Da una respuesta correcta, pero no logra justificar cómo llegó al resultado ya que la explicación requiere poner en palabras muchas relaciones.
- Logra identificar solamente que la medida del otro ángulo del triángulo es 30°, pero no logra usar esa información para determinar la medida de los ángulos pedidos:
- Logra identificar que el ángulo C mide 120° y el ángulo B mide 60°, poniendo en juego las propiedades de los ángulos interiores de triángulos y/o paralelogramos en sus explicaciones. Por ejemplo:
  - › Como el ángulo A más 60° tiene que dar 180°, entonces A mide 120°. Entonces C mide también 120°. Como la suma de los ángulos interiores del paralelogramo es 360°, entonces B + D es igual a 360° – 240°, por lo tanto B y D miden 60° cada uno.
  - › Como la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180°, el otro ángulo del triángulo es igual a 180° menos 150°, o sea 30°. Por lo tanto D es igual a 90° menos 30°. D es igual a B, por lo tanto B también mide 60°.

Medida

El trabajo con la medida en el segundo ciclo propone profundizar el estudio de la longitud, la capacidad y el peso a partir de los aprendizajes logrados en el primer ciclo, pero enfatizando ahora las relaciones entre el sistema de medida y el sistema de numeración. Se espera que los alumnos avancen en la posibilidad de establecer relaciones entre distintas unidades de nuestro sistema de medidas (SIMELA). Este trabajo exige poner en juego algunas características del sistema de numeración (multiplicaciones y divisiones por la unidad seguida de ceros) y las relaciones de proporcionalidad directa (por ejemplo, si 100 centímetros equivalen a un metro, 200 centímetros equivalen a 2 metros). Por otro lado, se espera que los alumnos puedan apoyarse en las fracciones y las expresiones decimales para establecer estas equivalencias. También se espera que progresen en la medición de los ángulos y del tiempo, conociendo y usando unidades de medida no decimales.

Se incorporan el perímetro y el área como nuevas magnitudes. Por último, se espera que los alumnos exploren unidades de medida actualmente usadas en otros países para medir longitudes y pesos, así como también las unidades que se utilizan en informática como los *bytes* y sus múltiplos.

Es necesario nuevamente explicitar que la evolución en los niveles de progresión que a continuación se desarrollan podrá aparecer bajo la condición de que los alumnos hayan participado en situaciones sostenidas y sistemáticas de enseñanza para cada clase de problemas.

1. Medidas de longitud, capacidad, peso y tiempo

Medidas de longitud, capacidad, peso y tiempo

Primer ciclo	Nivel I
Mide y compara longitudes, capacidades y pesos usando unidades de medida convencionales (metros, centímetros, litros, kilos) y no convencionales (hilos, manos, pasos, vasos, etc.). Usa la regla para medir longitudes.	Resuelve problemas que implican la medición de longitudes usando el metro y el centímetro como unidades. Resuelve problemas que implican determinar pesos y capacidades usando el kilo, el gramo y el litro como unidades.
Apela a algunas equivalencias de uso cotidiano para resolver problemas con medidas de longitud y peso (1 metro = 100 centímetros; 1 kilogramo = 1.000 gramos).	Resuelve problemas que implican establecer equivalencias sencillas entre unidades. Por ejemplo: $2\frac{1}{2}$ metros = 250 centímetros 1 kilómetro = 1.000 metros 4 kilos = 4.000 gramos Reconoce que es necesario seleccionar el instrumento y la unidad de medida según el objeto que se proponga medir.

<table>
<tr><th>Nivel II</th><th>Nivel III</th></tr>
<tr><td>Usa el kilómetro y el milímetro como unidades de medida para longitudes más extensas o más pequeñas.</td><td></td></tr>
<tr><td>

Establece relaciones de equivalencia entre metros, centímetros, kilómetros y milímetros, poniendo en juego relaciones de proporcionalidad directa.

Usa el mililitro como una unidad menor que el litro y establece sus equivalencias, poniendo en juego relaciones de proporcionalidad directa.

Usa el miligramo y la tonelada como unidades para medir pesos mayores y menores que el gramo y el kilo, y establece sus equivalencias, poniendo en juego relaciones de proporcionalidad directa.

</td><td>

Resuelve problemas que implican establecer relaciones entre múltiplos y submúltiplos del metro, del litro y del gramo recurriendo a relaciones de proporcionalidad directa, a las características del sistema de numeración decimal y al uso de las fracciones y expresiones decimales. Por ejemplo, reconoce que 2,50 m, 250 cm, 2.500 mm, $2+\frac{50}{100}$ m son expresiones equivalentes.

Explora la equivalencia entre unidades de medida de longitud, peso y capacidad con otros sistemas de uso actual: galones, pulgadas, etc.

Por ejemplo:
Analizando la información que te ofrece este cuadro, contestá las preguntas que figuran abajo.

<table>
<tr><th>Unidad de medida inglesa</th><th>Equivalencia en nuestro sistema numérico</th></tr>
<tr><td>1 pulgada</td><td>2,54 cm</td></tr>
<tr><td>1 pie</td><td>30,48 cm</td></tr>
<tr><td>1 milla</td><td>1.609,35 m</td></tr>
<tr><td>1 legua</td><td>4,827 km</td></tr>
<tr><td>1 libra</td><td>0,454 kg</td></tr>
<tr><td>1galón (imperial)</td><td>4,546 l</td></tr>
</table>

a) ¿Cuántas libras pesás aproximadamente?

b) Desde Buenos Aires a Mar del Plata hay cerca de 400 kilómetros, ¿son más o menos de 100 leguas? Explicá cómo lo pensaste.

Explora colectivamente unidades de medida de información: *bytes*, *megabytes* (MB), *gigabyte* (GB), etc.

Por ejemplo:
Una carpeta con archivos “pesa” 683.710.531 *bytes*. ¿Cuántos MB tiene? ¿Entra en un *pendrive* de 512 MB?

</td></tr>
</table>

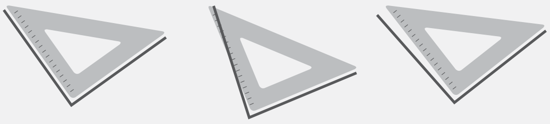
Primer ciclo	Nivel I
Resuelve problemas que implican componer pesos y capacidades con cuartos y medios litros y kilos sin exigencia de usar cálculos.	Resuelve problemas que implican componer pesos y capacidades con octavos, cuartos y medios litros y kilos sin exigencia de usar algoritmos.[12]
	Resuelve problemas que exijan estimar medidas de longitud, capacidad y peso, reconociendo que hay una diferencia con los resultados de la medición efectiva.

Por ejemplo:
Elegí objetos para completar el siguiente cuadro y ubicalos según su peso. Luego verificá la información recurriendo al uso de la balanza, buscando información en libros, en revistas, en internet, etc.

Menos de 200 g	Entre 500 g y 3 kg	Entre 10 y 50 kg	Entre 100 y 500 kg	Más de 1.000 kg

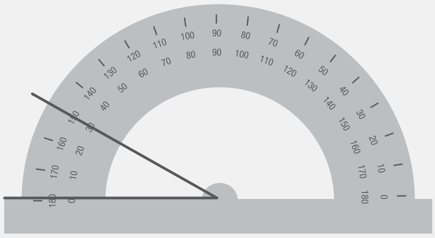
Mide ángulos usando la escuadra como unidad.

Por ejemplo:
Determiná si los siguientes son ángulos rectos, agudos u obtusos.



Usa el grado como unidad de medida.

Usa el transportador para determinar la medida de ángulos, en situaciones en que se ofrece un transportador dibujado. Por ejemplo, logra determinar que el ángulo dibujado mide 30°.



Estima la medida de ángulos, usando los 90° o 45° como referencia. Reconoce la independencia entre la medida de la amplitud del ángulo y la medida de la longitud de sus lados.

---

[12] En la tabla correspondiente a fracciones en el contexto de la medición también se incluye la composición y descomposición de cantidades expresadas en medios, cuartos y octavos.

Nivel II	Nivel III
Compara y establece equivalencias entre unidades de medida de longitud, de peso y de capacidad utilizando expresiones fraccionarias y decimales. Por ejemplo, determina que 3,25 metros equivale a 3 metros y $\frac{25}{100}$ de metro o $\frac{325}{100}$ metros.	
Resuelve problemas que demandan cálculos aproximados de longitudes, pesos y capacidades y tiempos. Por ejemplo: Un remedio indica que la dosis diaria es de 3 ml cada 5 kg de peso. ¿Cuánto tiene que tomar aproximadamente Joaquín, que pesa 37 kg?	
Usa el transportador para medir ángulos dibujados en diversas posiciones y para trazar ángulos, dada su medida en grados.	

Primer ciclo	Nivel I
En situaciones de intercambio grupal, explora la lectura de la hora en relojes digitales y analógicos.	Lee la hora en relojes digitales y analógicos.
Apela a algunas equivalencias de uso cotidiano para resolver problemas con medidas de tiempo (1 hora = 60 minutos).	Reconoce las equivalencias entre unidades de medida de tiempo o entre fracciones de unidades: horas y minutos; minutos y segundos; horas y días; y años, meses y días.

Nivel II	Nivel III
Usa relojes y calendarios para medir duraciones. Por ejemplo: Si esta es la hora actual:  ¿Qué hora será dentro de 1 hora y 45 minutos?	
Resuelve cálculos teniendo en cuenta las equivalencias entre días, horas, minutos y segundos. Realiza más de una transformación de unidades en los casos en que es necesario. Por ejemplo, calcula cuántos segundos hay en 1 hora 10 minutos.	Resuelve problemas que exigen el pasaje de una medida de tiempo expresada en números decimales a otra expresada en el sistema sexagesimal. Por ejemplo, reconoce a 1,5 horas como 1 hora 30 minutos. Explora en forma grupal las diferencias entre la organización del SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino) y el sistema sexagesimal. Por ejemplo, en una situación colectiva los alumnos analizan la diferencia que hay entre determinar cuántos metros son 200 centímetros o cuántas horas son 200 minutos.

2. Perímetro, área y volumen

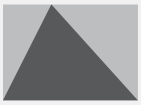
Perímetro, área y volumen

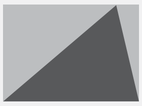
Nivel I	Nivel II
Calcula y compara el perímetro de figuras poligonales.	Resuelve problemas que implican reconocer que figuras de diferentes formas pueden tener el mismo perímetro. Por ejemplo: El perímetro de un rectángulo es de 12 cm. ¿Cuáles pueden ser las medidas de sus lados? ¿Hay una única posibilidad?
Mide y compara el área de figuras de lados rectos usando diferentes procedimientos (papel cuadriculado, superposición, cubrimiento con baldosas, etcétera), en situaciones en las que la unidad entra un número entero de veces. Por ejemplo: ¿Cómo se puede hacer para calcular la cantidad de baldosas que se necesitan para cubrir el piso de un patio representado en el dibujo con un rectángulo grande, si cada baldosa es como la que se representa con un rectángulo chico? 	Usa fracciones para expresar el área de una superficie considerando otra como unidad. Resuelve problemas que exigen establecer la equivalencia entre diferentes unidades de medida para medir el área. Por ejemplo, considerando que si la unidad de medida se reduce a la mitad, se necesita el doble de unidades para cubrir la misma superficie, o que, si se usa una unidad con el doble de superficie, se requerirá la mitad de unidades para cubrirla. Reconoce la independencia entre la medida del área y la forma de una figura. Por ejemplo: Estas dos figuras tienen igual área. Buscá una manera de comprobarlo.  Reconoce la independencia entre el área y el perímetro de una figura sin recurrir a la utilización de unidades de medida. Por ejemplo: Estas dos figuras tienen igual área pero distinto perímetro. Explicá cómo podés comprobarlo. 

Nivel III

Compara áreas apoyándose en las propiedades de las figuras, sin necesidad de una medición efectiva.

Por ejemplo:
Los siguientes triángulos están dibujados sobre tres rectángulos iguales. ¿Habrá alguno que tenga mayor área? Explicá como lo pensaste.





En situaciones colectivas elabora las fórmulas del área del rectángulo, cuadrado, rombo y triángulo.

Calcula el área de figuras usando como unidades de medida el cm^2 y el m^2.[13]

Resuelve problemas que exigen establecer relaciones entre diversas unidades de medida para expresar la medida del área de una figura. Por ejemplo, establece equivalencias entre cm^2, m^2, km^2 y ha.

Resuelve problemas que implican el cálculo del área de polígonos, trapecios y romboides por medio de descomposiciones en cuadrados, rectángulos y triángulos.

En situaciones colectivas, explora la variación del área de una figura en función de la variación de sus lados, bases o alturas. Por ejemplo, se analiza qué sucede con el área de un triánigulo si se duplica su altura, o en un rectángulo si duplican todos los lados.[14]

Resuelve problemas que requieren calcular perímetro y área del círculo y figuras circulares.

Resuelve problemas que requieran calcular el volumen de diferentes cuerpos, considerando unidades de medidas dadas: cubos, prismas, etc.

---

[13] Como se señala en la tabla correspondiente a las progresiones de números racionales, el cálculo del área resulta un contexto valioso para dar sentido a la multiplicación de fracciones y números decimales.

[14] Se espera que los alumnos puedan reconocer que en un rectángulo, si se duplica uno de los lados se duplica el área, pero si se duplican ambos lados, el área se cuadruplica. Es importante relacionar estos aprendizajes con lo que se señala en la tabla de las progresiones referidas a la multiplicación y la división: se espera que los niños resuelvan problemas que involucran organizaciones rectangulares, analizando el funcionamiento de la multiplicación y apoyándose en sus propiedades para dar explicaciones.

Actividades para relevar los aprendizajes

Se incluyen aquí algunos ejemplos de problemas que permiten recabar información sobre el estado de conocimiento de los alumnos en relación con el eje Medida.

Como ya se señaló, el trabajo con la medida en el segundo ciclo pone en juego aprendizajes muy diversos: el estudio de la longitud, la capacidad y el peso; las medidas de tiempo y de la amplitud de los ángulos; la medida del perímetro y el área de figuras. Todos estos aprendizajes se relacionan también con aprendizajes de otros contenidos, por ejemplo con las relaciones de proporcionalidad, los números racionales, etc.

A la hora de observar el desempeño de los alumnos, es necesario presentar aquellos tipos de actividades sobre las que se ha trabajado centralmente durante la enseñanza. Se proponen, a continuación, algunos ejemplos de situaciones posibles.

Situación 1. Relaciones de equivalencia entre unidades de longitud

Aquí está anotada la estatura de cuatro chicos: Camilo, Julieta, Octavio y Fede.

Escribí debajo los nombres de los cuatro chicos, ordenados del más alto al más bajo. Explicá cómo lo pensaste.

Camilo	Julieta	Octavio	Fede
125 cm	1 m y 50 cm	1 m y 50 mm	1,45 m

A partir de las respuestas se puede observar si el alumno:

- Resuelve correctamente expresando todas las medidas en la misma unidad (lo más probable es que sea en metros o en centímetros). Por ejemplo: reconoce que 1,45 m son 145 cm porque 1 m son 100 cm, o a la inversa, que 125 cm es 1,25 m, etcétera. En ese procedimiento está poniendo en juego las relaciones entre unidades: metros, centímetros y milímetros.
- Produce errores al establecer las equivalencias entre unidades de medida. Expresar la medida de Octavio en metros puede resultar más complejo porque requiere usar en la escritura un 0 intermedio indicando una posición (decímetros) vacía.
- Compara directamente los números involucrados pero sin considerar las unidades de medida. Podría afirmar entonces que Julieta y Octavio miden lo mismo o que Camilo mide más que Fede porque 125 es más que 1,45.

Situación 2. Establecer equivalencias entre unidades de medida de peso utilizando expresiones fraccionarias y decimales

¿Cuál o cuáles de las siguientes medidas equivalen a 4 kg y a 6 g? Marcá todas las que encuentres.

a) 4 kg + $\frac{6}{100}$ kg

b) 4 kg + $\frac{6}{1.000}$ kg

c) 4,6 kg

d) 4,006 kg

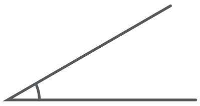
e) 4.006 g

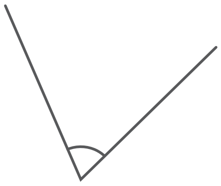
A partir de las opciones que marque el alumno es posible observar cuáles son las equivalencias entre unidades de medida y las relaciones entre fracción decimal y número decimal que puede reconocer:

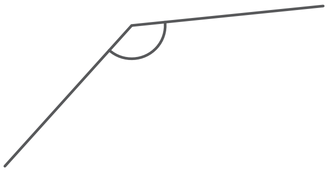
- En el ítem b) es necesario reconocer que 1 g es la milésima parte de un kg, es decir $\frac{1}{1.000}$, por lo tanto 6 g es $\frac{6}{1.000}$ kg.
- El ítem d) requiere establecer la misma relación que en el b) pero usando una escritura con coma decimal.
- El ítem e) implica reconocer que 4 kg equivalen a 4.000 g.
- Los casos a) y c) son incorrectos. Reconocer esto implica, en el caso del ítem a), considerar que como el gramo es la milésima parte del kilogramo, 6 gramos expresados en kilos no son $\frac{6}{100}$ sino $\frac{6}{1.000}$. En el caso c) hay que considerar que el 6 en esa posición equivale a $\frac{6}{10}$, por lo tanto no pueden ser gramos.

Situación 3. Medición de ángulos

Medí con el transportador cada ángulo y anotá la medida.

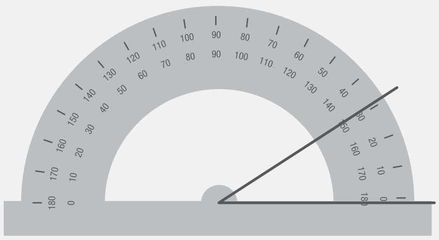






A partir de la resolución se puede analizar si el alumno:

- No logra medir ningún ángulo porque:
    - › Ubica mal el transportador.
    - › Ubica bien el transportador, pero elige el número de medida incorrecta (con aquellos transportadores que tienen doble numeración). Por ejemplo, determina que el primer ángulo mide 150° pues mira la medida que se indica “en el renglón de abajo”, sin tomar en cuenta que se trata de un ángulo menor a un ángulo recto.



- Logra medir correctamente el primer ángulo solamente.
- Logra también medir los otros dos.

Medir ángulos en los que uno de sus lados no sea paralelo a los renglones de la hoja resulta, generalmente, más complejo para los niños.

Es importante aclarar que las medidas que dé pueden ser aproximadas y deben tomarse también como correctas.

Situación 4. Relación entre la forma de una figura y su perímetro

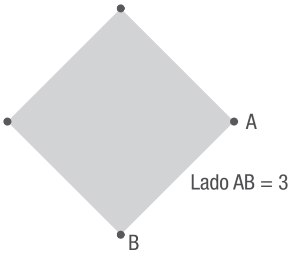
¿Es posible construir dos rectángulos diferentes, pero que ambos tengan un perímetro de 10 cm?
Si es posible, construilos. Si creés que no se puede, explicá por qué.

Se puede observar si el niño:

- No logra construir más que un rectángulo considerando que hay una sola forma posible para una medida de perímetro.
- Afirma que es posible porque dos figuras con formas distintas pueden tener el mismo perímetro, pero no logra construirlas o no lo hace correctamente pues no asigna una medida pertinente a los lados. Por ejemplo, un alumno podría pensar que como el perímetro es 10 cm, un lado debe medir 6 cm y el otro 4 cm, sin considerar que la suma de la medida de dos lados es 6 cm, y la suma de los otros dos, 4 cm.
- Logra construir dos rectángulos que cumplan la condición planteada.

Situación 5. Área y perímetro

Este dibujo representa un cuadrado cuyo lado mide 3 cm.



a) Calculá su área y su perímetro.

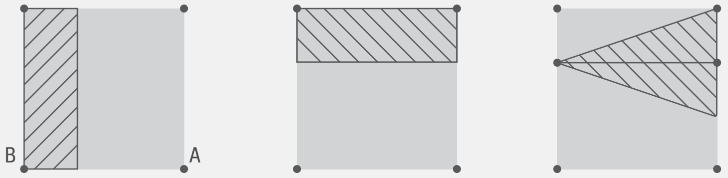
b) ¿Cómo se podría recortar el cuadrado para que quede una figura (no necesariamente un cuadrado) cuya área sea de 3 cm^2? Marcá sobre el dibujo la línea o las líneas por donde harías los cortes.

A partir de las resoluciones del ítem a), se puede analizar si el alumno calcula bien el perímetro y el área y diferencia correctamente ambos: el perímetro de 12 cm, el área de 9 cm^2, poniendo en juego la propiedad de los lados del cuadrado (todos tienen la misma longitud, por lo tanto cada lado mide 3 cm).

Puede suceder que algún alumno calcule correctamente el área pero la escriba en cm y no en cm^2. En ese caso es importante conversar con él para detectar si es un simple olvido o si es necesario volver a trabajar la diferencia entre las dos unidades de medida.

Otro error posible es que al calcular el perímetro solo considere dos lados (piensa en el área como lado por lado y entonces para el perímetro hace lado más lado) y escriba 6 cm como respuesta.

En el ítem b), es necesario que el alumno identifique que debe lograr una figura cuya área sea $\frac{1}{3}$ del área del cuadrado dado. Se pone en juego acá el trabajo con fracciones, el niño debe advertir que 3 es $\frac{1}{3}$ de 9. Además debe considerar la relación entre la parte y el todo: para que el área de la figura nueva resulte $\frac{1}{3}$ de la dada, no puede partir a cada lado en 3 partes, porque si fuera así le quedaría una figura cuya área es $\frac{1}{9}$ de la dada. Son varias las opciones de corte posibles, por ejemplo:



Para determinar las tres figuras (o similares) el niño puede poner en juego el cálculo del área del rectángulo o del triángulo. En el caso del rectángulo 1 cm × 3 cm, o en el triángulo (2 cm × 3 cm) : 2. También es posible en todos los casos considerar que la parte marcada entra 3 veces en el cuadrado y por lo tanto es $\frac{1}{3}$. Una idea puede servir de verficación de la otra. La tercera figura (o variante de ella) es más compleja, y por eso menos probable.

Situaciones didácticas e intervenciones docentes

Introducción

En este apartado se retoman algunos de los contenidos trabajados en las progresiones y se proponen intervenciones de enseñanza que podrían facilitar el avance en los aprendizajes de los niños. De esta forma, se busca acompañar la enseñanza teniendo en cuenta la diversidad de conocimientos que recorren los alumnos frente a cada contenido matemático y el largo plazo de ese proceso de construcción.

Se ha subrayado que el avance en el aprendizaje de la matemática no es natural y que depende de la enseñanza sistemática, intencional, prolongada y explícita recibida por los niños. Identificar sus conocimientos y poder ubicarlos en la perspectiva de un proceso es central para organizar la tarea de enseñanza. El deseo de intervenir de manera fructífera y la duda sobre cómo hacerlo se presentan continuamente en muchos maestros. En ese sentido, el objetivo de este apartado es poner a disposición de los docentes estrategias que podrían resultar fértiles para lograr avances dependiendo del momento en que se encuentran los niños en su aprendizaje. Se ofrecen ejemplos de actividades, preguntas y situaciones que si bien no constituyen una guía exhaustiva ni tienen intención prescriptiva presentan alternativas que pueden servir de apoyo. Se incluyen también, en algunos casos, producciones de niños y carteles con conclusiones elaboradas a partir del trabajo en la clase.[15] Son ejemplos que fueron producidos en el contexto del trabajo colectivo del aula en distintos grados y escuelas de la Ciudad. A estas propuestas será necesario, sin duda, sumar otras que las enriquezcan, completen y diversifiquen reconociendo que cada situación, grupo de alumnos e institución es particular y, por lo tanto, no es posible pensar en intervenciones únicas ni estandarizadas.

En toda intervención de enseñanza se busca que el niño pueda resolver la situación planteada y para ello se interactúa con él; al mismo tiempo, el propósito final es que pueda hacerlo por sí mismo. Entonces, ¿cómo regular la intervención para permitir que el niño se sostenga en la tarea, tratando de evitar sustituirlo en el trabajo intelectual que le va a permitir aprender? Parte del trabajo docente consiste en soportar esta tensión y buscar resolverla poniendo siempre en el centro el aprendizaje de cada uno de los chicos. Comprender qué sabe un niño es, entonces, importante para planear intervenciones de enseñanza. Conocer qué es capaz de realizar solo y qué puede realizar con ayuda resulta más valioso que la descripción de lo que aún no sabe. Lo

---

[15] Las autoras agradecen a todos los docentes que han compartido sus producciones.

que sabe será el apoyo sobre el que se actuará para provocar avances. Reconocerlo supone una interpretación de sus producciones y de sus respuestas; implica preguntarse: ¿qué sabe para poder producir esta estrategia?, ¿qué conocimientos está poniendo en juego? Escuchar lo que los niños dicen, preguntarles acerca de su producción, pedirles que expliquen sus procedimientos, comentar con ellos lo que suponemos que pensaron para resolver de la forma en que lo hicieron, son pasos importantes para construir y ajustar esas interpretaciones.

Por otro lado, reconocer y hacer que el niño reconozca lo que sí sabe le permite sentirse seguro para avanzar hacia lo que no sabe. El primer paso es buscar aquellas situaciones en las que es exitoso en la resolución para que construya una imagen positiva de sí mismo. Ese será el escalón sobre el que se podrá actuar para avanzar hacia aquellos aprendizajes que faltan. En el segundo ciclo, algunas veces, los niños ya han tenido una experiencia de trabajo en el área que los ha llevado a ubicarse en el lugar de “la matemática no es para mí”. Resulta muy importante, entonces, brindar oportunidades que les permitan posicionarse de otro modo frente a sus propias posibilidades de aprender y restituir progresivamente su confianza. Para poder avanzar en su aprendizaje es necesario que el alumno se dé cuenta de que puede producir respuestas por procedimientos propios, aun cuando inicialmente estén alejados de los que utiliza la mayoría del grupo o de aquellos a los que se apunta. Ocupa un lugar central en la tarea docente el propiciar que los niños generen un mejor y más rico vínculo con el conocimiento, asumiendo como premisa que bajo ciertas condiciones pedagógicas y didácticas todos los niños pueden aprender Matemática.

Avanzando en la escolaridad cobra particular relevancia formar a los niños como estudiantes de Matemática. Así como el aprendizaje no es una consecuencia inmediata de la enseñanza, no hay aprendizaje sin un trabajo personal del alumno. Este trabajo personal es el estudio y estudiar Matemática involucra mucho más que resolver ejercicios en la carpeta, aunque esta actividad esté incluida en el estudio. Estudiar también supone volver hacia atrás, revisar los problemas ya hechos, analizar los errores, identificar qué tipos de problemas se pueden resolver y cuáles no con determinada herramienta, elaborar conclusiones a partir de todo lo realizado, evocarlas y reconocer aquello que se espera que sea aprendido. Es responsabilidad de la enseñanza promover un recorrido que permita que los niños aprendan a estudiar y adquieran progresivamente mayor autonomía en ese estudio.[16]

Como ya se ha señalado, este documento necesita ser complementado con la lectura del documento *Progresiones de los aprendizajes. Primer ciclo. Matemática*. El hecho de que un alumno curse grados del segundo ciclo, no asegura que se haya apropiado de todos los

---

[16] Se recomienda la lectura de documentos curriculares que desarrollan propuestas para el aula que apuntan en ese sentido: GCABA, Secretaría de Educación, DGPLED (2005) *Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio. Documento N° 2. La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática*. 1ª ed., 1ª reimp. Disponible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/d2web01.pdf [consultado el 31/8/2018]. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, Subsecretaria de Educación, Dirección Provincial de Educación Primaria, Dirección de Gestión Curricular. Mejorar los aprendizajes. Área Matemática (s/f) *La evocación de conocimientos en una clase de sexto grado*. La Plata. Disponible en: http://abc.gob.ar/primaria/sites/default/files/documentos/la_evocacion_de_conocimientos_en_una_clase_de_6deg_ano.pdf [consultado el 31/8/2018].

conocimientos esperados para los grados anteriores. Por eso es probable que las situaciones e intervenciones de enseñanza desarrolladas en ese documento puedan ser también útiles para promover avances en los niños del segundo ciclo.

Se presenta a continuación una serie de sugerencias acompañadas de enlaces que permiten acceder a documentos curriculares de diversas jurisdicciones. Esos documentos incluyen propuestas de actividades y de secuencias de enseñanza para algunos de los contenidos abordados en este material.

Contenidos y aspectos de la enseñanza trabajados en este apartado

1. **Sistema de numeración**
    a) Leer, escribir y ordenar números de diversa cantidad de cifras
    b) Resolver problemas que relacionan el valor de la cifra y la posición que ocupa en el número (análisis del valor posicional)
2. **Análisis y resolución de problemas**
    a) Comprender problemas
        › El caso de los problemas de proporcionalidad
    b) Avanzar en las estrategias de cálculo para resolver problemas de multiplicación y división
        › El trabajo en torno al cálculo de multiplicación
        › El trabajo en torno al cálculo de división
3. **Divisibilidad**
4. **Números racionales**
    a) El trabajo en torno a las fracciones
        › Fracciones en el contexto de la medición y el reparto
        › Escritura y lectura de fracciones
        › Equivalencia de fracciones
        › Fracción de un número natural
        › Comparación de fracciones y representación en la recta numérica
        › Las fracciones como cociente entre números naturales
        › Operaciones con fracciones
    b) El trabajo en torno a los números decimales
        › El inicio del trabajo con los números decimales en el contexto del dinero y las medidas de longitud
        › Fracciones decimales y números decimales
        › Valor posicional: relación entre el valor de cada cifra y el lugar que ocupa en el número
        › Operaciones con números decimales
        › Números decimales, fracciones decimales y medida
5. **Geometría**
6. **Medida**

1. Sistema de numeración

a) Leer, escribir y ordenar números de diversa cantidad de cifras

Intervenciones de enseñanza

Al proponer situaciones de escritura y lectura de números, el tipo de números propuestos dependerá del rango numérico que se esté trabajando en particular.

En situaciones grupales es posible presentar la opción de leer o escribir números de mayor cantidad de cifras de las que se estén trabajando en particular para ayudar a sistematizar algunas regularidades, sin el objetivo, en ese momento, de asegurar el dominio de la lectura y escritura por parte de los niños. Por ejemplo, en un grado se puede estar trabajando específicamente con números de 5 o 6 cifras para sistematizar su lectura y escritura, y, sin embargo, proponer otras situaciones de discusión sobre números mayores como: *si este (31.000.000) es treinta y un millones, cómo se escribirá el treinta y un millones cuatrocientos*, con la intención de reparar en información que da la numeración oral para la escritura y las regularidades con respecto a la cantidad de cifras. En este caso, se podría analizar que como el nombre de ambos números empieza igual, su escritura también, o sea comenzará con "31", y por otro lado, ambos deberán tener ocho cifras.

En el documento *Progresiones de los aprendizajes. Primer ciclo. Matemática* se señala que la correspondencia entre el nombre de los números y su escritura no es directa: a partir del nombre no se puede deducir directamente la escritura ni viceversa. Esta falta de correspondencia entre ambos tipos de representación da lugar a ciertos errores que los niños producen. No es tarea fácil para un niño descubrir qué es lo que está oculto en la numeración hablada y qué es lo que está oculto en la numeración escrita, se hace necesario reconocer cuáles son las informaciones provistas por la numeración hablada que resulta pertinente aplicar a la numeración escrita y cuáles no (por ejemplo, en el nombre de los números no se observa explícitamente el o los ceros que puede incluir su escritura, el nombre del número explicita la potencia de la base que no se escribe pues está implícita en la posición de cada cifra, en la escritura se usan puntos que no tienen referencia en la numeración oral, etcétera). Es importante tener en cuenta que, en segundo ciclo, al avanzar hacia números mayores, esta relación entre el nombre y la escritura se complejiza:

- En los números de hasta 4 cifras, a cada una de las potencias de diez le corresponde un nuevo nombre: 10^1 (diez), 10^2 (cien), 10^3 (mil). Lo mismo ocurre con 10^6 (millón). Pero no sucede esto con los nombres que corresponden a: 10^4 (diez mil), 10^5 (cien mil), 10^7 (diez millones), 10^8 (cien millones), etcétera. Esas potencias no tienen nuevos nombres, sino una conjunción de dos nombres de potencias menores. Esto provoca que, en algunos casos, al nombrar un número se mencione una potencia de diez menor antes que otra mayor: *cuatro* ***mil*** *millones.* También puede suceder que se repita el nombre de una potencia de diez en el mismo número: *diez millones* ***cien*** *mil* ***cien***. Ninguna de estas dos situaciones se produce con los números de hasta cuatro cifras, en los que las potencias de diez se nombran siempre de mayor a menor y se mencionan una sola vez al decir un número: ***mil*** cuatro***cientos*** ochenta.

- Los puntos no tienen referencia en la lengua oral, pero ayudan a interpretar escrituras numéricas. Los niños suelen producir sus propias interpretaciones del uso y función de los puntos en la escritura de los números.

Teniendo en cuenta lo señalado, es posible que al leer números el niño:

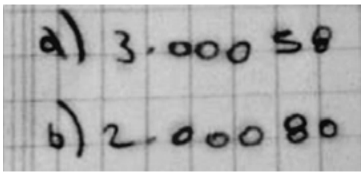
- Genere nombres no convencionales, en particular en números que tienen puntos en su escritura. Por ejemplo, a 3.147.456 lo lee como "*tres mil ciento cuarenta y siete mil cuatrocientos cincuenta y seis*".

- Cambie el rango al que pertenecen. Por ejemplo, a 103.024 lo lee como "*diez mil trescientos veinticuatro*".

- Asigne a cada punto un nombre de una potencia cada vez mayor. Por ejemplo: a 1.234.340.230 lo lee como "*un billón, doscientos treinta y cuatro millones trescientos cuarenta mil doscientos treinta*".

A la vez, es posible que al escribir números:

- Produzca escrituras que reflejan todo lo que se enuncia en la emisión oral. Por ejemplo, para 3.058 y 2.080, un alumno escribe:

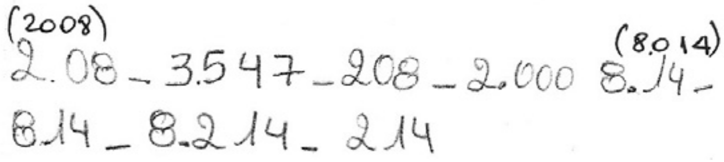


a) 3.000 58
b) 2.000 80

- Produzca escrituras en el rango de los "miles" o "millones" omitiendo los ceros intermedios. Por ejemplo: un alumno escribe "*18.14*" para *dieciocho mil catorce*.

Como se puede observar en los ejemplos que siguen, a la hora de escribir números los niños pueden producir escrituras convencionales en algunos casos, incluso en números mayores y en otros, aunque sean menores, no. La cantidad de cifras no es necesariamente lo que hace que un número resulte más complejo de leer o escribir que otro. En ese sentido, la presencia de ceros intermedios o si se trata de números redondos o no, son variables centrales a tener en cuenta.

Por ejemplo, Milagros, de 4º grado, escribe:

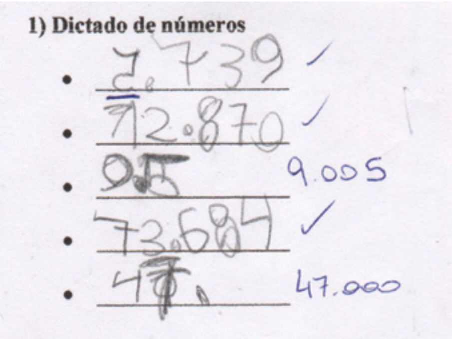


(2008) (8.014)
2.08 - 3.547 - 208 - 2.000 8.14 -
8.14 - 8.214 - 214

Frente a esta escritura, la docente le pregunta si es posible que dos números diferentes (haciendo referencia al *dos mil ocho* y al *doscientos ocho*) puedan escribirse de la misma manera. Milagros responde que no están iguales esas escrituras, pues una tiene el punto (*2.08*) y la otra no (*208*).

Ella, como Franco en el ejemplo siguiente, pueden escribir convencionalmente números redondos de cuatro o cinco cifras o números de cuatro o cinco cifras sin ceros intermedios, pero producen errores en números que incluyen ceros intermedios y le asignan al punto el valor de “mil”, sin tener en cuenta la cantidad de cifras.

Franco escribe:



1) Dictado de números

- 2.739 ✓
- 72.870 ✓
- 95 9.005
- 73.684 ✓
- 47. 47.000

En ambos casos, el docente puede hacer referencia a la escritura y el nombre de los números redondos como apoyo para revisar esas escrituras que resultaron erróneas. Por ejemplo: *Si el nueve mil se escribe así (9.000) con cuatro cifras, ¿cuántas cifras tendrá el 9.005? ¿Puede ser que tenga solo dos cifras?; si este es el cuarenta y cinco mil (45.000), ¿cómo será el cuarenta y siete mil? ¿Puede ser que tenga solo dos cifras? ¿Menos cifras que el cinco mil setecientos treinta y nueve que escribiste arriba?* Restituir el nombre y la escritura correcta de los números redondos y hacer referencia a la cantidad de cifras es una ayuda muy importante para que los niños puedan controlar sus propias escrituras. En ambos casos también, la explicitación de que el punto no alcanza para que un número sea “de los miles” y que lo central es la cantidad de cifras, puede permitir que el niño revise sus escrituras.

Algunas intervenciones que un maestro puede realizar para ayudar a un niño en particular a escribir o leer números son:

- Remitir a carteles informativos que estén pegados en las paredes del aula o en las carpetas (resultan esenciales para que los alumnos recuperen discusiones anteriores).

- Pedirle al niño que anticipe, antes de escribir, la cantidad de cifras que deberá tener un número determinado. Por ejemplo: hacerlo notar que, si el doscientos cuarenta mil quinientos *es de los cien miles*, entonces tendrá 6 cifras.

- Proveer el nombre correcto de un número y su escritura, para que sirva de apoyo para la escritura de otro. Por ejemplo: *Este número (20.020) es el veinte mil veinte, ¿cómo se llamará este número (20.040)?*

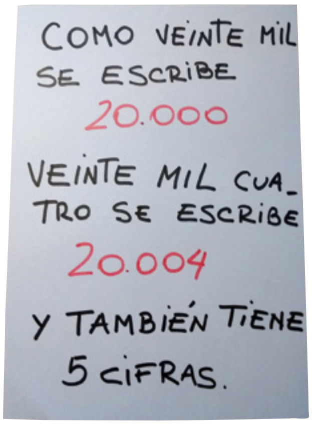
Como intervención general en situaciones grupales puede resultar pertinente proponer la reflexión en torno a las relaciones entre la numeración oral y la numeración escrita. Es importante sistematizar las conclusiones que se deriven de esas discusiones en carteles para el aula y para los cuadernos a los que poder referir luego en todos los casos en los que sea necesario.

Por ejemplo, dejar registro sobre:

- La escritura y el nombre de los números redondos que corresponden al rango numérico que se está trabajando. Por ejemplo:

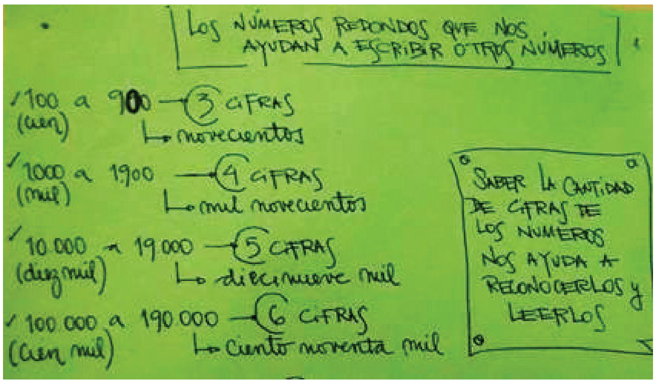
1.000	MIL
10.000	DIEZ MIL
100.000	CIEN MIL
1.000.000	UN MILLÓN
10.000.000	DIEZ MILLONES

- El apoyo que ofrecen los números redondos para escribir otros:



COMO VEINTE MIL
SE ESCRIBE
20.000
VEINTE MIL CUATRO SE ESCRIBE
20.004
Y TAMBIÉN TIENE
5 CIFRAS.

- Las regularidades referidas a la cantidad de cifras de cada orden:



LOS NÚMEROS REDONDOS QUE NOS AYUDAN A ESCRIBIR OTROS NÚMEROS

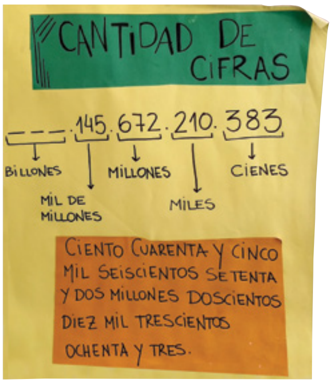
✓ 100 a 900 → ③ CIFRAS
(cien)
└ novecientos

✓ 1000 a 1900 → ④ CIFRAS
(mil)
└ mil novecientos

✓ 10.000 a 19.000 → ⑤ CIFRAS
(diez mil)
└ diecinueve mil

✓ 100.000 a 190.000 → ⑥ CIFRAS
(cien mil)
└ ciento noventa mil

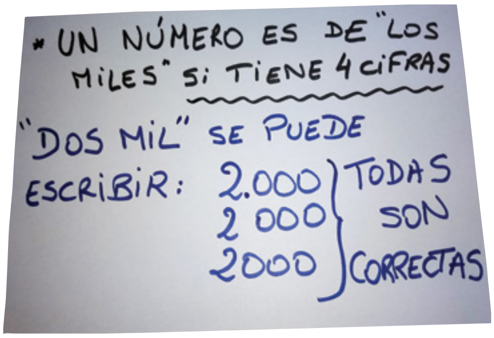
SABER LA CANTIDAD DE CIFRAS DE LOS NÚMEROS NOS AYUDA A RECONOCERLOS Y LEERLOS



CANTIDAD DE CIFRAS

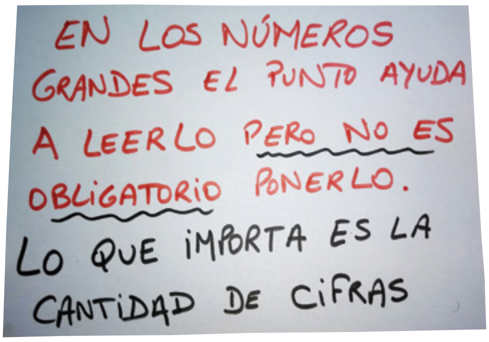
CIENTO CUARENTA Y CINCO MIL SEISCIENTOS SETENTA Y DOS MILLONES DOSCIENTOS DIEZ MIL TRESCIENTOS OCHENTA Y TRES.

- El rol del punto en los números escritos, ya que muchos alumnos consideran que con la presencia del punto alcanza para que un número sea, por ejemplo, de los miles.



* UN NÚMERO ES DE "LOS MILES" SI TIENE 4 CIFRAS

"DOS MIL" SE PUEDE ESCRIBIR: 2.000, 2 000, 2000 TODAS SON CORRECTAS



EN LOS NÚMEROS GRANDES EL PUNTO AYUDA A LEERLO PERO NO ES OBLIGATORIO PONERLO.

LO QUE IMPORTA ES LA CANTIDAD DE CIFRAS

b) Resolver problemas que relacionan el valor de la cifra y la posición que ocupa en el número (análisis del valor posicional)

En el segundo ciclo los niños deben avanzar y profundizar su comprensión sobre el funcionamiento del sistema de numeración. Esto implica comprender no solamente qué valor tiene cada cifra según su posición en el número, sino comprender además la organización recursiva de los agrupamientos: cada diez elementos de un orden se conforma un elemento del orden superior siguiente (con diez decenas se conforma una centena, con diez centenas se conforma una unidad de mil, etcétera). En ese sentido, el avance implica que, por ejemplo, los niños puedan reconocer que en el número 4.567 hay 45 centenas pues 4 unidades de mil son 40 centenas. Esta recursividad de los agrupamientos resulta más sencilla de identificar entre posiciones contiguas de las cifras, pero hay que reconocerla también entre posiciones no contiguas. Por ejemplo, en el 3.036 hay 303 decenas porque 3 unidades de mil son 300 decenas. Comprender el sistema en términos de "unidad, decena, centena, unidad de mil, etcétera" implica comprender este aspecto multiplicativo de nuestro sistema de numeración.

Se busca además que los niños sean capaces de utilizar la información contenida en la escritura decimal para desarrollar métodos de cálculo exacto o aproximado. Es importante que el docente explicite a los niños que es posible utilizar esa información para resolver cálculos pues no necesariamente todos los alumnos establecen ese vínculo por sí solos.

Intervenciones de enseñanza

A continuación, se retoman las intervenciones propuestas en el documento *Progresiones de los aprendizajes. Primer ciclo. Matemática* para el trabajo con sistema de numeración, dado que pueden resultar también pertinentes con niños del segundo ciclo ajustándolas en función de los nuevos rangos numéricos:

- Discutir con los alumnos la forma de componer y descomponer cantidades en el trabajo en el contexto del dinero. Es posible plantear juegos donde se usen billetes y monedas de $1, $10, $100, $1.000 y $10.000, etcétera (según el campo numérico que se esté trabajando). Por ejemplo, se puede preguntar: *¿Alcanza con solo mirar el número para saber qué cantidad de billetes de $10, de $100 y de $1.000 y monedas de $1 hay que utilizar para pagar $3.560?*

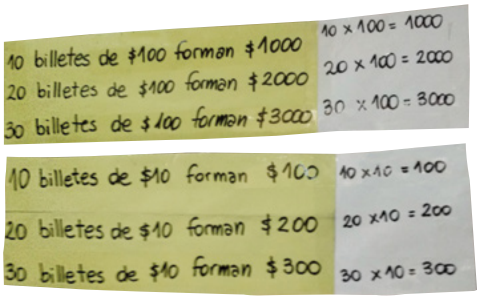
- Generar conclusiones a partir de ese intercambio. Por ejemplo: *Si el número tiene cinco cifras, la primera te dice cuántos de diez mil hay, la segunda cuántos de mil, la tercera cuántos de cien, etc.*

- Proponer el mismo tipo de trabajo –componer y descomponer números apoyándose en las potencias de 10– en otros contextos. Por ejemplo, a partir de juegos de puntería, o calculadora, etcétera: *En el visor de la calculadora aparece el número 25.816, con un solo cálculo convertirlo en 25.016.*

- Promover el vínculo entre los distintos contextos en los que se ha trabajado. Por ejemplo: *¿Podemos usar lo que aprendimos con los billetes para averiguar los puntos que se obtienen en los juegos de emboque? Lo que aprendimos con los billetes, ¿sirve para resolver el problema con la calculadora?*

En el segundo ciclo es necesario promover, como se señaló, la profundización en el análisis del valor posicional en cuanto a las relaciones entre las distintas posiciones de las cifras en un número: 10 de 10 forman uno de 100; luego también 10 de 100 uno de 1.000, 10 de 1.000 forman 10.000, etcétera, primero entre posiciones contiguas (decenas con centenas; centenas con unidades de mil, etcétera) y luego entre posiciones no contiguas (decenas con unidades de mil, etcétera). Si frente a la situación de tener que determinar cuántos billetes de 100 y monedas de 1 se necesitan para obtener $3.436, un niño no encuentra una estrategia de resolución, es posible preguntarle si se puede armar $1.000 con billetes de $100 (en el caso de que haya en el aula conclusiones escritas sobre esa relación, será valioso remitirlo a ellas). A partir de allí avanzar preguntando: *Si con 10 de 100 tengo 1.000, ¿cuánto tendré con 20 billetes de $100?, ¿y con 30?* Escribir junto con él esas relaciones que van surgiendo permite sistematizar cierta regularidad (10 de 100 “hacen” 1.000; 20 “hacen” 2.000; etcétera) y dejar esa información disponible para poder recurrir a ella en otras situaciones.

Vincular la recursividad de agrupamientos de a 10 con la multiplicación por 10, 100 y 1.000 permite poner en primer plano el aspecto multiplicativo del sistema de numeración. Por ejemplo:



10 billetes de $100 forman $1000	10 × 100 = 1000
20 billetes de $100 forman $2000	20 × 100 = 2000
30 billetes de $100 forman $3000	30 × 100 = 3000
10 billetes de $10 forman $100	10 × 10 = 100
20 billetes de $10 forman $200	20 × 10 = 200
30 billetes de $10 forman $300	30 × 10 = 300

Es necesario tener en cuenta que cuanto mayor sea el grado de generalidad que se solicite en las formulaciones, la complejidad se incrementa para los niños. Por eso es necesario abordar este contenido en instancias de trabajo colectivo antes de exigir individualmente la disponibilidad de estas conclusiones. Será necesario un progresivo trabajo de contextualizaciones y descontextualizaciones para ir hacia formulaciones más generales.

Hay otras situaciones que permiten avanzar sobre el conocimiento del valor posicional de las cifras. Por ejemplo, problemas del tipo: *¿Cuántos paquetes de 100 ganchitos se pueden armar con 432? ¿Sobran algunos? ¿Cuántos?* En este caso, es posible que muchos niños planteen algunos cálculos de división o de multiplicación. Lo central será discutir si es posible responder esa pregunta analizando la información que provee la escritura del número 432 sin necesidad de resolver ningún cálculo. Así la división 432 : 100 podrá ser respondida a partir de utilizar la información que dan las cifras del número. Incorporar este tipo de problemas permite avanzar en otro contexto para profundizar el análisis de las propiedades del sistema de numeración y su relación con la división por la unidad seguida de cero: *Si las cifras representan agrupamientos de 10, 100, 1.000, etcétera, será posible, entonces, usar esa información para responder preguntas sobre ese tipo de agrupamientos.* En este caso en particular, *si en el 432 hay 4 de 100, entonces será posible concluir que se pueden armar 4 paquetes y van a sobrar 32, que no llegan a armar paquetes de 100.* Se trata, en definitiva, de hacer confluir la división por 10, 100, 1.000, etcétera y las propiedades de nuestro sistema de numeración. En las discusiones será importante que se haga explícita esa relación. Así, el avance tendrá que ver luego con la posibilidad de descontextualizar esas relaciones, respondiendo estas preguntas: *¿Y cómo podemos saber cuánto da el cociente y el resto de cualquier número dividido 10, 100 o 1.000, sin hacer la cuenta? ¿Es posible? ¿Cómo?* Esas formulaciones generales surgidas también pueden volcarse en carteles o textos para las carpetas.

El trabajo con otros sistemas de numeración antiguos, posicionales y no posicionales (la numeración romana, egipcia, china, etcétera) es también una oportunidad para reflexionar sobre las propiedades de nuestro sistema de escritura de números. Es importante aclarar que este tipo de actividades no tiene como objetivo que los alumnos dominen la lectura y la escritura de números en otros sistemas, sino que, a partir del contraste, puedan comprender mejor las características y propiedades del sistema decimal posicional.

Documentos curriculares para consultar

GCABA, Ministerio de Educación (2017) *Matemática. 2º ciclo. Primera parte. Material para el alumno.* Aceleración y Nivelación. Serie Trayectorias Escolares. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/528/download [consultado el 11/10/2018].

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, Dirección General de Cultura y Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección Provincial de Educación Primaria, Dirección de Gestión Curricular (2007). *Matemática Nº 2 A. Numeración. Propuestas para alumnos de 3° y 4° año. Material para el docente.* Serie Curricular. La Plata. Disponible en: http://abc.gob.ar/primaria/sites/default/files/documentos/matematica_ndeg_2_a._numeracion._propuestas_para_alumnos_de_3deg_y_4deg_ano._material_para_el_docente.pdf [consultado el 11/9/2018].

Ministerio de Educación de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (2014) *Grado de Aceleración 6°/7°. Matemática. Primer tomo. Números y operaciones, parte 1. Material para el docente.* Proyecto Conformación de Grados de Aceleración, pp. 17-31. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/522/download [consultado el 28/02/2018].

Ministerio de Educación de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, DGPLEDU, DCyE (2010) *Matemática. Cálculo mental con números naturales.* Aportes para la enseñanza. Escuela Primaria, pp. 48-61. Disponible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/numeros-naturales_web.pdf [consultado el 11/9/2018].

Ministerio de Educación de la Nación (2012) Fascículos *Y los números… ¿dónde están?, ¿Hay un lugar para los números? y Cifras a medida.* Serie Piedra Libre para todos. Disponible en: http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=118471&coleccion_id=118471&categoria_id=16537 [consultado el 5/2/2018].

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2007) *NAP. Matemática 4 y 5. Segundo ciclo EGB / Nivel Primario.* Serie Cuadernos para el aula. 4º grado: pp. 38-49 y 5º grado: pp. 38-48. Disponible en: http://repositorio.educacion.gov.ar [consultado el 8/1/2019].

2. Análisis y resolución de problemas

Como se señala en el documento *Progresiones de los aprendizajes. Primer ciclo. Matemática*, resolver problemas es una tarea de mucha complejidad que requiere de la articulación de diversos aprendizajes. Implica entender que el enunciado planteado relata una cierta situación, en la que se incluyen una serie de datos que están relacionados de determinada manera. Ese enunciado presenta también preguntas, incógnitas que hay que resolver a partir de ese texto, el niño debe entonces decidir realizar ciertas "acciones" que permitan responder esas preguntas planteadas.

Los problemas, en general, son comunicados a través de un texto escrito. El enunciado de un problema es un escrito matemático particular que tiene características propias y diferentes de cualquier otro tipo de texto. Es necesario que los alumnos aprendan a trabajar con este tipo de texto que requiere representarse no solo la situación descripta en el enunciado, sino también la tarea asociada a la situación que debe resolverse (se trata de distribuir una cantidad, de comparar una cantidad con otra, de establecer la reunión entre dos cantidades, etcétera). Por otra parte, requiere identificar, seleccionar y organizar datos, "traducir" esta organización en términos matemáticos eligiendo una estrategia pertinente, escribir esa estrategia de manera comunicable, controlar la razonabilidad de los resultados obtenidos.

Entonces, para que los alumnos aprendan a resolver problemas no alcanza con enfrentarlos a ellos. Es necesario plantear actividades específicas destinadas a su aprendizaje. Este trabajo de análisis de enunciados, datos y preguntas puede hacerse tanto a partir de los problemas que se presentan para enseñar cualquiera de las operaciones, como con actividades específicas en las cuales el objetivo de enseñanza no esté centrado en la resolución de los cálculos. Los alumnos necesitan comprender la situación de referencia y muchas veces el maestro tiene que mediar para que esa situación sea realmente comprendida por todos. Tienen que aprender, además, a identificar datos, incógnitas y soluciones en los diferentes problemas. En este sentido, será necesario generar instancias de discusión sobre cuáles son los datos pertinentes o cuáles deberían estar presentes para resolver un problema, cómo se relacionan esos datos entre sí, cuál es la pregunta que se plantea, si es posible encontrar una solución con los datos disponibles, si hay más de una solución, una sola o si no es posible encontrarla.

a) Comprender problemas

Intervenciones de enseñanza

En el segundo ciclo, el avance en el aprendizaje de las operaciones incluye resolver problemas que amplíen los sentidos de las operaciones trabajados en primer ciclo. De esta forma se introducen nuevos tipos de problemas en los que resulta menos evidente para los niños la relación entre las situaciones planteadas y las operaciones de multiplicación y división (por ejemplo, problemas de combinatoria, problemas de división en los que no hay repartos, entre otros).

En el primer contacto con un nuevo tipo de problemas es deseable favorecer que los alumnos puedan desplegar procedimientos diversos que les permitan encontrar la respuesta. Es probable que frente a una situación de reparto como: *Hay que distribuir 5.600 libros en cajas de 35 libros, ¿cuántas cajas se necesitan para colocarlos a todos?*, algunos alumnos reconozcan que es posible usar la división. Sin embargo, frente a esta otra situación: *Ana María tiene en el banco $16.650. Todos los días retira $370. ¿En cuántos días habrá retirado todo el dinero?*, es probable que esos mismos alumnos no reconozcan directamente que allí también es posible realizar una división y apelen a otros procedimientos como sumas o restas sucesivas, aproximaciones mediante multiplicaciones parciales, etcétera. Resulta conveniente explicitar a los alumnos que pueden recurrir a diferentes estrategias: dibujos, esquemas, cuentas según lo que necesiten, con el fin de habilitar en el aula el permiso a probar diversas formas de resolver.

También es posible que algunos niños, frente a un problema de un nuevo tipo, digan que no entienden cómo resolverlo o que lo resuelvan incorrectamente. Un paso importante para destrabar la situación es que logren hacerse una representación de la situación que plantea el problema. El maestro puede ayudar a que eso suceda. Para proporcionar esta ayuda necesitará identificar aquello que en la formulación del enunciado podría constituir un obstáculo: una situación que no es familiar, terminología que no es conocida, etc.

Algunas intervenciones posibles son:

- Pedir al niño que reformule lo que sí entendió del enunciado. Se trata de ayudarlo a expresar lo que comprendió, eventualmente iniciando el relato y dándole lugar a continuarlo.

- Releer el problema junto con el alumno.

- Ayudar a identificar la incógnita y los datos que se presentan.

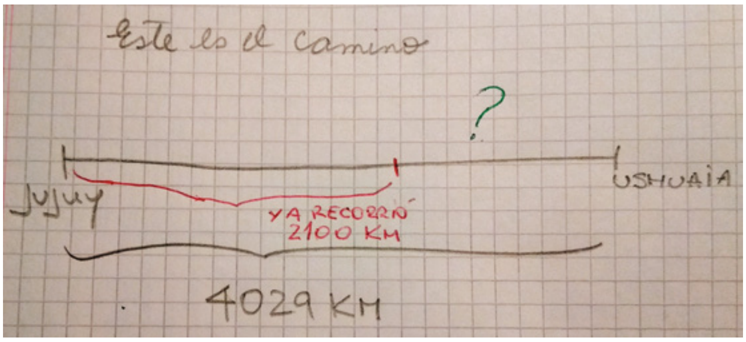
- Modificar los números en juego –por números más pequeños o redondos, por ejemplo–, proponer que resuelva con esos números y luego volver, si es posible, a pensar nuevamente el problema original.

- Remitir a enunciados similares trabajados anteriormente para establecer relaciones con el nuevo problema. Por ejemplo: *En el problema de la panadería, que hicimos ayer, tuvimos que repartir panes en los canastos. En este problema de hoy, ¿hay que repartir también? ¿Nos sirve ahora lo que usamos con los panes?*

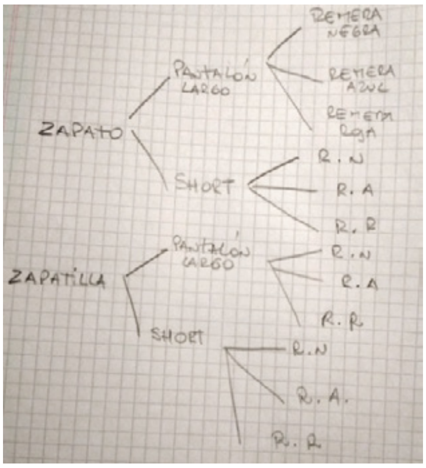
- Leer conclusiones anteriores que se hayan registrado y sean pertinentes para la nueva resolución. Por ejemplo, si a partir del trabajo con problemas de división se ha discutido y escrito en un cartel: *En los problemas en los que hay que averiguar cuántas veces entra un número en otro, se puede dividir*; se puede leer cuando algún alumno o grupo de alumnos enfrente otras situaciones similares.

- Proponer a los alumnos que dibujen, iniciar un dibujo para que lo continúen o producir junto a los niños esquemas que representen la situación.

Por ejemplo, para el problema: *Joaquín está haciendo un viaje desde San Salvador de Jujuy hasta Ushuaia. La distancia total es de 4.029 kilómetros. Si ya recorrió 2.100 kilómetros, ¿cuántos kilómetros le falta recorrer?*, se podría armar con los niños una representación como la que se incluye debajo, porque graficar la situación puede ayudar a comprender lo que se pregunta y a elaborar una estrategia posible: se trata de averiguar la distancia entre 2.100 y 4.029, ¿cuánto le falta a 2.100 para llegar a 4.029? De esta manera discutir entonces qué operación matemática sirve para esa búsqueda: completar una suma 2.100 + …… = 4.029 (suma que se puede completar apoyándose en repertorios trabajados), o bien, realizar una resta.



Las representaciones en esquemas o diagramas son herramientas de las que los niños se deben ir apropiando progresivamente. Contribuyen a identificar y establecer semejanzas entre problemas. En ese sentido, los diagramas de árbol merecen una mención especial. Son particularmente pertinentes en el caso de los problemas de combinatoria dado que permiten encontrar un modo de contar exhaustivamente las combinaciones posibles entre elementos de los conjuntos involucrados. El siguiente es un ejemplo de resolución –utilizando un diagrama– de un problema de combinatoria en el que se pide averiguar todas las combinaciones posibles entre remeras (negra, azul y roja), pantalones (largos o *shorts*) y calzado (zapatillas o zapatos).



Así, en nuevos problemas, decidir si es posible o no utilizar un diagrama similar al ya utilizado en otros anteriores puede contribuir a su mejor comprensión y a encontrar entonces más fácilmente una estrategia de resolución. Puede resultar valioso que luego, en situaciones colectivas de discusión, se establezcan vínculos entre estos procedimientos con el cálculo de la multiplicación.

Después de la instancia de resolución es importante dar lugar a la reflexión sobre lo trabajado. La socialización de procedimientos posibles, que hayan surgido en el grupo o que el maestro considere pertinente aportar, permite que circulen entre los alumnos estrategias diversas. Algunas cuestiones importantes a considerar en ese sentido son:

- Decidir qué procedimientos elegir para poner en discusión dependerá de los propósitos de enseñanza y las posibilidades que el conjunto de alumnos haya movilizado. A veces, es posible que algún niño produzca una estrategia valiosa, pertinente y muy elaborada, pero que puede resultar aún demasiado compleja de comprender para la mayoría los alumnos. No se trata de discutir todas las opciones que surjan en la clase. Por otro lado, es importante que durante esa socialización las preguntas se dirijan a toda la clase y no solo al autor de la resolución que se está analizando: *Para resolver 42 × 15, Miguel cuenta que hizo 40 × 15 y 2 × 15, ¿de dónde salió ese 40 que usó Miguel?*

- Detener el análisis en momentos parciales de la resolución de un alumno para considerar la relación entre los cálculos realizados y el problema a resolver: *¿Hasta acá qué es lo que averiguamos? ¿Y qué falta averiguar?*

- Establecer relaciones entre problemas distintos pero que se resuelven con la misma operación. En segundo ciclo, se amplía el tipo de problemas que se resuelven con la división y la multiplicación. Generar momentos de análisis de las diferencias y similitudes entre problemas y establecer conclusiones sobre eso son situaciones fértiles para establecer la relación entre nuevos problemas y otros anteriores que apelan a distintos sentidos de una misma operación.

  Los siguientes diálogos producidos durante una clase son ejemplos de este tipo de situaciones. En ambos ejemplos el docente interviene para promover vínculos entre un problema que acaban de resolver los alumnos y otros problemas resueltos en clases anteriores. En la primera situación se vinculan problemas de división que implican sentidos distintos. En la segunda situación, se promueve la relación entre problemas de división similares en contextos diferentes.

Situación 1

En clases anteriores, los chicos habían estado resolviendo problemas de reparto y partición. En esta clase se enfrentan por primera vez con un problema de división en el que se moviliza un sentido diferente: *Joaquín cobró $370; si gasta en comida $12 ¿para cuántos días le alcanza? ¿Cuánta plata le queda para comer al día siguiente?* Cuando cada grupo termina de trabajar, se realiza la puesta en común.

Maestra: *¿Saben lo que me quedé pensando? […] Leo le dijo a su equipo que no podía ser una división porque no es un problema de repartir. ¿Tiene razón o no?*

Pedro: *Está mal…*

Cristian O: *No, no tiene razón... No se reparte* ***¿cómo te puedo explicar?*** *No es como que se reparte, es como que… Es un problema de gastar.*

Maestra: *Entonces si es de gastar ¿es un problema de menos, como dijo Leo?*

David: *Cuando es de división te das cuenta porque la pregunta te dice que tenés que repartir.*

Pedro: *Sí, pero este es como que reparte la plata en días… es como que tenés la plata y le das a chicos.*

David: *Es* ***como si*** *los días fueran chicos y* ***hay que darle*** *12 a cada uno.*

Maestra: *Entonces, yo sé que tengo que darle 12 a cada uno y no sé para cuántos me alcanza. Lo que no sé es cuántos "doces" puedo sacar. ¿Saben lo que dijeron unos chicos de otro grado resolviendo este problema?*

Varios: *No, ¿qué?*

Maestra: *…qué había que ver "cuántos 12 entraban en 370"...*

David: *Sí, es así.*

Cristian O: *Una cuenta de multiplicar 30 veces 12, son 30 los que entra.*

Maestra: *Entonces, es un problema en el que hay que averiguar cuántas veces entra el 12, ¿es correcto decirlo?*

Cristian O: *Si hacés 12, 12, 12, 12, hacés directo 12 × 10 y es 120 y ves que podés más y 12 × 20 es 240 y 12 × 30 te da 360 y entonces parás…*

Maestra: *Entonces, si es un problema en el que hay que armar grupitos de 12…*

Leo: *Armar grupos…* ***Entonces ¡es una división!***

Sobre la base de los intercambios que se suceden, la maestra propone una formulación más general que abarca las dos situaciones y que ya está descontextualizada. Deja de hablar de chicos, días y dinero, y plantea relaciones entre números: …*Yo sé que tengo que darle 12 a cada uno y no sé para cuántos me alcanza. Lo que no sé es cuántos "doces" puedo sacar. ¿Saben lo que dijeron unos chicos de otro grado resolviendo este problema?… qué había que ver "cuántos 12 entraban en 370*"… La docente interviene, entonces, para promover la relación entre problemas de división diferentes, con el propósito de que los alumnos comprendan qué es lo que tienen en común para ser resueltos con la misma operación. En este caso, se trata de que analicen que dividir es también buscar cuántas veces entra un número en otro.

Situación 2

En la clase siguiente los chicos resuelven este problema: *Si estoy en el número 389 y doy saltos de 6 en 6 para atrás, ¿a qué número llego antes del 0*?

Luego de la resolución, la maestra destina un momento a la reflexión compartida e interviene para provocar que se establezca una relación entre este nuevo problema y uno similar, pero ubicado en otro contexto, resuelto en la clase anterior.

Maestra: *Quiero que pensemos juntos en el problema que hicimos el viernes pasado. ¿Se acuerdan de ese problema? Búsquenlo todos en la carpeta. […] ¿En qué se parece ese problema que hicimos con este de "dar saltos para atrás"?*

Karen: *No, porque ese era de comida, este es de saltos.*

Leo: *No, nada que ver…ése era de plata…*

David: *¡Sí, en algo!… en los dos repartís y también restás…*

Maestra: *¿Se parecen o no? Leo dijo que nada que ver…*

Cristian O: *Sí se parecen porque… porque… ¿cómo sería?… sería que podés decir "Joaquín tiene $389 y gasta 6 por día ¿Cuántos días comés?". Es lo mismo.*

Maestra: *Entonces como dice Cris, uno se podría transformar en el otro y haríamos los mismos cálculos, ¿no?…*

Walter: *¡Son de repartir también! Porque ves todos los 6 que podés repartir.*

Maestra: *Claro, ¿entienden lo que dijo Walter? Estos problemas, en los que veo cuántas veces puedo sacar un número o cuántas veces entra un número en otro, son problemas de dividir. También de resta, pero para hacerlos de una manera más corta se puede dividir.*

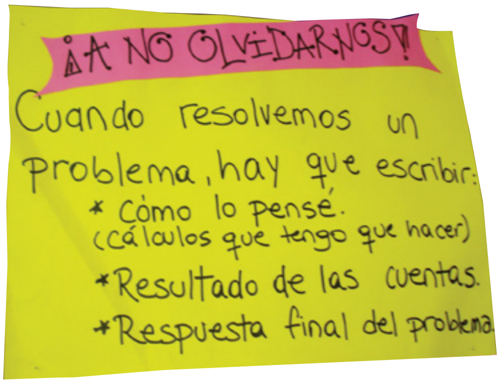
En este caso, la intervención de la docente apunta a relacionar dos problemas que tienen un sentido similar –ninguno de los dos explicita un reparto–, pero tienen contextos muy diferentes.

- También es posible armar carteles que se refieran particularmente a las conclusiones a propósito del análisis de enunciados de los problemas. Por ejemplo, a partir del trabajo sobre los datos de un enunciado se podría concluir:

Para resolver problemas es importante poder entender bien de qué se trata la situación:

- Hay algo que no sabemos y tenemos que averiguar. A veces eso que necesitamos averiguar se señala en forma de pregunta. Las preguntas aparece encerradas con los signos "¿?".
- En el problema hay información que se usa para averiguar lo que no sabemos. Son los datos que, a veces, se muestran como números. Hay que tener en cuenta que no siempre todos los datos que tiene el problema sirven para resolver lo que se pregunta.

O carteles que expliciten lo que hay que tener en cuenta para que la resolución de un problema esté completa:



¡A NO OLVIDARNOS!

Cuando resolvemos un problema, hay que escribir:

* Cómo lo pensé.
(cálculos que tengo que hacer)

*Resultado de las cuentas.

*Respuesta final del problema

Frente a soluciones erróneas, por ejemplo porque el niño elige una operación incorrecta o porque usa todos los números del enunciado (aun los que no son pertinentes), se puede:

- Analizar juntos la función que cumple la información que se da en el problema, identificar qué información sirve y cuál no para la pregunta planteada. Por ejemplo: *¿Qué es ese 15 en el problema? ¿Son cajas o libros?* Se trata de analizar que no toda la información que brinda el problema resulta un dato para su resolución.

- Determinar si el resultado obtenido resulta razonable en el contexto del problema planteado. Por ejemplo: *¿Puede ser que puedan armarse 450 filas si hay 287 sillas en total?*

Otras sugerencias posibles para el trabajo en el aula con problemas son:

- Variar las palabras que se utilizan en los enunciados para que la decisión de qué procedimiento usar no quede "atada" al vocabulario empleado. Por ejemplo, en situaciones de división debe cuidarse de no usar siempre "repartir", o de usar "repartir" en situaciones que no se resuelven con una división.

- Ante un niño que muestra dificultades con problemas que abordan sentidos más complejos de una operación, plantear otros problemas con sentidos más sencillos para conocer si en ese caso puede resolverlos. Si tampoco puede resolverlos, será necesario priorizar y destinar tiempo al trabajo sobre ellos. Si puede resolverlos, se tratará de ayudarlo a establecer vínculos entre estos y otros más complejos, para ampliar los sentidos asociados a una operación.

- Incorporar en la secuencia de actividades destinada a la enseñanza de una operación algunos problemas que no se resuelvan con esa operación. Esto puede permitir que los niños analicen cada situación y tomen decisiones y no que, por ejemplo, decidan hacer una división solamente porque *estamos aprendiendo a dividir*.

- Indicar el uso de la calculadora para resolver problemas. Si la intención de la enseñanza está centrada en analizar problemas para decidir qué operación/es podría/n resolverlos, se puede pedir que, una vez decididos los procedimientos se use la calculadora para encontrar la respuesta. Esto permite que la atención se concentre en la comprensión de la situación planteada y no en cómo efectuar el cálculo.

- Variar las formas en las que se presenta la información incorporando diversos soportes: tablas, gráficos o imágenes. Aprender a interpretar la información disponible en cada formato requiere intervenciones específicas del docente.

El caso de los problemas de proporcionalidad

En el segundo ciclo ocupa un lugar central el trabajo con problemas de proporcionalidad. Al plantear su enseñanza, es necesario tener en cuenta que la proporcionalidad se inscribe en el campo de lo multiplicativo, e implica un conjunto de conceptos relacionados, que se adquieren simultáneamente durante un período prolongado de tiempo. El aprendizaje de este contenido, como sucede también con otros centrales del ciclo, no termina en la escuela primaria. En la escuela secundaria será retomado y resignificado.

A lo largo del ciclo se pueden plantear problemas de diversa complejidad. Esa variación en la complejidad está dada, entre otras cuestiones, por:

- los tipos de números en juego (naturales, fraccionarios o decimales);

- la naturaleza de las magnitudes intervinientes: continuas (longitud, peso, área, volumen, velocidad) o discretas;

- las relaciones entre unidades de medida involucradas;

- los casos particulares de su utilización: porcentaje, escalas, velocidad;

- el tipo de tarea;

- la forma de presentación de la información.

A partir del trabajo con situaciones de proporcionalidad se espera que, por un lado, los niños puedan identificar cuál es el tipo de vínculo que hay entre las magnitudes que se relacionan proporcionalmente y por lo tanto puedan reconocer cuándo dos magnitudes son proporcionales o no; y por otro lado, que puedan entonces, en situaciones de proporcionalidad, encontrar nuevos valores a partir de otros dados, poniendo en juego la constante de proporcionalidad o las propiedades que caracterizan a esa relación:

- al duplicar, triplicar, etcétera, o al calcular la mitad, tercio, etcétera, de la cantidad inicial de una magnitud también se duplica, triplica o se calcula la mitad, tercio de la otra;

- al sumar dos valores de una de las magnitudes, corresponde sumar los valores correspondientes a cada uno de la otra magnitud;

- existe una relación multiplicativa constante entre las dos magnitudes. Hay un valor constante que es el cociente entre los valores de ambas magnitudes.

Algunas consideraciones para tener en cuenta:

- Es necesario presentar problemas con enunciados textuales y, también otros, con la información organizada en tablas de valores. Las tablas son una forma de organizar los datos que permite identificar mejor las relaciones en juego entre ellos. Es necesario que los niños aprendan a leer la información contenida en una tabla (cuestión que muchas veces no es sencilla ni evidente) y aprendan también a elaborar tablas a partir de problemas enunciados como texto.

- Un aspecto valioso del trabajo con este contenido es la posibilidad de desplegar diversos procedimientos para resolver las situaciones planteadas, según los números involucrados. Se espera que los niños accedan a diferentes formas de resolverlas.

- El tipo de procedimiento más pertinente para resolver una situación y, por lo tanto, las relaciones que se pueden analizar, dependen de los números considerados. Es importante que se tenga en cuenta esto a la hora de diseñar o elegir situaciones de enseñanza:

    - Puede incluirse o no el valor de la unidad (la constante de proporcionalidad). Si el valor de la unidad está dado, el problema resulta más sencillo, pues se puede utilizar ese valor para encontrar todos los otros valores.

    - Los datos pueden estar ordenados de forma creciente y consecutiva o no.

    - Los datos pueden permitir o no que se pongan en juego las relaciones de dobles, triples, mitades, etc.

  - Si no se incluye el valor unitario, se podría calcular de diversas formas, según qué datos se den. Por ejemplo, puede calcularse dividiendo el valor de una magnitud por el correspondiente de la otra magnitud, o buscando la diferencia entre dos valores consecutivos de una misma magnitud. Por ejemplo, en la tabla que sigue se podría averiguar que un cuaderno cuesta $84 ya que es la diferencia entre el valor de 12 cuadernos y el de 13 cuadernos, o sea 1.092 – 1.008 = 84.

Cantidad de cuadernos	12	13	14
Precio (en $)	1.008	1.092	……

- Puede ser un buen recurso incluir en las tablas algunas columnas vacías para que los alumnos completen, a partir de la propuesta del maestro, con valores intermedios que resulten de apoyo para encontrar los valores pedidos. Por ejemplo, en la siguiente tabla, podría ser útil encontrar el valor de 2 cajas para sumar ese valor con el correspondiente a las 7 cajas y así obtener el de 9 cajas. También podría encontrarse el valor de una caja.

Cantidad de cajas	4	7	8	9		
Cuadernos	192	336	……	……		

- Es necesario explicitar con los niños la relación entre la proporcionalidad y otros conceptos sobre los que los niños irán trabajando a largo del segundo ciclo. Es central que los alumnos construyan la idea de porcentaje como una relación de proporcionalidad, en la que la cantidad de referencia es 100.[17] También es necesario reflexionar sobre las relaciones de proporcionalidad involucradas cuando se pasa una medida dada en una unidad a otra unidad (una longitud, por ejemplo). En ese caso la medida de una longitud en una unidad determinada, por ejemplo, centímetros, es proporcional a esa misma medida expresada en otra unidad, por ejemplo, decímetros.

- También es necesario proponer a los alumnos situaciones en las que deban analizar si en los problemas dados las magnitudes se relacionan o no proporcionalmente. Esto es una oportunidad más para volver a sistematizar las propiedades que caracterizan el modelo de la proporcionalidad. Es importante que los alumnos avancen en poder determinar si una relación entre magnitudes es de proporcionalidad directa o no, cuáles de sus características son necesarias pero no alcanzan para estar seguros y cuáles son suficientes.

---

[17] Por otro lado, será necesario también establecer desde la enseñanza el vínculo de este contenido con las fracciones. Los niños tienen que comprender la equivalencia entre 25%, $\frac{25}{100}$ y $\frac{1}{4}$.

Documentos curriculares para consultar

GCABA, Ministerio de Educación (2017) *Matemática. 2º ciclo. Primera parte. Material para el alumno*. Aceleración y Nivelación. Serie Trayectorias Escolares. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/528/download [consultado el 11/9/2018].

GCABA, Ministerio de Educación, DGPLEDU, Dirección de Currícula y Enseñanza (2012) *Diseño Curricular para la Escuela Primaria. Primer ciclo*. 1ª reimp., pp. 318-328. Disponible en: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/index.php [consultado el 9/8/2018].

Ministerio de Educación de Nación. *Matemática. Para seguir aprendiendo. Tareas de acompañamiento para alumnos y alumnas de 4º y 5º grado. Cuadernillo de actividades*. Serie Aprender con todos. Disponible en: http://repositorio.educacion.gov.ar [consultado el 8/1/2019].

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2007) *NAP. Matemática 4, 5 y 6. Segundo ciclo EGB / Nivel Primario*. Serie Cuadernos para el aula. 4º grado: pp. 113-117, 5º grado: pp. 113-117 y 6º grado: pp. 112-121. Disponible en: http://repositorio.educacion.gov.ar [consultado el 8/1/2019].

b) Avanzar en las estrategias de cálculo para resolver problemas de multiplicación y división

Intervenciones de enseñanza

Como se señala en el documento *Progresiones de los aprendizajes. Primer ciclo. Matemática*, también en el segundo ciclo hay momentos en la enseñanza de la multiplicación y división en los que lo importante es que los niños exploren y reconozcan que es posible usar diversas formas para resolver un mismo cálculo. Más adelante, será necesario que avancen en el tipo de estrategia utilizada, asegurando su dominio. Las estrategias de cálculo utilizadas se relacionan siempre con el tipo de problema que se está resolviendo y/o el tamaño y el tipo de números involucrados. Por ejemplo, es probable que un niño utilice un cálculo multiplicativo para resolver problemas de proporcionalidad, pero necesite realizar esquemas o diagramas en el caso de un problema de combinatoria. También es importante destacar que hay un componente personal en esa elección, hay niños que en distintos momentos se sienten más cómodos o seguros con una u otra estrategia.

Con la intención de promover avances en las estrategias, es posible analizar grupalmente o con algún niño en particular la relación entre diferentes procedimientos para resolver un mismo cálculo, las similitudes que tienen entre ellos y la economía que permiten. También, relacionar los procedimientos con las propiedades de las operaciones da lugar a que los niños adviertan cuáles se están utilizando, y puedan identificarlas y nombrarlas. A partir de este trabajo, el docente puede proponer situaciones que exijan la utilización de las propiedades de las operaciones para argumentar acerca de la validez o no de un procedimiento.

Nuevamente cabe advertir que no es esperable que todos los niños avancen al mismo tiempo en la construcción de estrategias ni se espera que prevalezca una única manera de resolver. Tampoco es esperable que cada niño tenga necesariamente que “inventar” los distintos procedimientos. Por eso, cuando en el aula aparece una idea potente o el maestro decide presentar un procedimiento relevante, es importante promover que todos los chicos tengan la posibilidad de ensayar esa idea y poner en juego ese procedimiento.

El trabajo en torno al cálculo de multiplicación

Para que los niños avancen en sus estrategias de cálculo es importante:

- Continuar el trabajo de memorización de un repertorio de cálculos simples de multiplicación, iniciado en primer ciclo. Tener disponibles en la memoria los resultados de algunos cálculos se puede convertir en un apoyo para resolver otros cálculos más complejos. Para lograrlo es importante que los niños puedan reconocer por sí mismos cuáles son aquellos cálculos “en los que nunca se equivocan”. Se puede proponer hacer un listado de tablas fáciles o de resultados que ya saben de memoria, o que distingan, dentro de un conjunto de productos, para cuáles conocen el resultado y para cuáles no.

Este tipo de actividades favorece la toma de conciencia de lo que se ha aprendido y la identificación de que hay algo sobre lo que es necesario continuar trabajando.

- Retomar el análisis y la sistematización de multiplicaciones por 10, 100 y 1.000, etcétera, y por otros números “redondos” (por 20, 30, 200, etcétera), estudiadas en primer ciclo. Esto es importante para que luego se puedan discutir y generalizar procedimientos de multiplicación de números mayores.

- Proponer el uso de cálculos simples para resolver otros más complejos. Por ejemplo, para resolver 26 × 12 se puede analizar si es posible apoyarse en 26 × 10 que es un resultado fácil de obtener, o en 26 × 6 que implica multiplicar por una sola cifra, y discutir entonces qué habría que hacer para llegar al resultado a partir de ellos. Luego de ese trabajo se pueden escribir esas conclusiones en un cartel referido a un caso particular discutido, que sirva luego para otros casos similares. El siguiente es un ejemplo posible.

Para hacer 26 × 12 podemos hacer:

$$26 \times 10 = 260 \qquad 260 + \overbrace{26 + 26}^{\text{dos veces más el 26}} =$$

$$260 + 26 \times 2 =$$

$$260 + 52 = 312$$

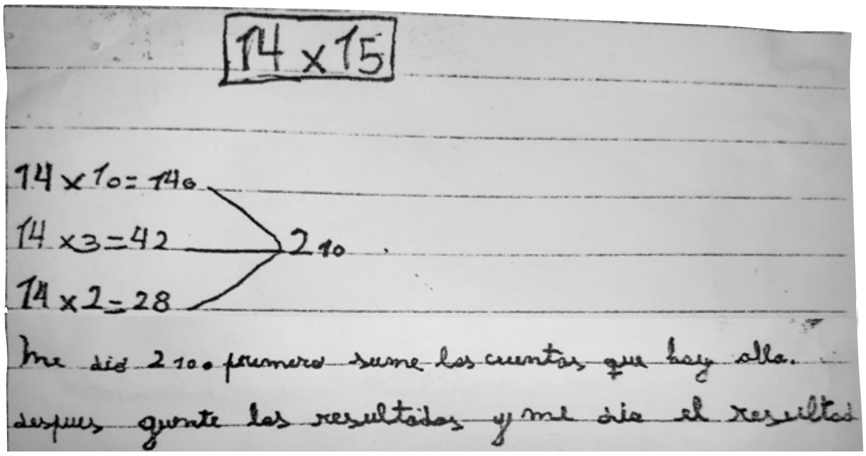
O:

$$26 \times 6 = 156 \qquad 156 \times 2 = 312$$

Porque 12 es el doble de 6.

- Promover la difusión de diversos procedimientos de cálculo. Hay momentos en los procesos de enseñanza en que lo importante es la exploración y el reconocimiento de diversas formas de resolver un mismo cálculo. El registro siguiente muestra distintos modos de resolver 15 × 14.

Lucía



14 x 15

14 x 10 = 140

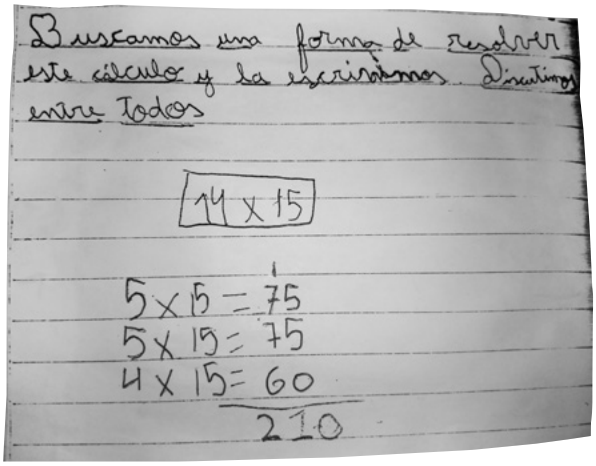
14 x 3 = 42

14 x 2 = 28

210.

Me dió 210. primero sume las cuentas que hay alla. despues gunte los resultados y me dio el resultad

Sebastián

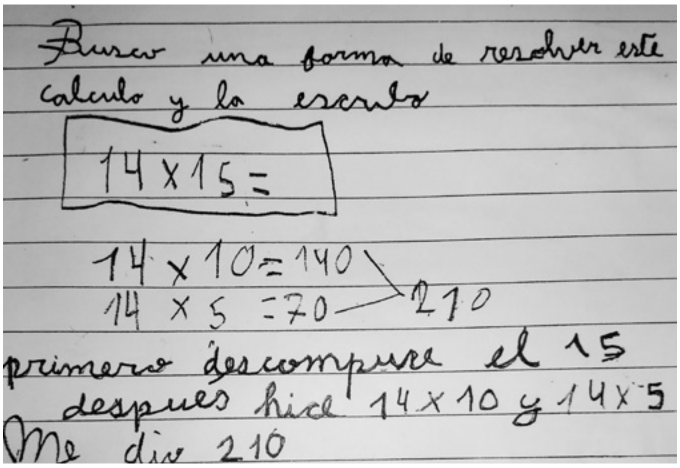


Buscamos una forma de resolver este cálculo y la escribimos. Discutimos entre todos

14 x 15

5 x 15 = 75
5 x 15 = 75
4 x 15 = 60
210

Brisa



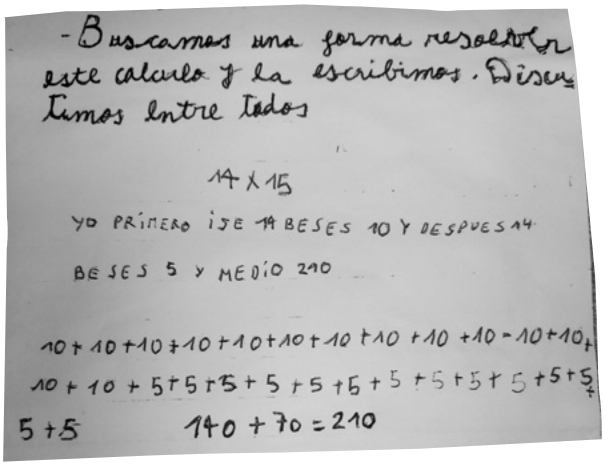
Busco una forma de resolver este calculo y la escribo

14 x 15 =

14 x 10 = 140
14 x 5 = 70 → 210

primero descompuse el 15
despues hice 14 x 10 y 14 x 5
Me dio 210

José



-Buscamos una forma resolver este calculo y la escribimos. Discutimos Entre todos

14 x 15

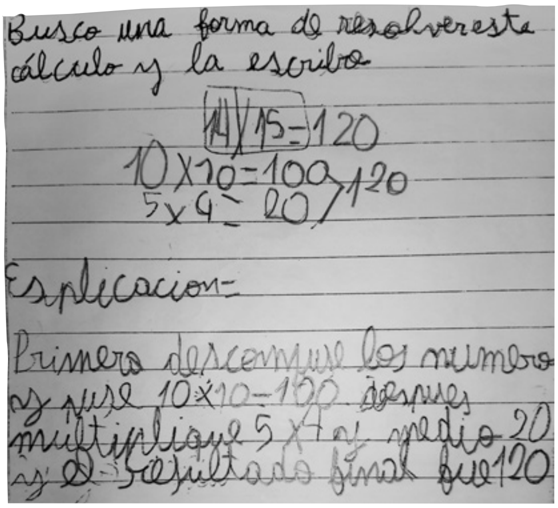
YO PRIMERO IJE 14 BESES 10 Y DESPUES 14 BESES 5 Y MEDIO 210

10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 - 10 + 10 + 10 + 10 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5

140 + 70 = 210

No se trata solamente de socializar estas opciones diversas, sino que lo valioso es además analizar grupalmente (y retomarlo luego con algún niño en particular si es necesario) la relación que hay entre estos diferentes procedimientos para resolver un mismo cálculo. Detenerse sobre los procedimientos contribuye a que los alumnos adopten una posición reflexiva sobre su trabajo matemático. Establecer vínculos entre procedimientos diferentes –exitosos o no– probablemente dé lugar a nuevas relaciones que no necesariamente estuvieron en juego en la resolución de cada alumno y que son claramente producto de la interacción. Por un lado, es posible considerar las diferencias que tienen. En este caso, se podría analizar que en algunos procedimientos se descompone el 14 y en otros el 15 de diversas maneras (el 14 como 10 + 4 y el 15 como 10 + 5 o 10 + 3 + 2) para que los niños adviertan que en todos ellos el 15 se repite 14 veces o el 14, 15 veces. También, por otro lado, es valioso analizar las similitudes y la economía que alguno de ellos permite. En este caso, se pueden comparar los dos últimos procedimientos ya que se apoyan en descomposiciones similares, pero en uno se multiplica y en otro se suma. Al poner en relación dos procedimientos los niños se ven confrontados a encontrar en uno de ellos relaciones que están más claramente explicitadas en el otro. En el caso de nuestro ejemplo, se podría preguntar: *Este cálculo de 14 × 10 que hizo Brisa, ¿está de alguna manera en el cálculo de José? ¿Dónde? Acá hay una suma y acá una multiplicación, ¿habrá alguna manera de convertir esta suma en una multiplicación? ¿El 10 que está en esta suma significa lo mismo que el 10 que está en esta multiplicación?* Estas preguntas buscan provocar comentarios de los niños que el docente puede retomar y completar para explicar la relación entre los procedimientos.

También es valioso proponer el análisis de los errores que se pueden producir en los procedimientos de cálculo mental. Cuando los alumnos ensayan descomposiciones para poder multiplicar números mayores suelen cometer errores relacionados con descomposiciones incompletas o fruto de no realizar todas las multiplicaciones necesarias si la descomposición afecta a ambos factores. A continuación, se propone un ejemplo.



Busco una forma de resolvereste
cálculo y la escribo

$\boxed{14 \times 15 =} 120$

$\left.\begin{array}{l} 10 \times 10 = 100 \\ 5 \times 4 = 20 \end{array}\right\} 120$

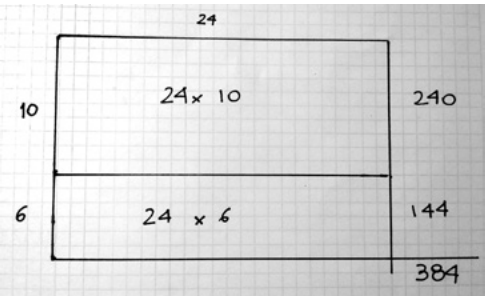
Esplicacion=

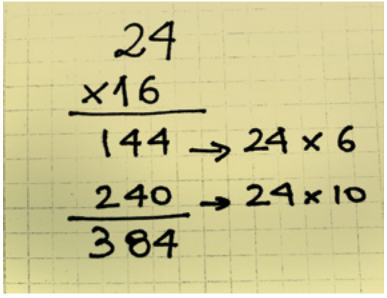
Primero descompuse los numero
y hise 10×10=100 despues
multiplique 5×4 y me dio 20
y el resultado final fue 120

En este caso, el alumno descompuso ambos factores (el 14 como 10 + 4 y el 15 como 10 + 5) pero no fue exhaustivo al realizar las multiplicaciones necesarias: multiplica 10 × 10 y 5 × 4, pero no considera multiplicar 10 × 4 y 10 × 5. Se podría hipotetizar que, apoyado en descomposiciones y procedimientos habituales a la hora de sumar –en los que se puede sumar unidades con unidades y decenas con decenas–, extiende esta opción a la hora de realizar la multiplicación. Frente a una situación como esta es importante confrontar esta opción con otras que hayan surgido y reconocer en qué casos se está “haciendo 14 veces el 15”.

- Promover el análisis de las propiedades aritméticas que subyacen a una cierta estrategia de cálculo utilizada. En los procedimientos del ejemplo anterior se pone en juego la propiedad distributiva de la multiplicación. Explicitarla o no dependerá del momento y del propósito de enseñanza.

- Presentar el algoritmo por dos cifras luego de haber desplegado y analizado en la clase diversas opciones de cálculo para resolver multiplicaciones de números mayores. La presentación del algoritmo tiene que estar apoyada y ser consecuencia de ese trabajo de descomposiciones en las que se relacionan sumas y multiplicaciones. Hay algunas formas de representación que pueden ayudar a explicitar cuáles son los cálculos intermedios ocultos en el algoritmo de la multiplicación. El trabajo con problemas de organizaciones rectangulares puede funcionar en ese sentido. Por ejemplo, frente al problema: *En el teatro hay 24 filas de 16 butacas cada una, ¿cuántos espectadores entran en el teatro cuando está lleno?*, es una estrategia pertinente mostrar en los gráficos que representan la situación las multiplicaciones parciales en juego, vinculando esta representación con los cálculos intermedios del algoritmo.





```
  24
 x16
 144 → 24 x 6
 240 → 24x10
 384
```

Por supuesto, este modo de representar los problemas de organizaciones rectangulares tiene que haber sido objeto de trabajo anterior, incluso con números menores. Por otra parte, acudir a este tipo de representación resulta, en general –y no solamente para problemas de organizaciones rectangulares–, una herramienta potente para facilitar la comprensión de las descomposiciones implicadas en las estrategias de cálculo de multiplicación.

Un error habitual en el algoritmo de la multiplicación es que los niños encolumnen mal los números a sumar sin considerar el valor posicional de las cifras. Por ejemplo:

```
  28
 x15
 140
  28
 168
```

Volver a las descomposiciones que están detrás del procedimiento algorítmico, analizando que el 15 se descompone en la suma 10 + 5 es necesario para que los alumnos puedan considerar aquello que está oculto. Registrar en un cartel los cálculos intermedios involucrados puede ser útil para volver cuando sea necesario. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r l} 4 & \\ 28 & \\ \times\ 15 & \\ \hline 140 & \leftarrow (5 \times 28) \\ 280 & \leftarrow (10 \times 28) \\ \hline 420 & \end{array}$$

En la cuenta de multiplicar, se desarma uno de los números (factores) y se multiplica primero por las unidades y luego por los dieces (decenas) que lo forman. Luego se suman ambos resultados. En el ejemplo, el 15 fue desarmado como un 10 y un 5.

Escribir el cero en el lugar de las unidades (en el 280) permite hacer evidente que se está multiplicando allí por 10 y no por 1.

- Promover el trabajo con situaciones de cálculo aproximado para que se constituya progresivamente en una herramienta de anticipación y control de los cálculos que se realizan. En este sentido se puede proponer a los niños la resolución de situaciones como la siguiente:

1. Marcá el resultado correcto sin hacer la cuenta.

375 × 23 =	6.625	8.625	10.625
2.581 × 19 =	49.039	28.039	61.039

2. Encuadrá el resultado de cada cuenta. ¿Cómo lo pensaste?

5 × 22	entre 100 y 1.000	entre 1.000 y 10.000	entre 10 y 100
49 × 51	entre 100 y 2.000	entre 2.000 y 3.000	entre 3.000 y 4.000

Durante la realización de otros cálculos el docente puede proponer a los niños que controlen los resultados obtenidos apoyándose en ese trabajo de anticipación y aproximación realizado con preguntas como: *Si 28 × 10 es 280, ¿puede ser que 28 × 15 te dé 168?;* o antes de que el niño realice el cálculo preguntar: *¿Te va a dar más o menos que 200?*

El trabajo en torno al cálculo de división

Uno de los objetivos del segundo ciclo es que los niños avancen en sus estrategias de resolución de cálculos de división. Es importante subrayar que el algoritmo de la división no es el único procedimiento posible para realizar los cálculos. Por otro lado, aprender a dividir es mucho más que conocer el algoritmo, más aun teniendo en cuenta que hoy están ampliamente disponibles instrumentos como la calculadora que permiten realizar esos cálculos. Saber dividir es reconocer cuáles son los problemas en los que se puede usar una división para resolverlos y cuáles no; es entender las relaciones que se establecen entre el dividendo, el divisor, el cociente y el resto; es decidir si el resto tiene o no un papel en la respuesta a un problema y es también disponer de diversos procedimientos de cálculo.

A continuación, se proponen algunas sugerencias para la intervención en el aula:

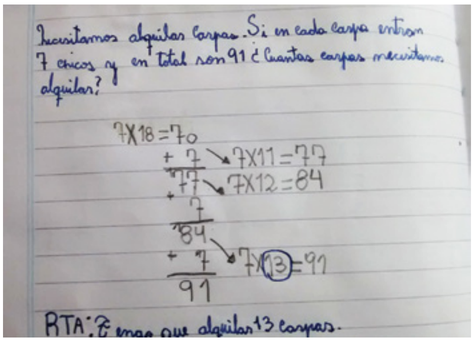
- Es importante hacer explícita la relación entre multiplicación y división. En ese sentido es central retomar el trabajo iniciado en 3º grado estableciendo que 32 : 8 es igual a averiguar *por cuánto hay que multiplicar a 8 para obtener 32*, y el uso de la tabla pitagórica es una herramienta que permite encontrar el resultado de una división (y no solo de una multiplicación). Se pueden prever propuestas que avancen en un primer momento en la relación de la multiplicación con la división sobre números que están en la tabla pitagórica (por ejemplo 42 : 7); luego con divisiones con resto diferente de 0 pero que encuentran respuesta en la tabla (por ejemplo 39 : 5). En estos casos, es importante discutir con los alumnos que, si bien el número a dividir no se encuentra *directamente* en la tabla, es posible utilizarla ubicando otro número cercano pertinente. Es valiosa la discusión sobre cuál es el número de la tabla que sirve, ya que a veces los niños eligen el número que está más cercano al dividendo, sin considerar que debe ser menor que él y no mayor. Intervenir, recuperando la relación de los números con el problema que se está resolviendo puede resultar fértil. Por ejemplo: *¿Podés usar 40 caramelos para repartir si solo tenés 39? Si le das 8 a cada uno, usás 40 caramelos, ¿tenés 40 caramelos para usar? ¿Cuántos caramelos dice el problema que teníamos?*, etcétera. Finalmente, se trata de avanzar con cálculos que se extiendan a números mayores que ya no están presentes en la tabla (por ejemplo 84 : 7), para que por último los niños empiecen a aproximar el cálculo mental usando las multiplicaciones por 10, 100, 1.000, por 20, 30, etcétera. Por supuesto, para que esta relación entre la multiplicación y la división pueda construirse con sentido, es necesario que antes los niños hayan tenido la oportunidad de resolver muchos y variados problemas de repartos y particiones, ensayando diversos procedimientos a través de gráficos, cálculos de suma o resta. Este es un trabajo fuerte de primer ciclo que hay que retomar al inicio de segundo ciclo.[18]

- La presentación de los algoritmos tiene que estar precedida de un fuerte trabajo sobre estrategias diversas de cálculo mental. El algoritmo introduce una forma diferente de organizar los procedimientos y las escrituras que efectivamente ya se realizan. Una vez que la mayor parte de los niños resuelve divisiones mediante aproximaciones multiplicativas, se podría presentar el algoritmo extendido de la división, relacionándolo con esos procedimientos.

---

[18] En el documento *Progresiones de los aprendizajes. Primer ciclo. Matemática* se describen varias propuestas para avanzar desde el uso de gráficos o sumas y restas hacia la relación multiplicación-división.

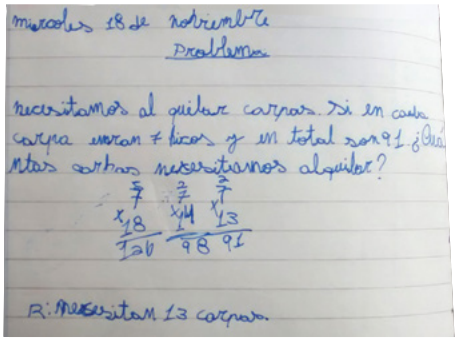
Las siguientes son producciones de niños que se apoyan en cálculos multiplicativos (multiplicaciones por 10, o por 10, 11, 12, etcétera) para resolver situaciones de división.



Necesitamos alquilar carpas. Si en cada carpa entran 7 chicos y en total son 91 ¿Cuantas carpas necesitamos alquilar?

7X18=70
+ 7 → 7X11=77
77 → 7X12=84
+ 7
84 → 7X13=91
+ 7
91

RTA: Tenemos que alquilar 13 carpas.



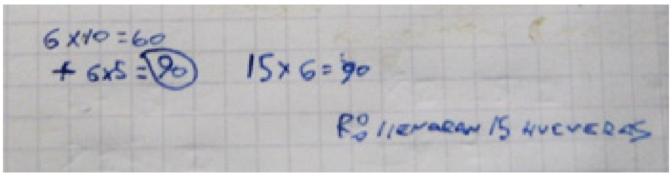
miercoles 18 de noviembre
Problema

necesitamos alquilar carpas. Si en cada carpa entran 7 chicos y en total son 91. ¿Cuántas carpas necesitamos alquilar?

7 x18 = 126
7 x14 = 98
7 x13 = 91

R: necesitan 13 carpas.

En otra situación, frente al problema *Manuel tiene que repartir 90 huevos en hueveras de 6 cada una. ¿Cuántas hueveras puede llenar?*, otro alumno resuelve de esta manera:



6 x10 = 60
+ 6x5 = 90
15 x 6 = 90
R: llenaran 15 hueveras

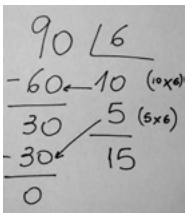
A partir del análisis de estos procedimientos, en particular de los procedimientos similares al último, se podrían escribir conclusiones que sistematicen las estrategias que se apoyan en aproximaciones multiplicativas. Un ejemplo podría ser:

Cuando dividimos números que no están en la tabla pitagórica pues son números más grandes que los que están en ella, podemos ir repartiendo por partes hasta completar un total.

Por ejemplo, para dividir 80 caramelos en bolsas de a 5 caramelos, podemos pensar que 10 × 5 = 50, entonces puedo armar 10 bolsas, usando 50 caramelos, y quedan 30 caramelos por embolsar.

Con esos 30 puedo armar 6 bolsas pues 6 × 5 = 30. Entonces, finalmente armamos primero 10 bolsas, luego 6 bolsas, son 16 bolsas en total.

Estos pasos de resolución que realizan los niños son muy similares al funcionamiento que tiene el algoritmo de la división.



90 | 6
-60 ← 10 (10x6)
30   5 (5x6)
-30   15
0

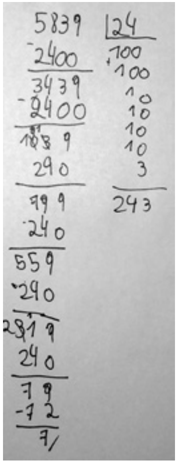
Puede resultar valioso, y ayuda a dar sentido a ese procedimiento, que se vincule cada paso del cálculo con el problema que se está resolviendo. En este: *Uso 10 hueveras, entonces saco 60 huevos (6 × 10) y los resto a los 90. Todavía me quedan 30 huevos por* *ubicar (90 – 60). Puedo usar 5 hueveras en las que entran 30 huevos (5 × 6)*, etcétera. Lo que está detrás de este procedimiento es la posibilidad de hacer repartos “por partes” apoyándose en las multiplicaciones por 10, por 100 o por otros números redondos.

- En muchos casos, puede ser una ayuda registrar las multiplicaciones intervinientes y relacionar gráficamente esas multiplicaciones con sus resultados. Escribir todas las multiplicaciones que se van utilizando también es un apoyo útil para poder controlar y reconstruir los pasos que se fueron haciendo cuando se hace necesario revisar el procedimiento frente a un error. La transparencia de los cálculos intermedios que se realizan ayuda a la comprensión y al control.

- Cuando se proponen situaciones para que los niños resuelvan divisiones con números mayores es muy importante que los divisores elegidos sean números que permitan cálculos de multiplicación más o menos sencillos (24, 15, 32, etcétera). No tiene sentido en la enseñanza presentar divisiones de números muy grandes, con divisores que resulten complejos de “manipular”.

- Un avance posterior será lograr que los niños “acorten” los pasos intermedios involucrados en el procedimiento algorítmico. A continuación, se analiza un ejemplo posible de intervención que permitiría el avance en ese sentido.

  Joaquín produjo este cálculo:



Frente a esta producción, el docente podría preguntar: *Acá pusiste dos veces el 100, ¿podría ponerse directamente el 200? Entonces, ¿cuánto tendrías que restar? ¿Podría ser?*, con la intención de que el alumno pueda empezar a reconocer que multiplicar dos veces por 100 es como multiplicar por 200 directamente. Lo mismo para el uso del 10 reiteradas veces. Esto requiere que se haya trabajado previamente la multiplicación por números múltiplos de 10 (20, 30, 40, 200, 300, etc.).

Hay varias actividades posibles que tienen como propósito ayudar a los niños a “acortar” los pasos intermedios y hacer más eficiente este procedimiento. A continuación, se describen algunos ejemplos, entre otros posibles, de estas actividades:

› Presentar un cálculo ya resuelto y proponer que se vuelva a realizar, pero en menor cantidad de pasos.

Acortá esta cuenta para que quede resuelta en menos pasos.

```
   448 |12
 - 120  10
   ---
   328  10
 - 120  10
   ---
   208   4
 - 120   3
   ---  ---
    88  37
 -  48
   ---
    40
 -  36
   ---
     4
```

› Proponer realizar una cuenta a partir de algunas multiplicaciones ya dadas, para que se pueda elegir las más convenientes.

Resolvé la siguiente división usando las multiplicaciones que te sirvan.

```
4.356 |15      15 × 10 =
               15 × 100 =
               15 × 1.000 =
               15 × 2 =
               15 × 3 =
               15 × 4 =
               15 × 20 =
               15 × 30 =
```

Primero, completá las multiplicaciones. Luego, decidí: ¿cuáles te sirven mejor para resolver la división? Usalas para hacer el cálculo.

Como ya se señaló, es importante recordar que el algoritmo no debe ser la cuestión central de trabajo en la enseñanza de la división. El esfuerzo tiene que estar puesto en que los alumnos puedan reconocer cuándo la división es un cálculo apropiado para utilizar en la resolución de una situación. Por eso, en muchas situaciones es conveniente proponer a los niños que usen la calculadora para encontrar la respuesta a los cálculos en lugar de resolver "con lápiz y papel".

- Enseñar a realizar cálculos estimativos resulta fundamental para que los alumnos construyan estrategias de anticipación y control de los resultados obtenidos, tanto cuando realizan cálculos mentales, algorítmicos o cuando utilizan la calculadora. Saber con anticipación entre qué números puede estar el resultado de un cálculo es un conocimiento que luego permite controlar si el resultado obtenido es posible o no. Es interesante cuando se enseña a los niños a estimar el resultado de un cálculo pedirles por un tiempo que primero hagan la estimación, luego el cálculo y al final controlen con la calculadora el resultado obtenido. En el caso de la división, la estimación de los resultados está ligada a las multiplicaciones por potencias de 10.

Por ejemplo, antes de realizar el cálculo 5.950 : 28, se puede proponer a los niños realizar algo similar a lo siguiente:

El resultado…
¿Podrá ser 10?; 28 × 10 = 280, es muy poco.
¿Podrá ser 100?; 28 × 100 = 2.800, es muy poco.
¿Podrá ser 1.000?; 28 × 1.000 = 28.000, me pasé.
Entonces el resultado tiene que ser más de 100 y menos de 1.000.

A partir de esta discusión, se podrá establecer con los niños que el cociente tendrá entonces tres cifras. En este sentido un avance esperable es que los niños puedan realizar estimaciones más precisas. Siguiendo el mismo ejemplo, se podría preguntar si el resultado dará más o menos de 500, o si va a estar más cerca de 100 o de 1.000.

Algunos ejemplos de actividades para trabajar la estimación de resultados en cálculos de división:

Sabiendo que:
24 × 10 = 240
24 × 100 = 2.400
24 × 1.000 = 24.000
24 × 10.000 = 240.000

Indicá si:
a) 245 : 24 va a dar un número mayor, menor o igual a 10
b) 2.000 : 24 va a dar un número mayor, menor o igual a 100
c) 23.598 : 24 va a dar un número mayor, menor o igual a 1.000
d) 32.597 : 24 va a dar un número mayor, menor o igual a 1.000

Para cada una de las siguientes divisiones, te proponemos tres números. Señalá el más cercano al cociente y explicá cómo te diste cuenta.

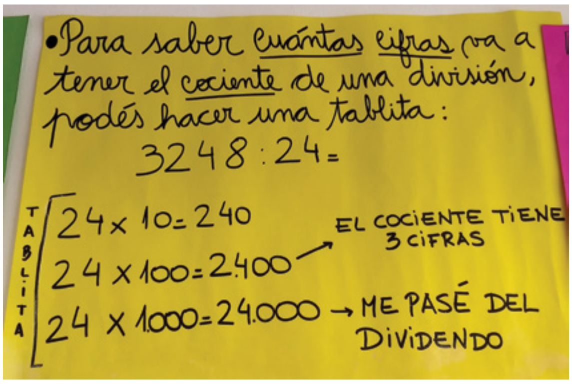
a) 436 : 25	20	10	30
b) 6.000 : 45	100	200	300
c) 738 : 95	10	15	5

Encuadrar el cociente entre dos potencias de 10 es una estrategia que puede resultar de ayuda tanto para controlar el resultado de una división como para anticipar, antes de realizar el cálculo, la cantidad de cifras del cociente.

Completá la siguiente tabla de resultados aproximados de la división. El resultado de cada cálculo será:

	Menor que 10	Mayor que 10, pero menor que 100	Mayor que 100, pero menor que 1.000	Mayor que 1.000
487 : 12				
1.730 : 24				
8.300 : 8				
2.340 : 15				

A partir del trabajo con la estimación de resultados, al igual que con otros contenidos, se puede sistematizar lo aprendido. Por ejemplo:



- Para saber cuántas cifras va a tener el cociente de una división, podés hacer una tablita:

3248 : 24 =

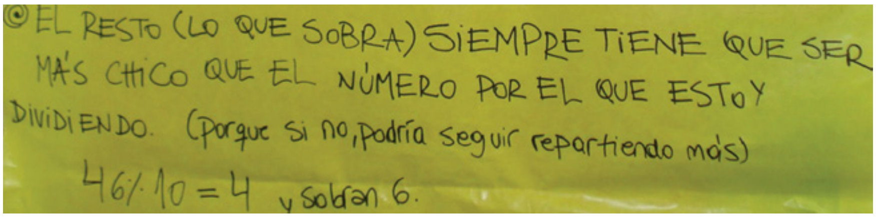
TABLITA

24 x 10 = 240

24 x 100 = 2.400 → EL COCIENTE TIENE 3 CIFRAS

24 x 1.000 = 24.000 → ME PASÉ DEL DIVIDENDO

- Una de las razones por las cuales el cálculo de división entera resulta más complejo que otros cálculos tiene que ver con que, como resultado del procedimiento, se obtienen dos números: el cociente y el resto. Esto solo sucede en el caso de esta operación. Es importante abordar desde la enseñanza la relación entre estos dos resultados y el problema que se busca resolver, así como la relación entre las distintas partes que conforman el cálculo (el dividendo, el divisor, el cociente y el resto). A partir de instancias colectivas de discusión se podría armar, por ejemplo, un cartel como el siguiente:



EL RESTO (LO QUE SOBRA) SIEMPRE TIENE QUE SER MÁS CHICO QUE EL NÚMERO POR EL QUE ESTOY DIVIDIENDO. (Porque si no, podría seguir repartiendo más)

46 ÷ 10 = 4 y sobran 6.

Documentos curriculares para consultar

GCABA, Ministerio de Educación (2014) *Grado de Aceleración 4°/5°. Matemática. 2° y 3° Bimestre. Material para el docente*. Disponible en: http://programaaceleracion.blogspot.com.ar/p/materiales-para-el-docente-y-el-alumno.html [consultado el 13/3/2018].

GCABA, Ministerio de Educación (2014) *Grado de Aceleración 6°/7°. Matemática. 1° Bimestre. Material para el docente*. Disponible en: http://programaaceleracion.blogspot.com.ar/p/materiales-para-el-docente-y-el-alumno.html [consultado el 13/3/2018].

GCABA, Ministerio de Educación (2017) *Matemática. Segundo ciclo. Segunda parte*. Aceleración y Nivelación. Serie Trayectorias Escolares. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/527/download [consultado el 11/10/2018].

GCABA, Ministerio de Educación, DGPLEDU, Dirección de Currícula y Enseñanza (2010) *Matemática. Cálculo mental con números naturales*. Aportes para la enseñanza. Escuela Primaria, pp. 37-56. Disponible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/numeros-naturales_web.pdf [consultado el 14/8/2018].

GCABA, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula (2001) *Actualización Curricular. 7º grado. Documento de trabajo*. Disponible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/integrado.pdf [consultado el 14/8/2018].

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, Dirección General de Cultura y Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección Provincial de Educación Primaria, Dirección de Gestión Curricular (2007) *Matemática Nº 3 A. Operaciones con números naturales 1ª parte. Propuestas para alumnos de 3º y 4º año. Material para el docente.* Serie Curricular. La Plata Disponible en: http://abc.gob.ar/primaria/sites/default/files/documentos/matematica_ndeg_2_a._numeracion._propuestas_para_alumnos_de_3deg_y_4deg_ano._material_para_el_docente_0.pdf [consultado el 14/9/2018].

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, Dirección General de Cultura y Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección Provincial de Educación Primaria, Dirección de Gestión Curricular (2007) *Matemática N° 5 A. Operaciones con números naturales. 2ª parte. Propuestas para alumnos de 3° y 4° año. Material para el docente*. Serie Curricular. La Plata. Con propuestas de cálculo mental. Disponible en: http://abc.gob.ar/primaria/sites/default/files/documentos/matematica_ndeg_5_b._operaciones_con_numeros_naturales_y_geometria._propuestas_para_alumnos_de_3deg_y_4deg_ano._material_para_el_alumno.pdf [consultado el 14/9/2018].

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, Dirección General de Cultura y Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección Provincial de Educación Primaria, Dirección de Gestión Curricular (2007) *Juegos que pueden colaborar en el trabajo en torno al cálculo mental. Área Matemática. Material para el docente. Mejorar los aprendizajes*. Versión preliminar. La Plata. Disponible en: http://abc.gob.ar/primaria/sites/default/files/documentos/juegos_que_pueden_colaborar_en_el_trabajo_en_torno_al_calculo_mental.pdf [consultado el 11/9/2018].

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, Dirección General de Cultura y Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección Provincial de Planeamiento, Dirección de Producción de Contenidos (2007) *División en 5º y 6º año de la escuela primaria. Una propuesta para el estudio de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto. Documento de apoyo para la capacitación*. Disponible en: http://abc.gob.ar/primaria/sites/default/files/documentos/division_en_5deg_y_6deg_ano_de_la_escuela_primaria._una_propuesta_para_el_estudio_de_las_relaciones_entre_dividendo_divisor_cociente.pdf [consultado el 14/9/2018].

Ministerio de Educación de la Nación (2012) *Cuadernillo Múltiples problemas*. Serie Piedra Libre. Disponible en: http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=118471&coleccion_id=118471&categoria_id=16537 [consultado el 14/8/2018].

Ministerio de Educación de la Nación (2012) *Matemática para todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza. Vol. 1. Operaciones con números naturales*, pp. 9-25 y 41-55. Disponible en: http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL005016.pdf [consultado el 14/8/2018].

Ministerio de Educación de la Nación. *Matemática. Para seguir aprendiendo. Tareas de acompañamiento para alumnos y alumnas de 4º y 5º grado. Cuadernillo de actividades*. Serie Aprender con todos. Disponible en: http://repositorio.educacion.gov.ar [consultado el 8/1/2019].

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2007) *NAP. Matemática 4 y 5. Segundo ciclo EGB / Nivel Primario*. Serie Cuadernos para el aula. 4º grado: pp. 79-105 y 5º grado: pp. 68-84. Disponible en: http://repositorio.educacion.gov.ar [consultado el 8/1/2019].

3. Divisibilidad

Para este contenido, no se detallan ejemplos de intervenciones ni propuestas de actividades. A continuación, se proponen documentos curriculares en los que se pueden encontrar ejemplos posibles para orientar la tarea en el aula.

Documentos curriculares para consultar

GCABA, Ministerio de Educación (2005) *Grado de Aceleración 6º/7º. Matemática. Cuarto Tomo. Números y operaciones. Parte 2. Material para el docente*. Proyecto Conformación de Grados de Aceleración. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/524/download [consultado el 11/10/2018].

GCABA, Ministerio de Educación (2004) *Grado de Aceleración 6º/7º. Matemática. Tercer Bimestre. Anexo. Material para el docente*. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/525/download [consultado el 11/10/2018].

GCABA, Ministerio de Educación (2004) *Grado de Aceleración 6º/7º. Matemática. Tercer Bimestre. Divisibilidad y fracciones. Material para el alumno*. Proyecto Conformación de Grados de Aceleración. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/526/download [consultado el 11/10/2018].

GCABA, Ministerio de Educación e Innovación, SSPLINED, DGPLEDU, Gerencia Operativa de Currículum (inédito a octubre de 2018) *Matemática. Divisibilidad. De las operaciones a la construcción de anticipaciones. Una ocasión para abordar la transición entre prácticas aritméticas y algebraicas. Séptimo grado*. Serie Propuestas didácticas. Primaria (PDF interactivo). Disponible en: http://www.buenosaires.gob.ar/sites/gcaba/files/pd_matematica_divisibilidad_docente.pdf [consultado el 18/10/2018].

Ministerio de Educación de la Nación (2012) *Matemática para todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza. Vol. 1 Operaciones con números naturales*, pp. 27-40. Disponible en: http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL005016.pdf [consultado el 11/9/2018].

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2007) *NAP. Matemática 5 y 6. Segundo ciclo EGB / Nivel Primario*. Serie Cuadernos para el aula. 5º grado: pp. 84-90 y 6º grado: pp. 88-99. Disponible en: http://repositorio.educacion.gov.ar [consultado el 8/1/2019].

4. Números racionales

Como se señala en el Diseño Curricular, los números racionales –escritos en forma decimal o fraccionaria– ocupan un lugar central en el trabajo de enseñanza en el segundo ciclo. Se trata de un campo de contenidos complejo, que supone rupturas importantes con los aprendizajes que los alumnos vienen elaborando desde el primer ciclo en relación con los números naturales. Una ruptura esencial entre los números naturales y los números racionales se refiere a las diferencias entre lo que ocurre cuando se comparan o se ordenan números en ambos conjuntos:

- En los racionales la idea de sucesor no tiene sentido. Un número natural tiene un sucesor (después de 7, viene 8) pero esta idea carece de sentido en los números racionales: ¿qué número fraccionario viene luego de $\frac{1}{2}$? ¿Y luego de 2,75?

- Las situaciones que exigen intercalar números entre otros dados no tienen el mismo tipo de solución en ambos conjuntos: entre dos naturales dados hay un número finito de otros naturales; entre dos racionales hay infinitos números racionales. Si se toman las expresiones decimales 0,5 y 0,6 es posible considerar que 0,55 está entre ambos, pero es posible seguir buscando números decimales para ese intervalo, por ejemplo: 0,51; 0,501; 0,5001; 0,500000000001; etcétera. Este proceso puede seguirse indefinidamente. El conjunto de los números racionales es un conjunto **denso**.

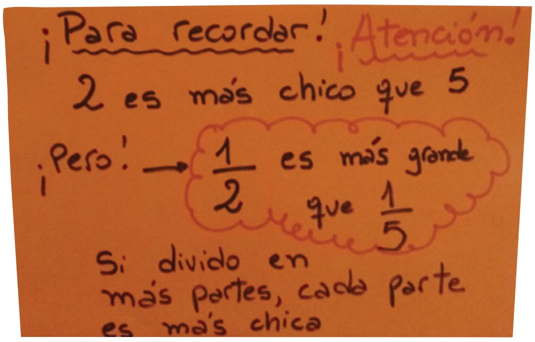
- Las reglas de comparación entre números racionales son muy distintas de las que se ponen en juego para comparar números naturales: entre los naturales, un número es mayor que otro si tiene mayor cantidad de cifras; entre los números racionales esta regla no funciona siempre. Por ejemplo, 0,65765 es menor que 0,7 y $\frac{1}{1.000}$ es menor que $\frac{1}{99}$. En el caso de las fracciones, si se comparan dos que tienen el mismo numerador, resulta mayor aquella que tiene el denominador menor.

Otra ruptura importante entre ambos conjuntos numéricos tiene que ver con el funcionamiento de las operaciones. En el caso de la multiplicación, en el campo de los naturales, el resultado de una multiplicación es siempre mayor o igual que cada uno de los factores. Entre los racionales, el resultado de una multiplicación no necesariamente es mayor o igual a los factores: si se multiplica por un número menor que 1, el resultado es menor. Lo mismo sucede en el caso de la división, al dividir por un número menor a 1, el resultado obtenido es mayor que el dividendo.

Una diferencia a tener en cuenta se refiere a las escrituras equivalentes. Hay infinitas maneras diferentes de escribir un mismo número racional en forma fraccionaria, por ejemplo: $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{32}{16} = \frac{100}{50}$, etcétera. Si bien entre los números naturales también es posible escribir una misma cantidad de diferentes maneras involucrando cálculos ($6 = 3 \times 2 = 5 + 1 = 4 + 2$), la diferencia central es que los números racionales son divisiones, y esa marca del número como operación queda expresada en la escritura; en tanto no es imprescindible –mucho menos en el uso cotidiano– anotar un número natural involucrando un cálculo. Es decir, detrás del reconocimiento de fracciones equivalentes está la idea –muy poco explicitada– de que se trata de *divisiones que "dan" el mismo resultado*, o, en otros términos, que "mantienen" la misma proporción entre numerador y denominador. Los niños vienen de una larga experiencia con los números naturales en la que no se ven confrontados con esa complejidad. Cuando se explicitan los signos aritméticos que ellos reconocen como tales, resulta más fácil que sea admitida esa expresión como una escritura equivalente. Por ejemplo, eso podría suceder entre $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$, o $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$. Muy distinto es cuando se trata de reconocer fracciones equivalentes, dado que deben aceptar que dos números –que se forman con números naturales diferentes y entre los que no reconocen ningún signo aritmético identificable– representan la misma cantidad.

Cuando se inicia el trabajo sistemático en la enseñanza con los números racionales en el segundo ciclo, los niños ya traen mucha experiencia de trabajo con los números naturales y suelen generalizar aquello que aprendieron para los naturales extendiéndolo al campo de los racionales. Así se explican muchos de los errores habituales que aparecen durante su aprendizaje. A partir de esta reflexión, algunas consideraciones generales a tener en cuenta durante la enseñanza:

- Es importante explicitar, a partir de las discusiones variadas durante el trabajo con los problemas, las diferencias entre ambos conjuntos numéricos. A continuación, se presentan algunos ejemplos de conclusiones registradas a partir de discusiones colectivas.

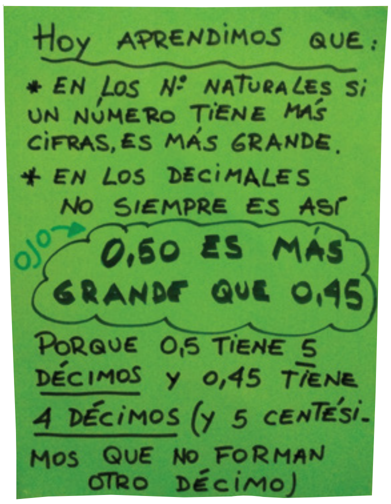


¡Para recordar! ¡Atención!

2 es más chico que 5

¡Pero! → $\frac{1}{2}$ es más grande que $\frac{1}{5}$

Si divido en más partes, cada parte es más chica



HOY APRENDIMOS QUE:

* EN LOS Nº NATURALES SI UN NÚMERO TIENE MÁS CIFRAS, ES MÁS GRANDE.

* EN LOS DECIMALES NO SIEMPRE ES ASÍ

OJO → 0,50 ES MÁS GRANDE QUE 0,45

PORQUE 0,5 TIENE 5 DÉCIMOS Y 0,45 TIENE 4 DÉCIMOS (Y 5 CENTÉSIMOS QUE NO FORMAN OTRO DÉCIMO)

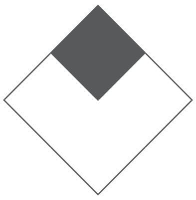
- Existe gran cantidad de métodos y reglas en el campo de los números fraccionarios: para resolver cálculos, para buscar equivalencias, para encontrar la fracción de una cantidad entera, etc. No es necesario, e incluso puede resultar un obstáculo importante para la construcción del sentido, presentarlos a todos ellos en la enseñanza. Si se introducen desligados de los procedimientos particulares desplegados por los niños para resolver situaciones, los alumnos suelen memorizarlos mecánicamente, con lo cual los olvidos y las confusiones son muy frecuentes. Entonces, como se señaló también en relación con los números naturales, la presentación de algoritmos y métodos **tiene que estar precedida y apoyada por un fuerte trabajo de cálculo mental y de despliegue de estrategias diversas.** En ese sentido, las actividades en el aula con los números racionales son oportunidades para poner en juego aspectos del trabajo matemático muy formativos para los alumnos: generar leyes para comparar números, establecer la verdad o falsedad de afirmaciones, analizar la equivalencia de diversas expresiones numéricas.

a) El trabajo en torno a las fracciones

Intervenciones de enseñanza

Fracciones en el contexto de la medición y el reparto

- Hay muchas maneras de definir las fracciones. Entender $\frac{1}{n}$ como aquella parte que n veces conforma el entero resulta muy potente porque es un valioso apoyo para resolver muchas situaciones en las que intervienen las fracciones. Seguramente, será necesario que el maestro presente y traiga nuevamente esa idea durante la resolución de diversos problemas.[19] Es decir, se trata de retomar recurrentemente la pregunta acerca de cuántas de “esas partecitas” se requieren para conformar un entero: cuatro, si el entero está repartido en cuartos, dos si está partido por la mitad, tres si el entero está repartido en tercios, etc. Por ejemplo, es posible que frente a un dibujo en el que hay que decir qué parte del entero está sombreada (cuando no están marcadas todas las líneas divisorias) muchos niños no logren reconocerlo.



El docente puede entonces intervenir recordando esa definición: *¿Cuántas veces entra esa parte en todo el entero? Si entra 4 veces, entonces ¿qué parte será?* Acompañando esta intervención, se puede proponer al niño que realice sobre el dibujo las líneas que pueden ayudarlo a establecer cuántas veces entra la parte marcada en el entero.

---

[19] La escritura $\frac{1}{n}$ es una referencia general que no se propone utilizar con los niños.

Otras situaciones en las que apelar a esta definición puede resultar muy fértil son aquellas en las que es necesario reconocer la equivalencia entre partes de un entero con forma diferente.

Frente al dibujo,

es probable que muchos alumnos no reconozcan que ambas partes sombreadas representan $\frac{1}{4}$, fundamentando su respuesta en que *las zonas sombreadas no son de igual forma*. Apelar a que cada una de esas partes entra cuatro veces en el entero puede ayudar al alumno a establecer esta equivalencia, independientemente de que tengan entre sí distinta forma.

También se puede acudir a la definición planteada frente a otras situaciones como esta: *¿Cuántos paquetes de* $\frac{1}{4}$ *se necesitan para obtener 5 kilos de café?* Cuando un alumno no logre encontrar una forma de resolverlo, se puede preguntar: *Para obtener 1 kilo, ¿cuántos paquetes de* $\frac{1}{4}$ *necesito?* O frente a problemas en los que se deben completar cálculos del estilo: $\frac{3}{5} + \ldots = 1$, se podría proponer: *¿Cuántos quintos se necesitan para formar un entero? Si ya tengo 3, ¿cuántos quintos me faltan?*

Si este tipo de definición se registra en carteles en el aula y en las carpetas de los alumnos, es un buen recurso al que acudir cuando sea necesario. Los que siguen son ejemplos posibles.

Para recordar

Este es el entero 1.

$\frac{1}{2}$ se lee "un medio". En el entero entran 2 de $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{3}$ se lee "un tercio". En el entero entran 3 de $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{4}$ se lee "un cuarto". En el entero entran 4 de $\frac{1}{4}$.

$\frac{1}{5}$ se lee "un quinto". En el entero entran 5 de $\frac{1}{5}$.

$\frac{1}{8}$ se lee "un octavo". En el entero entran 8 de $\frac{1}{8}$.

Fracciones

Una parte de un entero es un tercio $\frac{1}{3}$ si con 3 de esas partes se forma el entero.

Una parte de un entero es un cuarto $\frac{1}{4}$ si con 4 de esas partes se forma el entero.

Una parte de un entero es un octavo $\frac{1}{8}$ si con 8 de esas partes se forma el entero.

Una parte de un entero es un décimo $\frac{1}{10}$ si con 10 de esas partes se forma el entero.

- En el inicio del trabajo con fracciones en el segundo ciclo, para poder resolver los problemas de medidas y repartos que se plantean, no es necesario que los niños aprendan que una fracción tiene un numerador y un denominador. En este primer momento se apunta a que se expliciten y se construyan relaciones como estas: con cuatro de un cuarto se forma un kilo, con dos de medio se forma un kilo, dos paquetes de un cuarto pesan lo mismo que un paquete de medio kilo, etcétera y no el uso de nombres formales. Incluso el hecho de destacar, en estos primeros momentos, que la fracción se conforma de dos partes que tienen nombres diferentes puede llevar a los niños a reforzar la idea errónea de que se trata de “dos números naturales separados por una línea” convirtiéndose en un obstáculo para concebir a la fracción como un número.

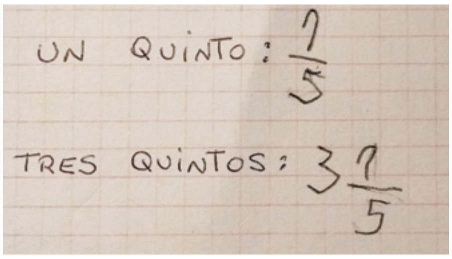
- No se espera que los alumnos aprendan clasificaciones de expresiones fraccionarias como “fracción propia”, “fracción impropia”, “fracción aparente”. Realizar ese tipo de clasificación puede convertirse en un obstáculo para comprender este campo numérico dado que las palabras que denominan esos conjuntos de fracciones resultan ambiguas e imprecisas. Por ejemplo, ¿qué significa que las fracciones son “aparentes”? ¿“Aparentan” ser fracciones, pero no lo son? La palabra “aparentes” no ayuda a comprender que las fracciones que representan enteros también son fracciones, que los números enteros pueden ser expresados también en forma fraccionaria. Lo mismo se podría decir con respecto al uso de “impropias” o “propias”. En cambio, sí resulta una tarea potente, desde el punto de vista del aprendizaje de los niños, analizar con ellos la relación entre las fracciones y los enteros: reconocer cuándo se trata de fracciones mayores o menores a un entero, o cuándo representan enteros “justos”. Ese tipo de análisis es un valioso apoyo para resolver diferentes situaciones: para comparar fracciones, para intercalarlas entre números enteros, para ubicarlas en la recta numérica, para controlar resultados de cálculos, etcétera. Por ejemplo, frente a una tarea que implique comparar dos fracciones, considerar la relación de cada una de ellas con el entero podría ser una estrategia útil. Si se compara $\frac{5}{4}$ y $\frac{4}{5}$, es posible pensar que $\frac{5}{4}$ “se pasa” del entero y $\frac{4}{5}$ no llega a un entero, por lo tanto $\frac{5}{4}$ es mayor.

- Desde el inicio del trabajo con fracciones, resulta importante introducir el tratamiento de algunas mayores a 1, ya sea expresadas como número mixto o no (por ejemplo, $1\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{4}$). Algunos niños suelen considerar como fracciones solamente a las partes “más chicas” que un entero (algo así como *son fracciones porque son partes menores a 1*) y es necesario entonces que confronten esta hipótesis con un repertorio más amplio.

Escritura y lectura de fracciones

Un aspecto que es necesario trabajar con detenimiento es la relación entre nombre de una fracción (dos tercios, por ejemplo) y su escritura numérica ($\frac{2}{3}$), ya que esta relación no es directa ni del todo transparente. Esta falta de correspondencia estricta entre ambos tipos de representación da lugar a ciertos errores que los niños producen cuando intentan escribir algunas fracciones. Por ejemplo:

Hugo escribe correctamente un quinto como $\frac{1}{5}$, pero al pedirle que escriba tres quintos produce esta escritura:



Hugo parece considerar como “quintos” la escritura $\frac{1}{5}$. Entonces escribe lo que escucha: un “3”, cuando escucha “tres”, y luego “$\frac{1}{5}$”, cuando escucha “quinto”.

Un error similar aparece en la producción de Alexandra. En una situación en la que se reparte un alfajor entre dos personas, usa el dibujo y escribe como respuesta que cada uno come $\frac{1}{2}$ alfajor pero interpreta su propia escritura correcta en números, como “uno y medio”.

Si se analizan los nombres de las fracciones en juego en las situaciones anteriores, podemos entender las dificultades de algunos niños dado que la diferencia entre las palabras “un medio” y “uno y medio”, o entre “tres quintos”, “tres **un** quinto” y “tres **y** un quinto” es muy sutil y poco evidente, aunque designen la misma fracción o fracciones diferentes según los casos. Las operaciones aritméticas involucradas en esas denominaciones son distintas: “tres quintos” implica una multiplicación de “tres por un quinto”. En “tres y un quinto” y “tres un quinto” está implicada una suma, en un caso más evidente al ser “representada” por la letra “y”. Son dos expresiones distintas para designar la misma fracción. Por otra parte, en el caso de la fracción “un medio” es habitual nombrarla solamente como “medio” sin mencionar el número uno, aunque se escriba.

Por eso, es valioso realizar con los niños actividades en las que sea necesario leer y escribir fracciones, comparando escrituras como $\frac{1}{2}$ con $1\frac{1}{2}$; o $2\frac{1}{3}$ con $\frac{2}{3}$, etcétera. En este sentido, una cuestión importante para explicitar a los niños, se refiere a las diferentes escrituras posibles para un número mixto: $1\frac{1}{2}$ se puede escribir también como 1 y $\frac{1}{2}$ o como $1 + \frac{1}{2}$.

Otros ejemplos de diferentes denominaciones orales para las mismas fracciones son “un cuarto” o “la cuarta parte” del mismo entero, “un tercio” y “la tercera parte”, “un quinto” y “la quinta parte”, etcétera. Es valioso que todas estas denominaciones aparezcan en el trabajo del aula.

Muchas veces la escritura de fracciones con numerador diferente de 1 no resulta evidente para algunos niños. Frente a una situación en la que deben escribir el resultado de un reparto (por ejemplo, cuando se debe repartir dos chocolates entre cuatro personas), es posible que los niños puedan concluir que cada uno recibirá “dos pedacitos de $\frac{1}{4}$” o “dos de $\frac{1}{4}$” o incluso, podrían expresarlo como una suma: “$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$”. Es posible que les resulte más difícil concebir cuál es la escritura en forma de fracción que le corresponde a esa designación oral “dos cuartos” (o sea, la escritura “$\frac{2}{4}$”). Por eso es necesario sistematizar, desde el principio y durante las discusiones colectivas sobre los problemas, la equivalencia entre escrituras del estilo: “$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2$ de $\frac{1}{4} = \frac{2}{4}$” o “Dos cuartos se puede escribir como 2 de $\frac{1}{4}$; $2 \times \frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}$”. Estas discusiones apuntan a que los niños puedan comprender que $\frac{2}{4}$ son **dos veces** $\frac{1}{4}$, como $\frac{3}{5}$ son **tres veces** $\frac{1}{5}$, etc.

Equivalencia de fracciones

- Como ya se señaló, reconocer la equivalencia entre diferentes expresiones fraccionarias es un aprendizaje complejo para los niños. Una entrada posible para el inicio del trabajo con fracciones es proponer situaciones donde intervengan medios, cuartos y octavos, estableciendo una primera relación de equivalencia entre ellas. Es una relación entre fracciones usuales, con las que los niños suelen tener más contacto fuera de la escuela. Esa relación debe ser trabajada en distintos usos y contextos (por ejemplo, a partir de relaciones de medidas, estableciendo que dos potes de $\frac{1}{4}$ kg de helado pesan lo mismo que un pote de $\frac{1}{2}$ kg). Es importante señalar que los niños no las generalizan inmediatamente a nuevos contextos (por ejemplo, no extienden automáticamente las equivalencias trabajadas en el contexto de la medida a una situación de repartos). Por eso, al proponerles entonces una situación en un nuevo contexto es necesario que el docente recupere y explicite las relaciones con lo estudiado a propósito de otro contexto. Por ejemplo, para una situación de reparto de 2 chocolates entre 4 personas, para que los niños puedan establecer que comer $\frac{1}{2}$ chocolate es lo mismo que comer $\frac{2}{4}$ de chocolate habrá que vincular la situación con lo trabajado para el caso del helado. Las equivalencias entre medios, cuartos y octavos deben trabajarse en un amplio campo de problemas que incluya sumas y restas, tanto de números enteros y fracciones como entre fracciones y multiplicaciones de fracciones por un número natural, comparaciones, representación gráfica, dobles y mitades, expresiones equivalentes.

  A continuación, se incluye un ejemplo de un cartel armado por el docente en diálogo con los alumnos, luego de discutir una serie de problemas en los que debían componer cantidades usando paquetes de $\frac{1}{2}$ kg, $\frac{1}{4}$ kg y $\frac{1}{8}$ kg.

Una vez consolidado el trabajo de las relaciones entre medios, cuartos y octavos, es importante desplegar las equivalencias entre tercios y sextos, y entre quintos y décimos.

Para trabajar las relaciones entre fracciones puede recurrirse a las siguientes actividades:

- Situaciones en las que sea necesario plegar papeles y representar gráficamente esos plegados. Este tipo de problemas permite poner en juego la idea de que la fracción $\frac{1}{n}$ es aquella parte que repetida n veces constituye el entero y trabajar las relaciones entre fracciones, tanto equivalencias como dobles y mitades: al plegar medios por la mitad se obtienen cuartos, al plegar los cuartos en mitades se obtienen octavos, etc.

- Situaciones que apuntan a reconstruir la unidad usando diferentes partes, como los juegos "La escoba del uno" o "Rompecabezas de enteros".[20]

Tanto el plegado como los juegos mencionados permiten a los niños apoyarse en la comprobación empírica para establecer relaciones entre las fracciones. Por ejemplo, pueden superponer piezas para verificar que $\frac{1}{2}$ ocupa lo mismo que dos piezas de $\frac{1}{4}$. Sin bien estos procedimientos son valiosos y útiles en un principio, será necesario ir sustituyéndolos por la **construcción de argumentos** como $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ *son equivalentes porque si con 4 de* $\frac{1}{4}$ *se forma un entero, con la mitad de partes, o sea, con dos de* $\frac{1}{4}$, *se forma la mitad del entero.*

- A lo largo del trabajo es importante sistematizar un conjunto de fracciones equivalentes a 1 y también aquellas equivalentes a $\frac{1}{2}$. Ese repertorio podrá ser un apoyo útil para la resolución de diversas situaciones. A propósito de la discusión de diferentes problemas se puede escribir un cartel con estas equivalencias e ir completándolo a medida que aparecen nuevas fracciones. Un ejemplo posible:

---

[20] La descripción de una versión de ambos juegos, con las reglas y los materiales a utilizar puede encontrarse en el fascículo *Parte, comparte, reparte*, publicado por el Ministerio de Educación de la Nación en 2011 dentro de la Serie Piedra Libre para todos. Disponible en: http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=118471&coleccion_id=118471&categoria_id=16537 [consultado el 11/9/2018].

Muchas maneras de escribir 1 y escribir $\frac{1}{2}$.

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{8}{8} = \frac{5}{5} \ldots$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} \ldots$$

Los alumnos podrán recurrir, autónomamente o con ayuda del docente, a esas equivalencias para resolver nuevos problemas. Por ejemplo, si tienen que encontrar la solución para este cálculo:

$$\frac{4}{9} + \ldots = 1$$

considerar 1 como $\frac{9}{9}$ podría permitir calcular cuántos novenos hay que agregarle a los 4 para llegar a 9.

En otro caso, por ejemplo, si se trata de comparar $\frac{7}{12}$ y $\frac{9}{18}$, considerar *que* $\frac{9}{18}$ *equivale a medio y que* $\frac{7}{12}$ *es mayor que* $\frac{6}{12}$ *que también es medio*, permite resolver la comparación. Es importante que el docente pueda **intervenir para alentar y favorecer que los niños consideren los enteros y la mitad de diferentes maneras según convenga en el problema que se esté resolviendo**.

- El trabajo con las fracciones con denominador 10, 100, 1.000, etcétera, es central porque sirve de apoyo al trabajo con los números decimales. En particular es importante incluirlas también cuando se proponen actividades sobre equivalencias entre fracciones. Es importante que los niños reconozcan las equivalencias entre:

$$\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1.000}$$

$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1.000}$$

También equivalencias como:

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$$

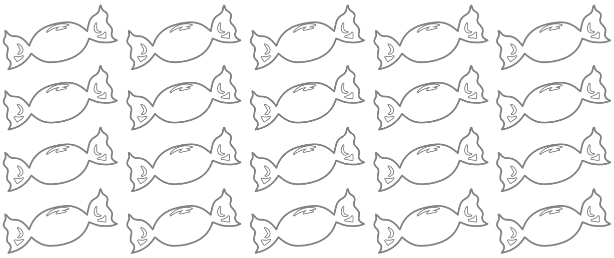
Fracción de un número natural

Las situaciones que exigen buscar la fracción de un número natural resultan muy complejas y ameritan un detenimiento particular en la enseñanza. Si bien se trata de la relación entre una parte y el todo, ese “todo” no es una cantidad continua, sino una colección discreta (es decir, una cantidad de objetos que se pueden contar). Las fracciones ya no hacen referencia a una parte de un objeto, sino a una parte de una colección compuesta por varios objetos. Esto explica que algunos alumnos frente a la situación de decidir cuánto es $\frac{1}{4}$ de 20 globos, respondan que son 4, confundiendo la cantidad de partes a considerar (que son cuatro) con el valor de cada parte (que en este caso es cinco). En estas situaciones hay una exigencia de cambio de unidad, ya que se pueden reconocer dos unidades de medida: considerar cada globo como una unidad o considerar la colección completa de globos como un todo. Esta exigencia no aparece cuando se reparten chocolates ni se fracciona una cierta longitud ni un área.

Los siguientes ejemplos de problemas pueden servir para ilustrar estas diferencias.

a) Juan comió $\frac{1}{4}$ de este chocolate. Marcá lo que comió Juan. ¿Hay una sola posibilidad?

b) Juan comió $\frac{1}{4}$ de los 20 caramelos que venían en el paquete. Pintá los caramelos que puede haberse comido Juan.



En el problema a) la respuesta no es otro número, es un área que deben marcar. En el problema b), reconocer $\frac{1}{4}$ de los caramelos implica considerar a 20 como una unidad. La respuesta a este problema es 5, que es otro número, distinto de $\frac{1}{4}$ y de 20.

En los problemas que aluden a fracciones de un número natural, una intervención posible del docente es recurrir a la definición de fracción y, por ejemplo, volver a traer la idea de que $\frac{1}{4}$ es aquella parte que repetida cuatro veces constituye el entero. Se tratará entonces de encontrar una cantidad de caramelos que 4 veces repetida forme 20 caramelos.

Las situaciones que requieren reconocer fracciones no unitarias de un número natural ($\frac{3}{4}$ de 20; $\frac{4}{6}$ de 36, etcétera) resultan aún más complejas. En esos casos, usar la fracción unitaria de una cantidad puede ser un buen apoyo para encontrar una respuesta al problema. Por ejemplo, para saber cuánto es $\frac{3}{4}$ de 20, será útil reconocer que $\frac{3}{4}$ son 3 de $\frac{1}{4}$ y entonces buscar primero $\frac{1}{4}$ de 20 (que son 5) y luego hacer 3 veces esa cantidad ($5 + 5 + 5$ o 5×3). Situaciones como la siguiente pueden permitir a los niños “extender” la relación entre la fracción de numerador 1 y la cantidad expresada como número natural a las otras fracciones con numerador distinto de 1:

Calculá:

Si se tienen…	¿Cuántos caramelos son $\frac{1}{3}$ de la colección?	¿Cuántos caramelos son $\frac{2}{3}$ de la colección?	¿Cuántos caramelos son $\frac{3}{3}$ de la colección?	¿Cuántos caramelos son $\frac{4}{3}$ de la colección?
9 caramelos				
24 caramelos				
36 caramelos				

Se podrá trabajar entonces que si $\frac{1}{3}$ de 9 es 3, entonces $\frac{2}{3}$ de 9 es $3 + 3$, o sea, 6, y así con los otros casos.

En las primeras situaciones en las que se trabaja la fracción de un número natural es importante que los niños cuenten con el apoyo de dibujos (dados por el docente o realizados por ellos mismos) como sostén de sus procedimientos de resolución. A medida que se avanza en el trabajo, será necesario ir proponiendo situaciones en las que el dibujo ya no resulte conveniente (por el tamaño de números) para que necesiten entonces apelar a las relaciones numéricas. Como ya fue señalado en otros contenidos, la elección de los números juega un rol central para determinar la complejidad de la situación: calcular $\frac{1}{4}$ de 400 puede resultar más sencillo (por la relación que hay entre 4 y 400) que calcular $\frac{1}{3}$ de 72. La disponibilidad que tengan los niños de repertorios de cálculo será central para tomar decisiones en ese sentido.

Este trabajo sobre la fracción de un número natural tiene fuerte relación con el trabajo sobre porcentaje: encontrar cuánto es el 60% de 360 es encontrar el $\frac{60}{100}$ de 360. Es necesario entonces que durante el trabajo de enseñanza esta relación pueda ser explicitada. Como ya se señaló, hay una red de relaciones entre los contenidos como fracciones, porcentaje y proporcionalidad.

Comparación de fracciones y representación en la recta numérica

En los problemas vinculados con la comparación de fracciones, es necesario variar la complejidad mediante el tipo de fracciones que se presenten. Si bien para comparar se puede siempre recurrir a la búsqueda de fracciones equivalentes a las dadas con un mismo denominador (y entonces comparar únicamente los numeradores), la riqueza de la tarea de comparación consiste en buscar y elegir una estrategia específica en función de las fracciones que se quiere comparar. Para que los alumnos avancen en el despliegue de diferentes estrategias hace falta proponer una variedad de situaciones:

- Comparar fracciones que tengan igual denominador y diferente numerador (como $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{5}$). En este caso, como los enteros están divididos en la misma cantidad de partes, alcanza con tener en cuenta que en $\frac{3}{5}$ se tienen más de esas partes que en $\frac{1}{5}$.

- Comparar fracciones que tengan igual numerador y diferente denominador (como $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{9}$). En este caso, los niños deben tener en cuenta que, si se divide al entero en mayor cantidad de partes, cada una de ellas será más pequeña.

- Comparar fracciones con distinto numerador y denominador, de modo que alguna sea mayor y otra menor que el entero (como $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$). En este caso los niños deben usar el entero como referencia, estableciendo cuál de ellas es mayor o igual al entero.

- Comparar fracciones con distinto numerador y denominador, de modo que alguna sea mayor y otra menor que $\frac{1}{2}$ (como $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{14}$). En este caso, los niños deben usar $\frac{1}{2}$ como referencia, estableciendo cuál es mayor o igual a $\frac{1}{2}$.

Hay algunos casos en que estas estrategias no son útiles, como sucede al comparar, por ejemplo, $\frac{4}{5}$ con $\frac{3}{4}$ o $\frac{3}{5}$ con $\frac{4}{7}$. En tales casos, se pueden buscar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Además, en el primer caso, se podría establecer que a $\frac{4}{5}$ le falta $\frac{1}{5}$ para llegar al entero y a $\frac{3}{4}$ le falta $\frac{1}{4}$. Como $\frac{1}{5}$ es más pequeño, o sea, que a $\frac{4}{5}$ le falta menos para llegar a un entero, se puede afirmar que $\frac{4}{5}$ es más grande que $\frac{3}{4}$. Se trata de un razonamiento muy elaborado, ya que apela a comparar los complementos para estimar las cantidades: *si lo que falta es menor, lo que hay es mayor*. No es esperable que todos los niños produzcan explicaciones semejantes a esta última. Lo interesante será que se discuta este procedimiento de comparación en situaciones colectivas, luego de haber desplegado en el aula una variedad de situaciones como las mencionadas antes.

Resulta enriquecedor analizar con los alumnos cuándo es posible usar cada una de las estrategias de comparación, cuáles sirven siempre y cuáles solo en algunas ocasiones. Se trata de promover que los alumnos expliciten cuáles son las relaciones que pusieron en juego para permitir que otros niños se apropien y empiecen a usar nuevas relaciones, y que el docente presente alguna que no haya sido considerada. Las discusiones que se producen a partir de la comparación de fracciones son una oportunidad para desplegar un trabajo sobre explicaciones y argumentos.

La representación en la recta numérica y la comparación de fracciones son tareas que se apoyan mutuamente. Si los niños ya han trabajado representando fracciones en la recta, imaginarse el orden de las fracciones sobre ella podría permitirles desarrollar estrategias de comparación. En algunos casos el docente puede intervenir proponiendo al niño que construya la recta o construirla junto con él, para que el alumno pueda ubicar las fracciones y así poder compararlas. Al mismo tiempo, saber comparar algunas fracciones permite establecer relaciones entre las fracciones que ya están representadas en la recta y otras que se quieren agregar, para anticipar en qué sector de la recta habrá que agregarlas. Por ejemplo, en una actividad consistente en ubicar $\frac{1}{3}$ y $\frac{7}{8}$ en la recta, una intervención pertinente consistiría en pedir a los niños que anticipen en qué lugar aproximado se deberían representar esas fracciones. Es esperable que puedan decir que como $\frac{1}{3}$ es más chico que $\frac{1}{2}$, quedará ubicado a la izquierda de $\frac{1}{2}$. A la vez, como $\frac{7}{8}$ es más grande que $\frac{3}{4}$, quedará ubicado a su derecha.

Las fracciones como cociente entre números naturales

Un avance central en el aprendizaje de las fracciones es que los niños puedan concebirlas como un cociente, es decir, considerar, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ como el cociente de 3 dividido 4. Si bien desde las primeras situaciones de reparto las fracciones aparecen vinculadas a divisiones, los niños no establecen de manera directa la relación entre el hecho de que al repartir 5 chocolates entre 3 personas a cada una le toque $\frac{5}{3}$ de chocolate, y que sean justamente 5 y 3 el dividendo y el divisor de la división. Establecer la relación entre la división de números naturales y fracciones, es decir, comprender que el cociente entre dos números naturales cualesquiera, por ejemplo a y b, es la fracción $\frac{a}{b}$ y, a la vez, que toda fracción $\frac{a}{b}$ puede ser pensada como el cociente $a : b$ no es inmediato y requiere de mucho trabajo de aprendizaje por parte de los alumnos. Es necesario que el docente proponga variadas situaciones y el planteo de reflexiones colectivas que permitan poner esta relación en evidencia. Es posible entonces que, luego de haber realizado varias situaciones en las que se realizaron repartos, se analice la relación entre los números involucrados en esos repartos y las fracciones obtenidas como resultados: *En este problema, repartimos 5 chocolates entre 4, escribimos la división 5 : 4 y como respuesta escribimos que cada uno comía* $\frac{5}{4}$*; en este otro problema, repartimos 7 entre 5, escribimos el cálculo 7 : 5 y la respuesta fue* $\frac{7}{5}$*; cuando hicimos 13 entre 4, nos dio* $\frac{13}{4}$*. ¿Será que siempre cuando hacemos una división el resultado se puede expresar como una fracción que incluye esos números?* Estas preguntas apuntan a que los niños adviertan que un modo de realizar el reparto es cortar cada chocolate en tantas partes como personas haya y que cada uno reciba una parte de cada uno de los chocolates. Por ejemplo, si hay 13 chocolates y 4 personas, puedo cortar cada chocolate en 4 partes y darle una parte de cada chocolate a cada uno, es decir que cada persona recibe 13 de $\frac{1}{4}$, es decir $\frac{13}{4}$. Así se puede analizar con los alumnos qué relación hay entre numerador y denominador de la fracción con el dividendo y el divisor de la división que dio origen al resultado: el numerador de la fracción es el dividendo de la división y el denominador es el divisor.

Una situación que permite avanzar hacia esta conceptualización de la fracción como cociente puede ser la siguiente:[21]

---

[21] Extraído del documento *Matemática. Fracciones y números decimales. 7° grado* (2005) Apuntes para la enseñanza. GCABA, Secretaría de Educación, DGPLED, Dirección de Currícula, Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza, 2004-2007. Puede sugerirse como una actividad a resolver tal como se plantea o jugar realmente esa situación con los niños y después analizar la situación de juego simulado que se propone.

Una maestra propuso a los alumnos el siguiente juego: *Pienso un número. Ustedes me proponen números y yo divido mentalmente esos números que ustedes me dicen por el número que yo pensé y les digo el resultado. Entonces, ustedes tienen que encontrar el número que yo pensé.*

Cuando los chicos propusieron:	5	6	2		7
La maestra respondió:	$\frac{5}{3}$	2		$\frac{1}{3}$	

a) ¿Cuál fue el número que pensó la maestra?

b) Completá la tabla.

Este tipo de trabajo permite, además, poner en juego que la división exacta no siempre es posible en el conjunto de los números naturales. Los números racionales vienen a cubrir esta necesidad de la aritmética de dar sentido a cualquier división entre naturales.

Operaciones con fracciones

Las operaciones con fracciones resultan complejas para muchos alumnos, pues varios de los conocimientos que han construido sobre los números naturales no pueden ser utilizados a la hora de operar con las fracciones. Un problema importante del uso de los algoritmos convencionales para las operaciones con fracciones es que, al igual que los algoritmos con números naturales, no explicitan las relaciones que se están poniendo en juego. Por otra parte, muchas veces los mecanismos implicados en los algoritmos para distintas operaciones pueden resultar contradictorios a los ojos de los niños. Por ejemplo, en el caso de la multiplicación, se opera multiplicando tanto los numeradores entre sí, como los denominadores entre sí. No sucede eso en el caso de la suma o la resta, pues, cuando tienen el mismo denominador solo se opera con los numeradores.

- Es posible que las **sumas o restas de fracciones** aparezcan desde el inicio del trabajo, a partir de las discusiones sobre problemas de medidas o repartos, con las escrituras del tipo $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, entre otras. Esto permite una entrada en las operaciones de manera no mecánica, conservando el sentido de lo que sucede al componer cantidades expresadas en forma fraccionaria. Frente a la situación de componer 1 kg con paquetes de $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$, luego de las resoluciones en las que muchas veces los niños dibujan o escriben con palabras y números (por ejemplo: *Se puede usar dos de medio, o cuatro de* $\frac{1}{4}$) el docente puede aportar las escrituras aritméticas que correspondan a esas resoluciones incluyendo las operaciones. Así, para este caso puede escribir: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$, o incluso $2 \times \frac{1}{2}$; o $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1$; o $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1$, etcétera. Un avance posterior será que estos cálculos de sumas y restas entre medios, cuartos y octavos se presenten luego descontextualizados. Frente a ese tipo de tarea, un error probable es operar como si se tratara de dos números naturales, sumando numeradores entre sí y denominadores entre sí. Por ejemplo, podrían resolver $\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{2}{6}$. En ese caso, una intervención posible es volver a los primeros contextos y relaciones trabajadas: *Si compro medio kilo de café y le agrego un cuarto, ¿cuánto café tengo en total? En medio kilo, ¿cuántos cuartos entran? ¿Y si le* *agrego otro cuarto más, cuántos cuartos tengo?* Otra intervención es analizar la razonabilidad de ese resultado obtenido. En este caso, sería analizar que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ no puede dar $\frac{2}{6}$, pues $\frac{2}{6}$ es menos que la mitad. Analizar la razonabilidad de los resultados es una intervención potente que comunica que en Matemática es importante buscar maneras de estar seguro y controlar los resultados que se obtienen. Así, por ejemplo, frente a otros errores en cálculos, como por ejemplo, $3-\frac{2}{7}=\frac{1}{7}$ (porque hace $3-2=1$ y mantiene el 7 en el denominador), se puede preguntar: *¿$\frac{1}{7}$ es mayor o menor que 1 entero? ¿Será posible que si a 3 enteros le saco menos de 1 el resultado sea más chiquito que 1 entero?*

- Es central construir con los niños un **repertorio de cálculos memorizados**, en particular que retome las relaciones entre medios, cuartos y octavos; y tercios y sextos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, \text{ etc.}$$

Diversas actividades de cálculo mental permiten la movilización de diferentes recursos: pensar los números naturales como fracciones, e inversamente, considerar una fracción mayor que 1 como una suma de un número natural y una fracción menor que 1; concebir una fracción en términos de distancia a un cierto entero; analizar un cálculo y obtener información sobre el resultado sin realizarlo de manera efectiva, etcétera. Por ejemplo:[22]

Calculá mentalmente. No se puede escribir la respuesta como número mixto.

a) $\frac{1}{4}+1=$

b) $\frac{3}{8}+1=$

c) $\frac{19}{3}+1=$

d) $\frac{9}{7}-1=$

e) $\frac{15}{4}-1=$

f) $\frac{3}{5}+2=$

g) $\frac{8}{7}+3=$

h) $\frac{9}{2}-4=$

i) $\frac{8}{3}-2=$

---

[22] Ejemplos extraídos del documento *Matemática. Cálculo mental con números racionales*. Apuntes para la enseñanza (2006) GCABA, Secretaría de Educación, DGPLED, Dirección de Currícula, Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza, 2004-2007.

Calculá mentalmente qué número debe colocarse en cada caso para completar los siguientes cálculos.

a) $\frac{1}{5} + \ldots = 2$
c) $\frac{3}{5} + \ldots = 2$
e) $\frac{5}{2} - \ldots = 1$
b) $\frac{1}{2} + \ldots = 2$
d) $\frac{7}{6} + \ldots = 3$
f) $\frac{17}{5} - \ldots = 3$

Anotá cada una de las siguientes fracciones como sumas de un número entero más una fracción menor que 1.

a) $\frac{4}{3}$
c) $\frac{11}{6}$
e) $\frac{25}{9}$
b) $\frac{9}{4}$
d) $\frac{19}{3}$
f) $\frac{31}{4}$

- El trabajo con situaciones de **cálculo aproximado** es una parte importante del trabajo con operaciones con fracciones ya que, como se señaló, permite que sea usado para anticipar y controlar resultados. Por ejemplo, con tareas similares a la siguiente.

Decidí, sin realizar el cálculo exacto y explicando cómo lo pensaste, si es verdad que:

$\frac{1}{2} + 1$ es mayor que 1

$5 + 1\frac{3}{4}$ es mayor que 7

$5 - \frac{3}{4}$ es menor que 4

$9 - \frac{1}{4}$ es mayor que 8

$3 + \frac{10}{5}$ es mayor que 6

- Es muy importante el trabajo de búsqueda de **dobles y mitades**. En general para los niños resulta más sencillo encontrar el doble de una fracción que su mitad porque existe una estrategia pertinente en todos los casos, cualesquiera sean los números en juego: solo se trata de sumar dos veces la misma fracción. Por ejemplo, para buscar el doble de $\frac{3}{5}$ o de $\frac{2}{8}$ se puede hacer $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$ o $\frac{2}{8} + \frac{2}{8}$. Frente al procedimiento de sumar dos veces la misma fracción, el docente puede proponer la escritura multiplicativa correspondiente: $2 \times \ldots$. Otra estrategia posible es apoyarse en relaciones conocidas entre, por ejemplo, medios, cuartos y octavos ("dos cuartos forman un medio, por lo tanto, $\frac{1}{2}$ es el doble de $\frac{1}{4}$", "dos octavos un cuarto, entonces $\frac{1}{4}$ es el doble de $\frac{1}{8}$", etcétera); o entre quintos y décimos, etcétera. Un error posible, que será necesario discutir grupalmente, es que los niños dupliquen tanto numerador como denominador sin advertir que resulta en definitiva una fracción equivalente a la primera.

El caso de las mitades resulta más complejo. El tipo de fracciones involucradas es una variable muy importante, ya que no todos los procedimientos sirven para todas las fracciones. Si el numerador es par, alcanza con buscar su mitad. Por ejemplo, en el caso de $\frac{6}{7}$, la mitad de 6 partes son 3 partes, por lo tanto $\frac{3}{7}$ es la mitad de $\frac{6}{7}$. Cuando se presentan fracciones cuyos numeradores son impares, esta estrategia no es posible y se requiere transformar los numeradores y denominadores de las fracciones. Por ejemplo, en el caso de $\frac{3}{5}$, se puede pensar como $\frac{6}{10}$ y entonces la mitad es $\frac{3}{10}$, o pensar que como la mitad de $\frac{1}{5}$ es $\frac{1}{10}$, la mitad de $\frac{3}{5}$ es $\frac{3}{10}$. Para avanzar sobre esto es necesario un fuerte trabajo previo sobre cálculo de mitades de fracciones con numerador 1 para que los niños construyan la idea de que al partir, por ejemplo, $\frac{1}{4}$ por la mitad el entero resulta partido en 8 partes, por lo tanto $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$. Para algunos niños la representación gráfica será un apoyo importante. A partir de la resolución de varios cálculos similares se podría generalizar que al duplicar el denominador –dejando fijo el numerador– se obtiene la mitad de la fracción. Entonces, para buscar la mitad de fracciones con numeradores impares, como por ejemplo $\frac{5}{7}$, es posible que los niños se apoyen en la búsqueda de la mitad de la fracción unitaria que corresponde, en este caso a $\frac{1}{7}$. Como la mitad de $\frac{1}{7}$ es $\frac{1}{14}$ podrían establecer que la mitad de $\frac{5}{7}$ es $\frac{5}{14}$. Es importante que posteriormente el docente intervenga para ayudar a los alumnos a establecer relaciones entre este trabajo de búsqueda de mitades de algunas fracciones y la escritura como división o multiplicación que corresponde. Por ejemplo, vincular que la mitad de $\frac{3}{4}$ se puede escribir como $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$, o $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ o $\frac{3}{4} : 2$. Esto permitiría establecer que buscar la mitad de una fracción es lo mismo que dividir esa fracción por 2. Esta misma relación podría ampliarse a la búsqueda de un tercio, un cuarto o un quinto, etcétera, de fracciones, estableciendo la relación con la división por 3, 4, 5, etc.

El trabajo previo sobre la proporcionalidad en números naturales[23] puede ser un apoyo importante para encontrar los vínculos entre dividir por 2 y calcular $\frac{1}{2}$ de una fracción. Se pueden plantear situaciones en las que sea necesario completar tablas proporcionales en las que la constante sea una fracción. Por ejemplo:

Un auto gasta $\frac{1}{8}$ litro de nafta por kilómetro recorrido. Completá la siguiente tabla.

Kilómetros	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Litros	$\frac{1}{8}$	…	…

---

[23] En la página 157 de este documento se describen algunas consideraciones sobre el trabajo con la proporcionalidad.

Se puede analizar allí que para encontrar el gasto de nafta que corresponde a $\frac{1}{2}$ km se puede calcular la mitad de lo que corresponde a 1 km, o sea la mitad de $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{16}$. También se puede calcular el gasto usando el valor de la constante de proporcionalidad, $\frac{1}{8}$, multiplicando $\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$. El maestro puede entonces intervenir para relacionar ambos procedimientos, explicitando que $\frac{1}{8} : 2$ da lo mismo que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}$.

- Con respecto a la **multiplicación de fracciones**, cuando se multiplica una fracción por un número natural es posible recuperar la idea de multiplicación como sumas sucesivas del mismo número. Por ejemplo, $\frac{2}{3} \times 5$ es posible pensarlo como $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$. Como ya se señaló, la multiplicación de una fracción por un número natural también puede ser usada y reconocida desde el inicio del trabajo con fracciones cuando se define, por ejemplo, a $\frac{3}{4}$ como 3 de $\frac{1}{4}$. Merecen un trabajo particular aquellas situaciones en las que es necesario encontrar por cuánto multiplicar fracciones unitarias para obtener 1. En esos casos, nuevamente, utilizar la definición de fracción trabajada es un muy buen apoyo para resolver ese tipo de cálculos multiplicativos. Por ejemplo, para resolver:

$$\frac{1}{5} \times \ldots = 1$$

es posible volver a poner en juego que $\frac{1}{5}$ *es aquella parte que repetida 5 veces conforma el entero*, de ese modo se podrá resolver el cálculo propuesto como $\frac{1}{5} \times 5 = 1$.

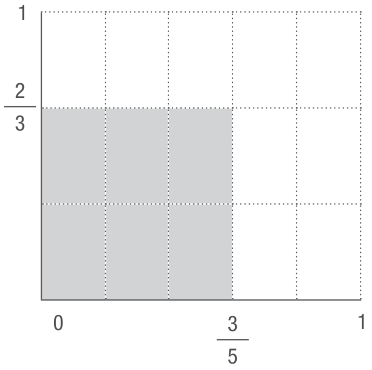
Es posible proponer, entonces, actividades como las siguientes:

Completá las siguientes multiplicaciones:

a) $5 \times \ldots = 1$
b) $3 \times \ldots = 1$
c) $4 \times \ldots = 1$
d) $\frac{1}{5} \times \ldots = 1$
e) $\frac{1}{11} \times \ldots = 1$
f) $\frac{1}{21} \times \ldots = 1$

El avance será luego completar multiplicaciones para obtener cualquier otro número natural, partiendo también de fracciones con numerador 1. Por ejemplo, para resolver $\frac{1}{5} \times \ldots = 3$, los alumnos podrán apoyarse en que si $\frac{1}{5} \times 5 = 1$ entonces $\frac{1}{5} \times 5 \times 3 = 3$; y desde allí pensar que $\frac{1}{5} \times 15 = 3$. Luego, el trabajo puede avanzar hacia la resolución de cálculos en los que se multiplica una fracción no unitaria para llegar también a 1, por ejemplo, $\frac{3}{5} \times \ldots = 1$. El trabajo anterior es el apoyo para abordar situaciones, hacia fines de la escolaridad primaria, como $5 \times \ldots = 7$, ya que es posible pensar en que $5 \times \frac{1}{5} = 1$, entonces $5 \times \frac{1}{5} \times 7 = 7$. Recurriendo a la propiedad asociativa entonces reconocer también que, como $\frac{1}{5} \times 7 = \frac{7}{5}$, entonces $5 \times \frac{7}{5} = 7$.

Distinto es el caso de la multiplicación entre fracciones dado que no puede pensarse como una suma reiterada de la misma fracción, como sucede en el caso de la multiplicación de una fracción por un número natural. Una ayuda para comprender el algoritmo de la multiplicación entre fracciones podría ser el modelo de área, que permite dar sentido al mecanismo implicado. Por ejemplo, para calcular $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$, se puede pensar en un rectángulo cuyos lados tienen longitudes que coinciden con esas fracciones. Uno de los lados se divide en tres partes para considerarlo en tercios, marcando allí un largo de $\frac{2}{3}$, y el otro de los lados es dividido en cinco partes, para considerarlo en quintos, marcando allí un largo de $\frac{3}{5}$. Así, el producto $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$ resulta $\frac{6}{15}$, pues el área total queda dividida en 15 partes, de las cuales quedan marcadas 6.



Hay que tener en cuenta que esta interpretación, aunque permite entender cómo se puede obtener el resultado de una multiplicación de fracciones (multiplicando numeradores y denominadores entre sí), es limitada ya que solo aborda el significado de la multiplicación asociado a los problemas de estructura rectangular. Es necesario proponer también situaciones de proporcionalidad directa que permiten también aproximarse a otro sentido de la multiplicación de fracciones.

Documentos curriculares para consultar

GCABA, Ministerio de Educación (2017) *Matemática. Segundo ciclo. Segunda parte*. Aceleración y Nivelación. Serie Trayectorias Escolares. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/527/download [consultado el 11/10/2018].

GCABA, Secretaría de Educación, DGPLED, Dirección de Currícula (2005) *Fracciones y números decimales 4º, 5º, 6º y 7º*. Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza, 2004-2007. Disponible en: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pluri_mate.php?menu_id=20709 [consultado el 28/8/2018].

GCABA, Secretaría de Educación, DGPLED, Dirección de Currícula (2006) *Cálculo mental con números racionales*. Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza, 2004-2007. Disponible en: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pluri_mate.php?menu_id=20709 [consultado el 28/8/2018].

Ministerio de Educación de la Nación (2012) Fascículo *Parte, comparte, reparte*. Serie Piedra Libre. Disponible en: http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=118471&coleccion_id=118471&categoria_id=16537 [consultado el 29/8/2018].

Ministerio de Educación de la Nación (2014) *Matemática para todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza 2*. Operaciones con fracciones y números decimales. Propiedades de las figuras geométricas. Vol., pp. 56-111. Disponible en: http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL005788.pdf [consultado el 11/9/2018].

Ministerio de Educación de la Nación. *Matemática. Para seguir aprendiendo. Tareas de acompañamiento para alumnos y alumnas de 4º y 5º grado. Cuadernillo de actividades*. Serie Aprender con todos. Disponible en: http://repositorio.educacion.gov.ar [consultado el 5/2/2018].

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2007) *NAP. Matemática 4, 5 y 6. Segundo ciclo EGB / Nivel Primario*. Serie Cuadernos para el aula. 4º grado: pp. 49-64, 5º grado: pp. 90-113 y 6º grado: pp. 41-111. Disponible en: http://repositorio.educacion.gov.ar [consultado el 8/1/2019].

b) El trabajo en torno a los números decimales

Intervenciones de enseñanza

La comprensión de las notaciones decimales abarca una complejidad de asuntos que implica un aprendizaje a largo plazo y se extiende más allá de la escuela primaria. En efecto, conocer la notación decimal supone poder movilizar estas escrituras numéricas frente a la diversidad de situaciones en las cuales intervienen. Supone también conocer el valor que representan, sus relaciones con otras escrituras y con otros números, comprender las reglas de organización del sistema notacional, su funcionamiento en cálculos, etc.

El inicio del trabajo con los números decimales en el contexto del dinero y las medidas de longitud

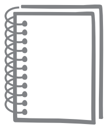
- Las propuestas de actividades **en el contexto del dinero**, con billetes y monedas, son un recurso valioso para el inicio del trabajo con números con coma y permiten dar sentido a esos "nuevos números". La escritura y lectura de precios y su relación con los billetes y las monedas que se necesitan para formar cantidades permite un primer acercamiento a la forma de escritura de estos números. La familiaridad con ese contexto les permite a los niños hacer anticipaciones y controlar sus producciones. Control que todavía no es posible hacer de otra manera ya que aún no tienen dominio de las relaciones matemáticas involucradas. Así, en discusiones con los niños, pueden producir afirmaciones como: *"A la izquierda de la coma se escriben los pesos, y a la derecha están los centavos, que es menos que un peso; de un lado se escriben los pesos y del otro lado los centavos". "En $50,50 el 50 que está antes de la coma son cincuenta pesos y el otro cincuenta son centavos"*. Una cuestión a tener en cuenta es que los niños suelen concebir los números decimales como si fueran dos enteros separados por una coma, como si constituyeran partes independientes. El trabajo posterior en el aula tendrá que permitir que construyan las relaciones entre la parte decimal y la parte entera, es decir, comprender que en la escritura decimal el "último entero está partido" en 10, 100, 1.000, 10.000 partes que se escriben luego de la coma.

  En el trabajo con dinero, una cuestión compleja es pasar de las denominaciones en centavos: 10, 25, 50 centavos, a la escritura de esas cantidades en la unidad pesos: $0,10; $0,25; $0,50 (teniendo en cuenta, además, que cada vez hay menos presencia de ese tipo de escritura en las situaciones cotidianas). Probablemente resulten más familiares las escrituras de precios que combinan pesos y centavos, como $45,50; por ejemplo. Por eso es importante proponer en el aula actividades que permitan componer una cantidad con pesos y centavos, establecer equivalencias de escrituras para una misma cantidad y nombrar y escribir números con coma cuando se trata de precios. Por ejemplo, es posible desarrollar actividades como las siguientes:[24]

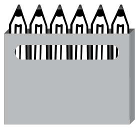
a) En la tabla siguiente figuran los precios de algunos artículos de librería.

Nombre	Precio en letras
Cuaderno común	Treinta y siete pesos con cincuenta centavos
Caja de lápices color x 6	Once pesos con setenta y cinco centavos
Lapicera pluma	Cuarenta y cuatro pesos con veinticinco centavos
Cola vinílica	Trece pesos con cuarenta centavos

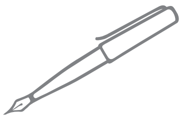
b) Hay que terminar de armar la vidriera. Completá los carteles con los precios en números de cada artículo.



$ ....



$ ....



$ ....

$ ....

a) Usando monedas de los siguientes valores:

- Escribí tres maneras de pagar $3,75. Tené en cuenta que se pueden usar varias monedas del mismo valor, según necesites. Si te resultara útil, podés dibujar.
- Anotá tres maneras diferentes de formar $2,50 y $4.
- Si en un monedero hay 5 monedas de 10 centavos, 4 monedas de 25 centavos y 7 monedas de 50 centavos, ¿cuánto dinero hay?
- Hay que terminar de armar la vidriera. Completá los carteles con los precios en números de cada artículo.

b) ¿Cuántas monedas de 25 centavos forman una de 50 centavos? ....

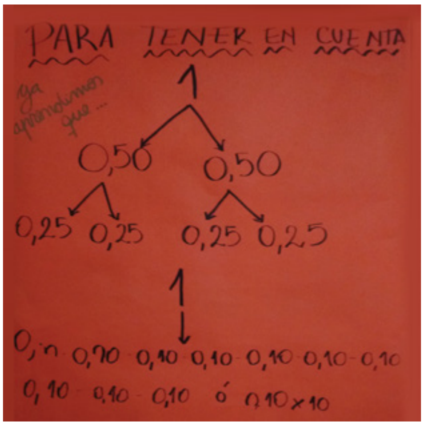
¿Cuántas monedas de 50 centavos forman una de $1? ....

¿Cuántas monedas de 10 centavos forman una de $1? ....

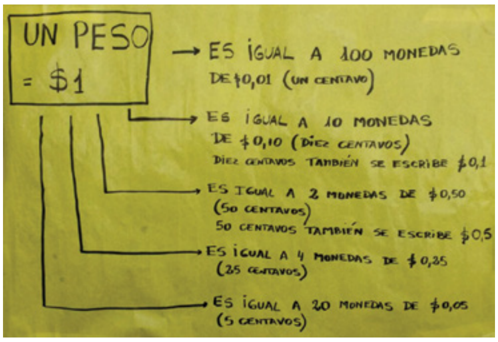
---

[24] Extraídas del documento *Matemática. 2º ciclo. Segunda parte. Material para el alumno*. Aceleración y Nivelación. Serie Trayectorias Escolares, 2017. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/527/download [consultado el 11/10/2018].

A partir del trabajo con dinero, es recomendable dejar registro de las relaciones establecidas. Por ejemplo, las formas de componer $1.



Una dificultad particular que puede aparecer en este tipo de trabajo es que muchas veces los alumnos identifican a las escrituras 0,1 y 0,01 como equivalentes (por ejemplo, al pedirles que escriban en pesos 1 centavo). Como contracara, también puede suceder que se nieguen a aceptar entonces que 0,10 y 0,1 representan ambos 10 centavos o incluso 0,5 o 0,50 para 50 centavos. En relación con esto, hay que tener en cuenta que ni $0,1 ni $0,5 son escrituras habituales en el contexto social. Una intervención interesante en ese sentido es proponer el uso de la calculadora. Por ejemplo, si se parte de una situación como la siguiente: *¿Cuánto es $1 repartido entre 10 personas? ¿Cuánto le corresponde a cada uno?; y ¿1 peso repartido entre 2 personas? Escribí la respuesta usando $.* Frente a la diversidad de respuestas: 10 centavos; $0,10; $0,1; $0,50; 50 centavos, realizar con la calculadora las divisiones correspondientes (1 : 10 o 1 : 2) permite poner en discusión la equivalencia entre 0,10 y 0,1 o entre 0,5 y 0,50.[25] Es posible que circulen afirmaciones como estas: *"Estos dos números (por 0,1 y 0,10) son iguales por que vienen de la misma cuenta, 1 peso dividido 10 da 10 centavos"; "Si ya sé que un peso entre dos son cincuenta centavos para cada uno, si la calculadora pone de resultado de la división 0,5 tiene que ser lo mismo, porque son la misma cuenta"*. Estas afirmaciones permiten ya realizar una primera sistematización respecto de la equivalencia entre escrituras diferentes de una misma cantidad (que más adelante tendrá que ser profundizada a partir del vínculo entre la escritura decimal y las fracciones decimales). Por ejemplo:



UN PESO = $1

→ ES IGUAL A 100 MONEDAS DE $0,01 (UN CENTAVO)

→ ES IGUAL A 10 MONEDAS DE $0,10 (DIEZ CENTAVOS)
DIEZ CENTAVOS TAMBIÉN SE ESCRIBE $0,1

→ ES IGUAL A 2 MONEDAS DE $0,50 (50 CENTAVOS)
50 CENTAVOS TAMBIÉN SE ESCRIBE $0,5

→ ES IGUAL A 4 MONEDAS DE $0,25 (25 CENTAVOS)

→ ES IGUAL A 20 MONEDAS DE $0,05 (5 CENTAVOS)

---

[25] Durante este trabajo, es conveniente indicar a los alumnos que el punto de la calculadora representa la coma decimal.

Otro acercamiento a la notación decimal puede realizarse a partir del contexto de las medidas de longitud. Por ejemplo, pueden plantearse actividades iniciales como la siguiente:

La profe de Educación Física tenía registrada la altura de sus alumnos. Para una coreografía que está armando necesita ordenarlos de menor a mayor. En la última columna, escribí el orden en que quedaría cada alumno: quién 1º, quién 2º… y así todos.

Alumnos	Altura	Orden por altura
Marina	1,50 m	
Pedro	1,60 m	
Katti	110 cm	
Raquel	1,55 m	
León	1,05 m	
Lucas	145 cm	

Lucas dice que tendría que ser el más alto porque 145 cm es más que 1,60 m. ¿Tiene razón? ¿Por qué?

Pedro dice que 150 cm equivalen a 1 m y 5 cm. ¿Tiene razón? ¿Por qué?

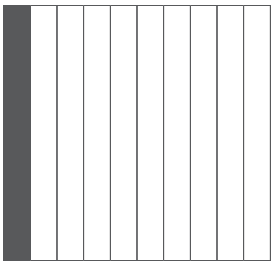
En este caso, se trata de que los alumnos asocien la expresión 145 cm con 1 m con 45 cm y la designación decimal 1,45 m.

Es importante resaltar que hay algunas diferencias entre el uso de dinero o de medidas de longitud cuando se utilizan en la enseñanza. En el contexto del dinero, se pueden plantear situaciones de reparto (por ejemplo, repartir $1 entre 10 personas). El trabajo con dinero también puede implicar establecer una medida, por eso se puede discutir qué parte de $1 son 10 centavos. Sin embargo, es un contexto con un funcionamiento “raro” respecto de otros contextos de medida y de reparto: el peso que se “reparte” tiene que ser “canjeado” para poder repartirse (no es como repartir chocolates o una tira de tela). Por eso la *reconstrucción del entero a partir de los décimos es una reconstrucción del valor y no del objeto físico*. En cuanto a la medición, el dinero mide “valor” que resulta, como magnitud, más extraña que, por ejemplo, la longitud.

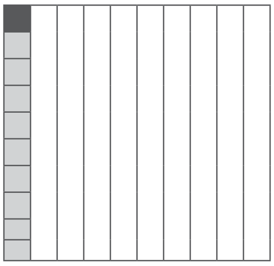
A la vez que se señala el potencial del contexto del dinero y la medida como sostén inicial de un conjunto de relaciones, es necesario identificar sus límites. El dinero –y todos los contextos de medida– trabaja con una cantidad finita de subdivisiones decimales (en el dinero lo usual es hasta el centavo, en la medida hasta el milímetro). Por otro lado, los números, en estos contextos, siempre pueden ser leídos apelando a dos unidades de medidas diferentes, una para la parte entera y otra para la parte decimal, “convirtiéndolos” en dos números enteros (pesos y centavos, kilos y gramos, metros y centímetros o milímetros, etcétera). De esta forma, los contextos del dinero y de la medida admiten sortear la complejidad de la interpretación de la notación decimal. Progresivamente, se deberá descontextualizar el tratamiento de los números decimales y avanzar en el análisis de sus propiedades específicas para abordar una característica central: su densidad. Este pasaje de las escrituras decimales en el contexto del dinero y la medida al análisis del funcionamiento "puramente matemático" no es sencillo ni automático, requiere intervenciones específicas. En este proceso, el trabajo con las fracciones decimales y su relación con la escritura decimal juega un rol fundamental, tanto para comprender la forma de notación y sus propiedades,[26] como para dar sentido a los algoritmos de las operaciones.

Fracciones decimales y números decimales

- El trabajo con **fracciones decimales** resulta central para profundizar la comprensión de los niños respecto de la notación decimal. Las fracciones decimales permiten avanzar sobre la comprensión del valor posicional de las cifras decimales, y entonces también, sobre las equivalencias entre escrituras. Por ejemplo, la equivalencia entre $\frac{5}{10}$ y $\frac{50}{100}$ permite comprender la equivalencia entre 0,5 y 0,50. El uso de representaciones gráficas puede resultar una intervención potente para avanzar en ese sentido. Se podría presentar un dibujo como el siguiente que representa un entero dividido en 10 partes, y pedir que se marque allí la décima parte o un décimo.[27]



Debe quedar claro, entonces, que lo marcado representa $\frac{1}{10}$, pues 10 de esas partes conforman el entero. Una vez que se ha establecido qué parte representa $\frac{1}{10}$ de ese entero, se podría pedir a los niños que marquen la décima parte de ese décimo, es decir que partan en diez partes el décimo.



---

[26] El valor posicional de las cifras decimales pone en juego divisiones por la unidad seguida de ceros.

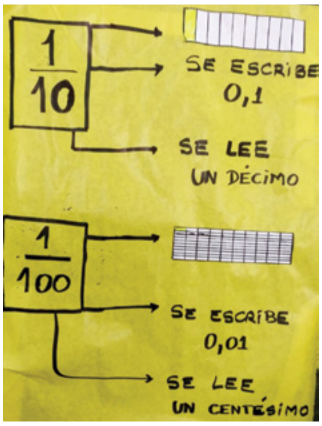
[27] Una actividad similar a esta se puede encontrar en el documento GCABA, Secretaría de Educación, DGPLED, Dirección de Currícula (2005) *Matemática. Fracciones y números decimales, 5º grado*. Apuntes para la enseñanza (material para el docente), p. 47. Disponible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/plan_plurianual_oct07/matematica/m5_docente.pdf

Entonces, se puede preguntar qué parte del entero total es esa "partecita" marcada. La intención es llegar a la conclusión de que resulta $\frac{1}{100}$ del total. Según qué división se considere, se puede pensar el mismo entero como $\frac{10}{10}$ o $\frac{100}{100}$.

En ese mismo gráfico se puede analizar que 10 de esas partes pequeñas constituyen a su vez $\frac{1}{10}$ del entero también. Por lo tanto, $\frac{10}{100}$ resulta la misma parte que $\frac{1}{10}$ del entero para concluir que *un décimo* es igual a *diez centésimos*. Es muy importante que el docente escriba también esas relaciones en forma numérica: $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$. Este trabajo permite considerar la relación de equivalencia entre fracciones con denominador 10 y 100, que se podrá extender próximamente a fracciones con denominador 1.000. Luego, es necesario avanzar también con la escritura de estas equivalencias en forma de cálculo: $10 \times \frac{1}{10} = 1$; $10 \times \frac{10}{100} = 1$; $10 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$.

Estas primeras equivalencias permiten avanzar hacia otras como $\frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{700}{1.000}$, etcétera. Así, un modo de pensar la relación anterior es: si cada décimo se parte en 10, se obtienen centésimos. Por cada décimo se obtendrán 10 centésimos, por lo tanto los 7 décimos equivaldrán a 70 centésimos.

Un momento importante será, luego de este trabajo, la explicitación que el docente haga de la forma de escritura con coma de esas expresiones, escrituras que ya han surgido en el trabajo con dinero y/o con medidas de longitud. Es conveniente que estas relaciones se registren en carteles para el aula y en las carpetas de los alumnos. Por ejemplo:



Se podrá avanzar luego sobre la escritura de otras fracciones decimales en forma de número decimal. Por ejemplo: $\frac{2}{10}$ como 0,2; $\frac{3}{10}$ como 0,3; $\frac{2}{100}$ como 0,02; $\frac{3}{100}$ como 0,03, $\frac{15}{10}$ como 1,5; $\frac{150}{100}$ como 1,50. Estas últimas resultan más complejas y necesitan un momento de reflexión particular ya que implican "ocupar la parte entera del número".

La relación entre números decimales y fracciones decimales es un apoyo importante que puede ofrecer el docente para establecer la equivalencia entre escrituras de números con coma (por ejemplo, 4,3 = 4,30) para comparar escrituras o para resolver cálculos. Se trata de intervenir para que se establezca la relación entre el significado de cada cifra de la notación decimal y la fracción correspondiente. Así, en 0,4 y 0,40, la parte decimal en un caso es $\frac{4}{10}$ y en el otro puede ser representada como $\frac{40}{100}$, que resultan fracciones equivalentes. La intención es que los niños avancen desde explicaciones del estilo: *"El cero a la derecha en estos números no importa, por eso 0,4 y 0,40 es lo mismo"* o *"Ese cero no importa, podés agregar todos los que quieras"*, a explicaciones apoyadas en razones como*: "El 4 está ubicado en el lugar de los décimos y en el lugar de los centésimos no hay nada, entonces en 0,40 hay solo 4 décimos"*; o: *"4 décimos y 40 centésimos son equivalentes".*

Valor posicional: relación entre el valor de cada cifra y el lugar que ocupa en el número

- Es fundamental proponer problemas que impliquen analizar **el valor posicional de las cifras en los números decimales**. Los niños deben determinar el valor de cada cifra que compone una escritura con coma en función de la posición que ocupa: en el primer lugar después de la coma se escriben los décimos; en el segundo, los centésimos; en el tercero, los milésimos. Tendrán que reconocer las relaciones de valor entre posiciones contiguas y no contiguas de las cifras.

Hay que tener en cuenta que la numeración posicional no es estrictamente paralela de los dos lados de la coma. Por ejemplo, tres cifras son necesarias para escribir las centenas, pero dos cifras alcanzan para escribir los centésimos. Por otra parte, si bien **decena** y **décimo** "suenan parecido", como también **centena** y **centésimo**, la relación que hay entre decena y centena (10 decenas forman una centena) es inversa a la que ocurre entre décimos y centésimos (son 10 centésimos los que forman un décimo). Los niños no integran de manera inmediata, en una única explicación, el valor posicional de las cifras de la parte entera y la parte decimal. Es decir, la comprensión del valor posicional en las escrituras de los números naturales no habilita a que, automáticamente, se comprenda la organización posicional de los números decimales bajo una misma organización de agrupamientos recursivos de base diez.

Para que los niños avancen en el análisis del valor posicional de las cifras decimales, es posible proponer actividades como la siguiente.

Escribí un número formado por:

a) 8 décimos, 2 milésimos, 9 centésimos
b) 3 enteros, 5 décimos, 3 milésimos
c) 1 entero, 1 milésimo
d) 2 décimos, 3 milésimos
e) 12 décimos, 15 centésimos
f) 24 centésimos, 24 milésimos

Los puntos e) y f) del ejemplo anterior son más complejos que los anteriores pues exigen establecer relaciones entre distintas posiciones. Por ejemplo, 12 décimos, 15 centésimos podría pensarse como 10 décimos + 2 décimos y como 10 centésimos + 5 centésimos, lo que equivale a 1 entero (por los 10 décimos) + 2 décimos + 1 décimo (por los 10 centésimos) + 5 centésimos, o sea, 1 entero + 3 décimos + 5 centésimos.

- Una intervención valiosa consiste en proponer sistemáticamente actividades que exijan encontrar diferentes escrituras posibles para un mismo número decimal. Se trata finalmente de que los niños tengan oportunidad de reconocer, por ejemplo, que 0,587 se puede escribir también como:

› $\frac{5}{10} + \frac{8}{100} + \frac{7}{1.000}$

› $0,5 + 0,08 + 0,007$

› $5 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{100} + 7 \times \frac{1}{1.000}$

› $5 \times 0,1 + 8 \times 0,01 + 7 \times 0,001$

› $\frac{58}{100} + \frac{7}{1.000}$

› $\frac{57}{100} + \frac{17}{1.000}$

› $0,57 + 0,017$

Si bien en este documento se plantean intervenciones para el trabajo con los números decimales por un lado y para las fracciones por otro, en varios pasajes se mencionó la importancia de establecer relaciones entre distintas formas de representación. La comprensión de los números racionales será más profunda en la medida en que los niños logren relacionar las diferentes formas de representarlos (por ejemplo, que puedan establecer la equivalencia entre $\frac{3}{4}$; 0,75; 75%; $\frac{75}{100}$). Es tarea de la enseñanza generar las oportunidades para establecer estas relaciones. Por otra parte, no se trata solo de reconocer las diferentes escrituras, sino de poder elegir cuál es más pertinente según la tarea a resolver.

Operaciones con números decimales

- Cuando se proponen situaciones en el contexto del dinero, los niños empiezan a realizar cálculos. Por ejemplo, cuando hay que componer cantidades con distintos billetes y monedas, los niños están operando, aunque no lo expresen como un cálculo. El docente podrá proponer escrituras del estilo \$0,50 + 0,50 + 0,50 = \$1,50 o incluso \$0,50 × 3 = \$1,50. Esto es valioso porque permite una entrada a las operaciones con decimales conservando el sentido: la escritura de la operación representa un cálculo que el alumno ya realizó y por eso conoce el resultado.

- Como ya se sostuvo a propósito de los números naturales, el trabajo con el cálculo mental cobra una importancia central. Implica, por un lado, asegurar que los niños construyan un repertorio de cálculos memorizados (0,50 + 0,50 = 1; 0,25 + 0,25 = 0,50; etcétera) que puede sistematizarse en carteles para el aula y la carpeta. Por el otro, implica que los niños produzcan y usen estrategias de cálculo diversas adaptadas a los números en juego.[28]

  La resolución de actividades de cálculo mental también permite que los alumnos pongan en funcionamiento relaciones que están en juego en las notaciones decimales. Por ejemplo, si se les propone que calculen mentalmente 3 + 0,4 + 0,08 o que agreguen 0,1 a los números 3,27; 4,08 y 7,4 se espera que se apoyen en el valor posicional de la escritura decimal para encontrar el resultado.

  Es posible que al sumar los niños produzcan algunos errores como, por ejemplo, 3,4 + 4,8 = 7,12. Este tipo de errores provienen de tratar a los decimales como dos números enteros separados por una coma, y por lo tanto operar sobre ellos separadamente. Se puede intervenir promoviendo el análisis del valor posicional de cada una de las cifras implicadas. En este caso, se trata de pensar que cuatro décimos más ocho décimos son doce décimos, y, como ya diez décimos es un entero, entonces hay que agregar un entero más. Por lo tanto, esa suma produce 8 enteros y 2 décimos. Este tipo de análisis puede ser retomado también en el trabajo con el algoritmo de la suma.

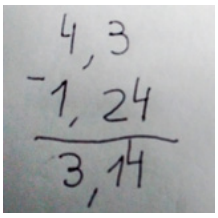
- Al igual que en el trabajo con números naturales, la introducción de los algoritmos debe estar apoyada en relaciones que los alumnos fueron estableciendo en actividades anteriores. Luego de haber discutido diferentes estrategias para realizar sumas o restas, el maestro puede proponer la discusión sobre el funcionamiento de los algoritmos. Por ejemplo, puede relacionarse la estrategia utilizada para sumar 3,4 + 4,8, con la organización en columnas que propone el algoritmo: el 1 que se escribe arriba del 3 es el entero que se forma al sumar los 8 décimos más los 4 décimos.

$$\begin{array}{rr} & \overset{1}{3}{,}4 \\ + & 4{,}8 \\ \hline & 8{,}2 \end{array}$$

---

[28] En el documento *Matemática. Cálculo mental con números racionales* de la serie Apuntes para la enseñanza, publicado por el GCABA, Secretaría de Educación, Dirección de Currícula en 2006 se pueden encontrar muchas propuestas de trabajo con cálculo mental. Disponible en: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pluri_mate.php?menu_id=20709

En el algoritmo de la resta pueden aparecen distintos tipos de dificultades. En algunos casos, es posible encontrar errores como el siguiente:



En otras situaciones los alumnos resuelven exitosamente el algoritmo agregando un 0 al lado del 3 de 4,3, sin comprender las razones por las cuales lo hacen.

En ambas situaciones será necesario que el docente intervenga para que los alumnos se apoyen en relaciones trabajadas en clases anteriores para comprender las razones de su error o para dotar de sentido a un mecanismo que funciona. Como 3 décimos es igual a 30 centésimos; entonces 4,3 es igual a 4,30. Si es necesario, podrá apelarse a las relaciones con las fracciones decimales: $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$. Es decir, acompañar el procedimiento de agregar un cero en el lugar de los centésimos con la explicación de que 3 décimos se "transforman" en su equivalente 30 centésimos permite encontrar razones a lo que se está realizando y controlar los resultados obtenidos. Cuando el docente hace explícito que "agregar un 0" se apoya en relaciones numéricas está transmitiendo que en Matemática hay argumentos que permiten validar procedimientos.

- En relación con la multiplicación de un número decimal por un entero, inicialmente los alumnos podrán apoyarse en la suma sucesiva. Así, por ejemplo, para resolver 0,35 × 5 podrán hacer 0,35 + 0,35 + 0,35 + 0,35 + 0,35.

A partir de allí, se podrá discutir el funcionamiento del algoritmo, apelando en este caso también al valor posicional de las cifras.

$$\begin{array}{r} 0{,}35 \\ \times \quad 5 \\ \hline \end{array}$$

Para favorecer la comprensión del mecanismo que está en juego, el docente puede referir al valor posicional de las cifras: se trata de multiplicar 35 centésimos por 5, lo que da 175 centésimos y se escribe 1,75.

La multiplicación de números decimales entre sí no puede concebirse como una suma sucesiva. Es imposible concebir el producto de 4,7 × 2,3 como el número 4,7 repetido 2,3 veces. A lo sumo podrá pensarse que el resultado será menor que 4,7 *repetido* 3 veces y mayor que 4,7 *repetido* 2 veces. Para comprender el funcionamiento del algoritmo de la multiplicación de números decimales entre sí es posible proponer a los alumnos diferentes análisis y relaciones:

- › Apoyarse en la multiplicación de fracciones decimales. Por ejemplo:

$$2{,}37 \times 1{,}4 = \frac{237}{100} \times \frac{14}{10} = \frac{3.318}{1.000} = 3{,}318$$

- › Apoyarse en la descomposición de cada factor en el producto de un número natural por un decimal del tipo 0,1; 0,01; 0,01; etcétera. Entonces, para realizar 1,2 × 0,4 se puede pensar:

$$1{,}2 \times 0{,}4 = 12 \times 0{,}1 \times 4 \times 0{,}1 = 12 \times 4 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 48 \times 0{,}01 = 0{,}48.$$

Proponer una u otra explicación será decisión del docente en función de la trayectoria del grupo, el tipo de relaciones que se ha venido trabajando, etcétera. Por ejemplo, para realizar el último análisis será central que los alumnos ya tengan disponibles las multiplicaciones por 0,1; 0,01; etcétera. Para ello será necesario proponer actividades como:

Resolvé los siguientes cálculos usando la calculadora.

4 : 10 =	15 : 10 =	34 : 10 =
4 × 0,1 =	15 × 0,1 =	34 × 0,1 =

¿Qué pasa con los resultados que obtuviste en las divisiones y en las multiplicaciones?

La intención de este tipo de propuesta es promover que los niños establezcan la relación entre multiplicar por 0,1 y dividir por 10. De igual manera que multiplicar por 0,01 es lo mismo que dividir por 100. Para que estas relaciones surjan en la clase podrían plantearse en la discusión colectiva preguntas del tipo: *¿Será que siempre dividir por 10 da lo mismo que multiplicar por 0,1? ¿Probamos con otros ejemplos a ver si sigue pasando? ¿Por qué?*

- En cuanto a la división de números decimales por números naturales, el docente puede intervenir para que los alumnos comprendan que al realizar 23,6 : 5, se dividen primero los enteros.[29]

$$\begin{array}{r|l} 23{,}6 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 4 \end{array}$$

Sobran 3 enteros que no puedo seguir dividiendo entre 5, pero 3 enteros = 30 décimos y como tenía 6 décimos más, tengo que seguir dividiendo 36 décimos:

$$\begin{array}{r|l} 36 \text{ décimos} & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 7 \text{ décimos} \end{array}$$

---

[29] En el documento GCABA, Secretaría de Educación, DGPLED, Dirección de Currícula (2005) *Matemática. Fracciones y números decimales, 5º grado.* Apuntes para la enseñanza (material para el docente), p. 63 se analiza el funcionamiento de la división de decimales por un número natural. Disponible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/plan_plurianual_oct07/matematica/m5_docente.pdf [consultado el 14/9/2018].

Alcanza para repartir 7 décimos a cada uno y sobra un décimo. Como 1 décimo = 10 centésimos, se continúan dividiendo los centésimos:

$$\begin{array}{l|l} 10 \text{ centésimos} & \underline{5 \qquad\qquad} \\ 0 & 2 \text{ centésimos} \end{array}$$

Entonces hacer 23,6 : 5 da 4 enteros, 7 décimos y 2 centésimos, es decir, 4,72.

En cuanto a la división entre números decimales, será central que los alumnos comprendan que, para realizar, por ejemplo, 4,2 : 1,6 se puede transformar esa cuenta en 42 : 16 porque ambos números se multiplican por 10. El docente podrá intervenir para explicitar una propiedad de la división: si se multiplican el dividendo y el divisor por un mismo número, no se modifica el cociente.

Números decimales, fracciones decimales y medida

Como ya se ha señalado, al inicio del trabajo con números decimales el contexto de la medida puede servir de apoyo. Más adelante, al estudiar el sistema métrico se pondrán en juego también las relaciones entre fracciones decimales y números decimales (así como las relaciones de proporcionalidad). La organización del sistema de unidades de medida es decimal, por lo tanto la escritura de medidas pone en juego los números *con* coma. Por eso, la transformación entre unidades exige cálculos por 10, 100, 1.000 y por 0,1; 0,01; 0,001 (o por su expresión como fracción decimal por $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etcétera). La enseñanza debe apuntar a que los niños comprendan que el sistema métrico está basado en relaciones decimales entre las unidades: un decigramo es la décima parte del gramo (es $\frac{1}{10}$ o 0,1 del gramo); un miligramo es la milésima parte del gramo (es $\frac{1}{1.000}$ o 0,001 del gramo), etcétera. La escritura decimal permite entonces escribir con un solo número una medida compuesta por diferentes unidades. Por ejemplo: 4 gramos, 3 decigramos y 5 miligramos puede escribirse como 4,305 gramos.[30]

Todas las actividades que exigen expresar una medida dada en una unidad en otra unidad, o analizar la información que provee la escritura de una medida, resultan oportunidades para volver a utilizar y enriquecer la multiplicación de números decimales por 10, 100, 1.000 y la relación entre la posición de las cifras y su valor.

---

[30] En el apartado 6, “Medida”, se recomiendan documentos curriculares que proporcionan ejemplos de actividades para promover estos aprendizajes.

En las actividades con la medida, a propósito de las equivalencias entre unidades (1 metro = 100 centímetros, etcétera), es posible establecer relaciones entre la escritura de una medida en forma de fracción o como escritura decimal.

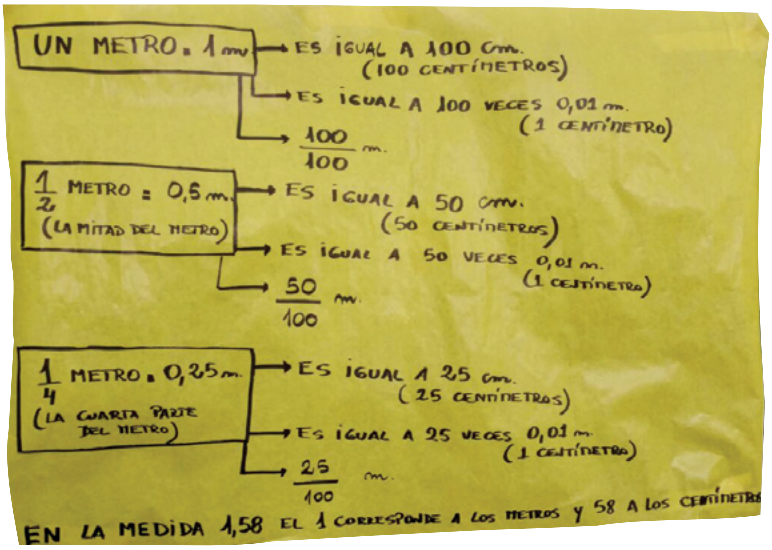
Por ejemplo, en actividades como estas:

a) ¿Qué parte es 1 cm del metro? Escribila como fracción y como número decimal.
b) ¿Qué parte es 50 cm de un metro? Escribila como fracción y como número decimal.
c) El hermano de Cecilia mide 140 cm, ¿cómo se escribe su altura en metros?

Marcá con una cruz cuáles de estas medidas son equivalentes entre sí.

a) 3 m 40 cm	340 cm	304 cm
b) 5 m 6 cm	5,06 cm	5,6 cm
c) 2,76 dm	27,6 cm	0,276 m

Las relaciones establecidas a propósito de trabajos de este tipo pueden sistematizarse en carteles como el siguiente:



UN METRO = 1 m → ES IGUAL A 100 cm. (100 CENTÍMETROS)
→ ES IGUAL A 100 VECES 0,01 m. (1 CENTÍMETRO)
→ $\frac{100}{100}$ m.

$\frac{1}{2}$ METRO = 0,5 m. (LA MITAD DEL METRO) → ES IGUAL A 50 cm. (50 CENTÍMETROS)
→ ES IGUAL A 50 VECES 0,01 m. (1 CENTÍMETRO)
→ $\frac{50}{100}$ m.

$\frac{1}{4}$ METRO = 0,25 m. (LA CUARTA PARTE DEL METRO) → ES IGUAL A 25 cm. (25 CENTÍMETROS)
→ ES IGUAL A 25 VECES 0,01 m. (1 CENTÍMETRO)
→ $\frac{25}{100}$ m.

EN LA MEDIDA 1,58 EL 1 CORRESPONDE A LOS METROS Y 58 A LOS CENTÍMETROS

Documentos curriculares para consultar

GCABA, Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula (2005) *Números racionales* (para 4º, 5º, 6º y 7º grado). Disponible en: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pluri_mate.php?menu_id=20709 [consultado el 31/8/2018].

GCABA, Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento (2006) *Matemática. Cálculo mental con números racionales*. Apuntes para la enseñanza. Disponible en: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pluri_mate.php?menu_id=20709 [consultado el 31/8/2018].

GCABA, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula (2001) *Acerca de los números decimales: una secuencia posible*. Aportes para el desarrollo curricular. Disponible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/primaria/aportes/areas/matematica/matematicaweb.pdf [consultado el 31/8/2018].

Ministerio de Educación de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (2017) *Matemática. 2º ciclo. Segunda parte*. Aceleración y Nivelación. Serie Trayectorias Escolares. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/527/download [consultado el 11/10/2018].

Ministerio de Educación de la Nación (2012) *Matemática para todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza. Operaciones con números naturales. Fracciones y números decimales*. Vol. 1, pp. 97-111. Disponible en: http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL005016.pdf [consultado el 31/8/2018].

Ministerio de Educación de la Nación (2014) *Matemática para todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza 2. Operaciones con fracciones y números decimales. Propiedades de las figuras geométricas*, pp. 7-63. Disponible en: http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL005788.pdf [consultado el 31/8/2018].

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2007) *NAP. Matemática 4, 5 y 6. Segundo ciclo EGB / Nivel Primario*. Serie Cuadernos para el aula. 4º grado: pp. 49-64, 5º grado: pp. 90-113 y 6º grado, pp. 41-111. Disponible en: http://repositorio.educacion.gov.ar [consultado el 8/1/2019].

5. Geometría

El propósito de la enseñanza de la geometría en la escuela primaria es que los alumnos se apropien de un conjunto de conocimientos sobre las propiedades de las figuras y los cuerpos geométricos y también del modo de pensar de la disciplina. A lo largo del segundo ciclo, es necesario que el docente plantee propuestas de trabajo que permitan que los niños aprendan que las propiedades de las formas permiten realizar afirmaciones sin necesidad de apelar a la constatación empírica. Se trata de que, a largo plazo, puedan realizar afirmaciones como: *"Puedo estar seguro, sin medir, de que este ángulo mide 40°, porque entre los otros dos ángulos de este triángulo suman 140°".*

Intervenciones de enseñanza

Diferentes actividades pueden proponerse para que los alumnos se apropien progresivamente de las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos: copiados, dictados, construcciones, actividades que permitan reconocer un cuerpo o una figura entre otros a partir de sus propiedades, identificación de desarrollos planos, etcétera. Sin embargo, debe advertirse que estas actividades no son un objeto de enseñanza en sí mismas, son herramientas posibles para enseñar las propiedades de determinadas figuras geométricas.[31] Por ejemplo, en una actividad de construcción de un triángulo, el propósito no es que los alumnos logren "excelentes dibujos", sino que durante la actividad y en el análisis posterior puedan, a partir de lo realizado, avanzar en el conocimiento de las propiedades que se pusieron en juego durante esa construcción.

Algunas consideraciones importantes para tener en cuenta a la hora de decidir intervenciones de enseñanza:

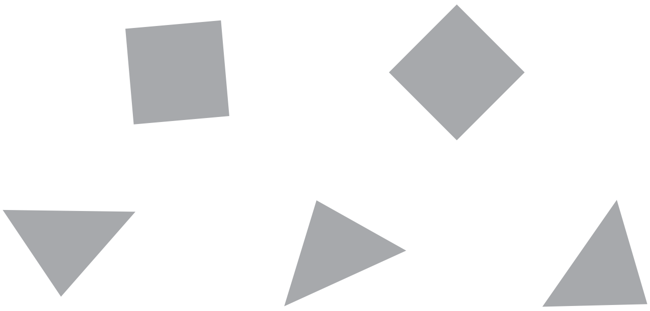
- Hay un asunto que recorre el trabajo geométrico en la escuela primaria y en particular el segundo ciclo: la diferencia entre *dibujo* y *figura*. La figura es un objeto ideal, es un objeto descripto por el texto que la define, es una idea que se representa por medio

---

[31] En *Matemática. Documento de trabajo n° 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*, serie Actualización curricular, publicado en 1998, se describen con detalle las características de ese tipo de actividades y su potencial para la enseñanza. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/67/download [consultado el 30/8/2018].

de un dibujo. El dibujo no tiene las propiedades del objeto que representa, justamente porque es una representación, y a la vez, el dibujo tiene propiedades que no son de la figura (por ejemplo, su posición en la hoja). En un problema geométrico la función que cumplen los dibujos en su resolución no es la de permitir arribar a la respuesta por simple constatación sensorial, aunque ella pueda jugar algún papel en el trabajo. No alcanza con ver un dibujo para comprender las propiedades que definen a una figura, y al mismo tiempo, a medida que evolucionan los conocimientos geométricos de los alumnos, cada vez se vuelven más *observables* en ese dibujo las propiedades de la figura que representa. Algo así como "se ve más cuando se sabe más". Por eso es importante que el trabajo de análisis de las figuras no quede ligado a la percepción.

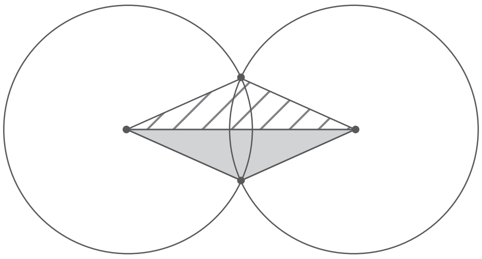
- Los niños deben reconocer que en Geometría la orientación de una figura no constituye un atributo esencial. Por eso, es necesario que, en diferentes actividades, los dibujos de las figuras geométricas estén ubicadas en distintas posiciones y orientaciones.



Por otra parte, es habitual que se trabaje siempre, o casi siempre, en los libros de texto o en el aula, con un mismo tipo de dibujo, que se termina transformando en una figura prototípica. Por ejemplo, en el caso del rectángulo, los dibujos que se presentan mantienen una proporción similar entre su lado más corto y su lado más largo. En cuanto al paralelogramo, en general los dibujos que se usan para representarlos tienen ángulos de aproximadamente 45° y 135°.

Como consecuencia no buscada, los alumnos suelen construir una "definición" que permanece implícita y queda ligada a esas características del dibujo. Por eso será necesario que, en las propuestas de actividades y en los carteles del aula, aparezcan dibujos que tengan otras relaciones entre sus lados y otras medidas de ángulos.

- No se trata de explicar esta diferencia entre dibujo y figura a los alumnos, sino de que se constituya en un marco que oriente las intervenciones del docente durante el trabajo en Geometría. Hay varias situaciones de enseñanza en las que esta distinción se pone en juego. Por ejemplo, cuando los alumnos deben construir triángulos a partir de la medida de sus tres lados, con el objetivo de analizar luego que se puede construir uno solo, los niños suelen afirmar que se pueden construir dos triángulos, sin advertir que se trata de la misma figura ubicada en posiciones diferentes.



Frente a esta situación, es posible intervenir para hacer evidente a los alumnos que si se rotan, el triángulo "de arriba" coincide exactamente con "el de abajo". Habrá que explicitar que la posición del dibujo de un triángulo en la hoja puede variar, **pero sigue siendo el mismo triángulo, porque si los lados de un triángulo tienen la misma longitud que los lados de otro, ambos coinciden al superponerlos y por lo tanto son iguales. Son dos dibujos del mismo triángulo**.

- Hay otro tipo de situaciones donde esta distinción también se pone en juego: cuando los niños se basan en propiedades del dibujo para afirmar la validez de los resultados obtenidos. Por ejemplo, si ya se ha estudiado que los triángulos equiláteros tienen todos sus lados y sus ángulos iguales, y se pregunta entonces cuál será la medida de los ángulos, algunos alumnos podrían afirmar que en un triángulo equilátero todos los ángulos miden 60° porque *"los medí y me dio eso"* o, que en un triángulo equilátero los ángulos no miden lo mismo porque *"usé el transportador y me dio uno de 55° y un poco, y el otro de 62°"*. El docente, puede intervenir para que los niños se apoyen en propiedades ya estudiadas para producir explicaciones. Podría preguntar: *Y si se tratara de un triángulo equilátero, pero más grande que ese que dibujaste, ¿estás seguro de que sus ángulos también medirán 60°? ¿Y en otro más pequeño? ¿Tenés que medirlos a todos o hay una manera de saber sin medir uno por uno?* La intención de estas preguntas es que los alumnos abandonen el intento de justificar a partir de la medida, para apoyarse en la propiedad de la suma de los ángulos interiores, ya trabajada. Es probable que los niños no recurran inmediatamente a este apoyo. Será necesario que el docente haga esa referencia: *¿Te acordás que anotamos en la carpeta algo referido a los ángulos de todos los triángulos? Buscá lo que anotamos que te va a servir para pensar sobre esto.*

- Si bien, como se señaló, es importante alentar a los niños a buscar explicaciones que se apoyen en propiedades y en un proceso deductivo, el dibujo cumple un rol importante. Realizar un esquema muchas veces permite empezar a buscar relaciones, a armar conjeturas, a reconocer algunas propiedades que ya se saben. En definitiva, puede ser un comienzo para avanzar hacia la deducción de lo que se quiere averiguar.

Por ejemplo, a partir de realizar y analizar construcciones de triángulos dadas distintas medidas de ángulos (con dos ángulos de 90° o con uno de 60° y otro de 120°, etcétera) podrá conjeturarse que *no con cualquier medida de ángulo es posible formar un triángulo*. Esta primera conjetura necesitará luego ser completada con una demostración ofrecida, en este caso, por el maestro, que permitirá pasar del *"no me sale ese triángulo"* a *"es imposible que un triángulo tenga esas medidas de ángulos"*.[32]

No siempre es fácil decidir qué dibujo puede servir de apoyo para resolver un problema. Por ejemplo, en una situación donde los niños están discutiendo si en todos los cuadriláteros las diagonales son iguales, puede suceder que un alumno dibuje un rectángulo, trace las diagonales y sostenga entonces que esa frase es cierta. En ese caso se apoya en la información que da un dibujo en particular y lo generaliza a todos los cuadriláteros. En esa misma situación, el docente puede pedir que se dibujen entonces otros cuadriláteros o incluso proveer el dibujo de otros cuadriláteros no rectángulos (por ejemplo, un trapecio, un trapezoide, un romboide, etcétera) para analizar esa misma propiedad. Así estará interviniendo para evitar que algo que sucede en un dibujo que representa a un cuadrilátero particular se generalice a todos los cuadriláteros. Por eso, cuando se recurre al dibujo como apoyo para pensar sobre alguna propiedad, es importante considerar y decidir qué figura conviene dibujar.

- Como se explicó antes, hay algunas situaciones de enseñanza en las que se pide a los alumnos que realicen construcciones que no son posibles de realizar, por ejemplo, construir un triángulo con dos ángulos de 90°. La intención es generar discusiones en el aula que permitan que los niños pasen del "no me sale" al "no es posible", produciendo explicaciones que se apoyan en las propiedades de las figuras. Por ejemplo, si se pide a los alumnos que construyan un paralelogramo que tenga un lado de 4 cm, otro de 6 cm y la diagonal de 11 cm, es posible que varios alumnos intenten realizar la construcción y no logren hacerla, o que otros "fuercen" los datos para "unir" los lados y la diagonal buscando cumplir con la tarea pedida por el docente. En la discusión colectiva se podría intervenir preguntando: *Algunos dicen que no lo pueden armar y otros finalmente dicen que lo construyeron. ¿Se puede o no se puede? ¿Cómo podemos estar seguros de si es posible o no armar ese paralelogramo? Probemos armar primero el triángulo que se forma con la diagonal y los lados para luego completar el paralelogramo. ¿Se puede? ¿Se acuerdan que hace un tiempo discutimos sobre los lados de un triángulo? Fíjense si lo encuentran en la carpeta.* Se espera que en la conversación circulen ideas como: *No se puede porque con dos lados y la diagonal del paralelogramo te queda armado un triángulo y en un triángulo la suma de dos lados debe dar más que el tercero. Seis más cuatro es diez, y eso es menor que el tercer lado de once*. Se trata, entonces, de volver a apelar a una propiedad conocida (la propiedad triangular) para apoyar allí la imposibilidad de esa construcción.

---

[32] En el documento *Grado de Aceleración 6° / 7°. Matemática. Tercer Tomo: Geometría. Material para el docente*, publicado por el Ministerio de Educación del GCABA en 2005 y 2014 se puede encontrar un ejemplo de la explicación sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/523/download [consultado el 11/10/2018].

- En el trabajo geométrico unas propiedades se deducen a partir de otras. Por eso, en todas las demostraciones que se realicen con los alumnos, hay ciertas propiedades que se toman como verdaderas y se usan para arribar a otras nuevas, sin necesidad de demostrarlas. Por ejemplo, cuando se trata de demostrar que en un triángulo la suma de los ángulos interiores es 180°, es posible apoyarse primero en que en un triángulo rectángulo la suma de sus ángulos es 180° a partir de aceptar como verdadero que la suma de los ángulos interiores de un rectángulo es 360° (porque así lo señala su definición) y su diagonal lo divide en dos triángulos iguales (lo que siempre resulta evidente para los niños). Por lo tanto, en cada uno de ellos la suma de sus ángulos interiores es 180°. ¿Cuáles son esas propiedades que se aceptan como verdaderas con los alumnos para elaborar argumentos a partir de ellas? En algunos casos, serán las relaciones que ya fueron demostradas anteriormente (por ejemplo, la suma de los ángulos interiores del triángulo es apoyo para deducir cuál es la suma de los ángulos interiores de diferentes polígonos). En otros casos, serán aquellas propiedades que "tienen cierto grado de evidencia", como que la diagonal de un rectángulo lo divide en dos triángulos iguales. En otros, será porque esa propiedad constituye la definición de la figura con la que se está tratando, por ejemplo, en un cuadrado todos los ángulos son rectos.

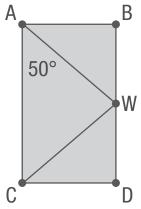
  No siempre es posible que los alumnos elaboren solos, en la escuela primaria, las demostraciones. En muchas ocasiones, será necesario que las explicaciones las dé el docente, luego de un trabajo de exploración y construcción de conjeturas por parte del alumno.

- En relación con las actividades que implican construcciones de figuras, hay que tener en cuenta que no es posible con una sola construcción trabajar todas sus propiedades. Distintas construcciones movilizan diferentes propiedades según los datos que se den, los instrumentos que se permita utilizar y el tipo de papel (cuadriculado o blanco) que se utilice. Por ejemplo, si se pide construir un cuadrado a partir de una de sus diagonales, usando solamente regla no graduada y compás, será necesario tener en cuenta que las diagonales son iguales, se cortan en el punto medio y son perpendiculares. En cambio, si se pide construir un cuadrado a partir de un lado, con regla y transportador, hay que tener en cuenta que los lados son paralelos e iguales y sus ángulos son rectos.

- Cuando algunos niños evidencian mayores dificultades para construir con éxito figuras, el docente los puede ayudar organizando en conjunto los pasos que hay que seguir para construir la figura pedida. Por ejemplo, mediante preguntas orientadoras como: *¿Por dónde podés empezar a construir esta figura? ¿Qué conviene dibujar primero? ¿Te parece que empecemos por este lado?* También es posible que sea el docente quien inicie la construcción y le proponga al alumno que la continúe (trazándole uno de los lados o la circunferencia que sirva de apoyo, etcétera); también puede ser posible que el niño dicte lo que es necesario hacer, pero que sea el docente quien realice esa construcción.

- Como ya se señaló, hay otras actividades, además de las que implican construcciones, para favorecer que los niños elaboren y pongan en juego conocimientos geométricos. Por ejemplo, aquellas situaciones en las que los alumnos deben apelar a relaciones para anticipar medidas (de lados o ángulos) sin recurrir a la experiencia de medir. En este tipo de actividades deben apoyarse en algunas propiedades para hacer anticipaciones, poniendo en juego un modo de pensar propio de la geometría. Por ejemplo:

En el rectángulo ABCD se ha marcado el punto medio de BD llamándolo W. Calculen el valor de todos los ángulos cuya medida se puede deducir a partir de los datos dados.



En estas situaciones, cuando el alumno no logra por sí solo establecer relaciones, el docente puede intervenir de diferentes maneras.

› Puede realizar preguntas que le permitan al niño identificar algunos datos que ya se conocen, aunque no están explicitados, para que tomen conciencia de que hay información disponible, aunque no esté destacada en el dibujo. En este caso, por ejemplo, se podría preguntar: *Si nos informan que es un rectángulo, ¿qué sabemos de los ángulos A, B, C y D? Además del rectángulo, ¿hay otras figuras ahí que nos pueden ayudar? ¿Qué figuras hay? Si W es el punto medio de BD, ¿qué sabemos de los lados BW y WD?*

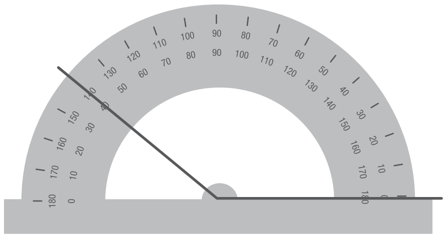
› Otras intervenciones posibles son las que apuntan a recuperar algunos conocimientos ya trabajados, que son necesarios para la resolución. Por ejemplo: *Fijate en las conclusiones que anotamos en la carpeta sobre los ángulos de los triángulos. Eso te va a dar pistas para saber cómo seguir. El otro día trabajamos sobre los triángulos isósceles. Algunas de las cuestiones que anotamos te van a servir ahora.*

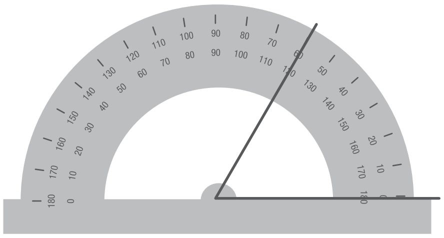
› En este ciclo se retoma el uso de la regla y la escuadra –iniciado en el primer ciclo– y se incorpora el compás, el transportador y la regla no graduada. Si bien un cierto dominio en el uso de los instrumentos geométricos es necesario para el abordaje de muchos problemas, no es ese un objeto de estudio de la geometría. El trabajo con estos instrumentos es un recurso valioso para propiciar el estudio de ciertas propiedades de las figuras, que se ponen en evidencia cuando se las quiere construir a partir de alguna información. Por eso es necesario enseñar a utilizarlos, pero sin perder de vista cuál es el propósito.

› El uso del transportador es costoso, en general, para los alumnos. Antes de enseñar a utilizarlo, es conveniente que en la clase se haya discutido sobre las amplitudes de los ángulos, la independencia entre el largo de los lados y la amplitud del ángulo y la medición de ángulos usando el ángulo recto como unidad de medida (decidiendo si un ángulo resulta mayor o menor que un ángulo recto). Al presentar el transportador es importante explicar algunas cuestiones centrales para su uso: *El centro del transportador debe coincidir con el vértice del ángulo y uno de sus lados debe pasar por el cero*. El docente puede realizar preguntas que guíen la exploración de este instrumento: *¿Qué números están marcados? ¿Cuántas rayitas hay entremedio de dos números seguidos? ¿Cuántos grados representa cada marquita?*, etc.

Para aprender a usar el transportador, se puede comenzar con actividades en las que este instrumento ya esté dibujado y por lo tanto no se exija que el niño decida cómo ubicarlo: entonces solo tendrá que identificar cuál es la medida que corresponde al ángulo dibujado. Por ejemplo:

¿Qué medidas está indicando el transportador en cada caso? Escribilas debajo de cada uno.





En esta actividad, anticipar si el ángulo dibujado es mayor o menor que un recto permitirá decidir cuál de las dos medidas es la que corresponde (140° o 40° en el primer caso y 70° o 110° en el segundo).[33]

- El trabajo con el programa de geometría dinámica Geogebra[34] puede ser otra oportunidad para profundizar el análisis de las propiedades de las figuras geométricas, que complementa el trabajo que se realiza con lápiz y papel, pero sin sustituirlo.

Este programa u otros similares permiten, a diferencia del lápiz y el papel, que los alumnos "manipulen" las figuras que construyen, que las desplacen y las arrastren. Las propiedades geométricas de la figura pueden ser leídas como las que se conservan a través de desplazamientos dado que las construcciones dejan de ser válidas si, al ser desplazadas, pierden sus características. Es necesario que el docente comunique a los niños que una construcción,

---

[33] Actividades similares a esta se pueden en encontrar en el material *Grado de Aceleración 4ª / 5°. Matemática. Tercer bimestre / Cuarto bimestre*. Material para el alumno, pp. 36-40 publicado por el Ministerio de Educación del GCABA en 2014. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/521/download [consultado el 11/10/2018].

[34] Geogebra puede descargarse del sitio https://www.geogebra.org/download.

en este programa de computadora, será aceptada como válida si, al mover cualquiera de los elementos, se conservan las propiedades del objeto construido. Se apunta, entonces, a que los alumnos construyan la idea de que una figura se debería poder desplazar, agrandar, achicar, rotar, etcétera, pero sin perderse las características y propiedades que definen el objeto construido. Este punto, característico del programa, condiciona fuertemente las decisiones que deben tomar los niños al momento de planificar una construcción.

Las intervenciones del docente son centrales para generar la explicitación de las propiedades de las figuras. Por ejemplo, si se pide que los alumnos construyan un cuadrado de modo que al mover cualquiera de sus vértices siga siendo un cuadrado, la discusión puede girar en torno a la comparación de distintas construcciones. Se podrá analizar por qué en algunas de las construcciones el cuadrado dejó de ser cuadrado al mover sus vértices y por qué, en otras, no sucedió lo mismo. Se podría concluir que, en algunos casos, se deformó porque las rectas dejaron de ser paralelas y perpendiculares o porque los ángulos dejaron de ser rectos y los lados iguales. El docente podría preguntar: *¿Cuáles son las propiedades del cuadrado que se mantienen y cuáles no? ¿Cómo pueden hacerse las construcciones de modo que no deje de ser cuadrado al moverlo? ¿Cómo podemos hacer para que se conserven las propiedades del cuadrado: los lados iguales y los ángulos rectos usando alguna herramienta de las que están en el programa?* Si no apareciera de parte de ningún alumno una construcción que tuviese en cuenta el paralelismo y la perpendicularidad, es decir, una construcción tal que al mover cualquiera de sus vértices siguiera siendo un cuadrado, el docente podría plantear: *¿Sería posible dibujar un cuadrado usando las herramientas de rectas perpendiculares y/o paralelas? Háganlo y luego muevan uno de sus vértices. ¿Sigue siendo un cuadrado?*

Para estos momentos de puesta en común es conveniente, en la medida de lo posible, contar con una pantalla que permita discutir en conjunto, observando qué sucede al desplazar las figuras, al usar determinados comandos, etc.

Por último, es importante advertir que al inicio del trabajo con Geogebra resulta necesario proponer algunas actividades que permitan a los alumnos la exploración de los comandos del programa. De todas maneras, es a partir de su uso que se familiarizarán cada vez más con las diferentes funciones.

Documentos curriculares para consultar

GCABA, Ministerio de Educación (1998) *Matemática. Documento de trabajo n° 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*. Disponible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/doc5.pdf [consultado el 6/9/2018].

GCABA, Ministerio de Educación, Gerencia Operativa de Inclusión Educativa (2005 y 2014) *Grado de Aceleración 6º / 7°. Matemática. Tercer tomo: Geometría. Material para el docente*. Proyecto Conformación de Grados de Aceleración. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/523/download [consultado el 11/10/2018].

GCABA, Ministerio de Educación, Gerencia Operativa de Inclusión Educativa (2014) *Grado de Aceleración 4º / 5°. Matemática. Segundo bimestre / Tercer bimestre. Material para el alumno*. Proyecto Conformación de Grados de Aceleración Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/520/download [consultado el 11/10/2018].

GCABA, Ministerio de Educación, Gerencia Operativa de Inclusión Educativa (2014) *Grado de Aceleración 4º / 5°. Matemática. Tercer bimestre / Cuarto bimestre. Material para el alumno*. Proyecto Conformación de Grados de Aceleración. Disponible en: http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/521/download [consultado el 11/10/2018].

GCABA, Secretaría de Educación y Cultura, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currículum (1993) *Taller de resolución de problemas. Matemática 3º ciclo*. Disponible en: http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/trp.pdf [consultado el 6/9/2018].

GCABA, Secretaría de Educación, EdeC (Escuela de Capacitación), Cepa (Centro de Pedagogías de Anticipación) (2003) *Enseñar Geometría en el primer y segundo ciclo. Diálogos de la capacitación*. Disponible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/cepa/geometria.pdf [consultado el 6/9/2018].

GCABA, Secretaría de Educación, EdeC (Escuela de Capacitación), Cepa (Centro de Pedagogías de Anticipación) (2007) *Estudiar Geometría y Pensar su enseñanza. Textos para curso a distancia*.

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, Dirección General de Cultura y Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección Provincial de Educación de Gestión Estatal, Dirección de Educación General Básica, Gabinete Pedagógico Curricular, Matemática (2001) *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la geometría en EGB. Documento Nº 3*. La Plata. Disponible en: http://servicios2.abc.gov.ar/docentes/capacitaciondocente/plan98/pdf/geometria.pdf [consultado el 8/1/2019].

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, Dirección General de Cultura y Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección Provincial de Educación Primaria, Dirección de Gestión Curricular (2007) *Matemática N° 5 A. Operaciones con números naturales. 2ª parte. Propuestas para alumnos de 3° y 4° año. Material para el docente*. Serie Curricular. La Plata. Disponible en: http://abc.gob.ar/primaria/sites/default/files/documentos/matematica_ndeg_5_a._operaciones_con_numeros_naturales-_geometria._propuestas_para_alumnos_de_3deg_y_4deg_ano.pdf [consultado el 11/9/2018].

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, Dirección General de Cultura y Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección Provincial de Educación Primaria, Dirección de Gestión Curricular (2007) *Matemática N° 4. Números Racionales y Geometría. Algunas propuestas para alumnos de 6º año*. Serie Curricular. La Plata. Disponible en: http://abc.gob.ar/primaria/sites/default/files/documentos/matematica_ndeg_4._numeros_racionales_y_geometria-_propuestas_para_alumnos_de_6deg_ano.pdf [consultado el 7/9/2018].

Ministerio de Educación de la Nación (2014) *Matemática para todos en el Nivel Primario. Notas para la enseñanza 2. Operaciones con fracciones y números decimales. Propiedades de las figuras geométricas*, 1ª ed., pp. 65-141. Disponible en: http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL005788.pdf [consultado el 6/9/2018].

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2007) *NAP. Matemática 4, 5 y 6. Segundo ciclo EGB / Nivel Primario*. Serie Cuadernos para el aula. 4º grado: pp. 134-155, 5º grado: pp. 137-153 y 6º grado: pp. 136-152. Disponible en: http://repositorio.educacion.gov.ar [consultado el 8/1/2019].

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2012) *Leer, escribir y argumentar. Matemática. Último año primaria/Inicio secundaria*. Cuadernos para el aula. Docentes. NAP. Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Disponible en: https://www.educ.ar/recursos/111095/cuaderno-septimo-ano-matematica-leer-escribir-argumentar-docentes [consultado el 7/9/2018].

6. Medida

En los ejes anteriores se han presentado intervenciones y propuestas que incluyen también aspectos del trabajo sobre la medida. En el eje Números racionales en particular, tanto en el caso de las fracciones como en el de los números decimales, se han descripto situaciones que involucran aprendizajes referidos a la medida: el uso de los números racionales (fracciones y decimales) para expresar medidas, la relación entre diversas unidades de medida y su vínculo con la escritura decimal. En el eje Geometría se han incluido algunas cuestiones relativas al uso de instrumentos de medición como el transportador.

Para otros aspectos relativos a este eje, como perímetro y área, por ejemplo, se pueden consultar los siguientes documentos curriculares en los que se presentan varias propuestas y actividades para la enseñanza.

Documentos curriculares para consultar

GCABA, Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Dirección de Currícula y Enseñanza (2010) *Matemática. El estudio de la medida. 2º ciclo*. Aportes para la enseñanza. Escuela Primaria. Disponible en: http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/libros/pm.557/pm.557.pdf [consultado el 11/9/2018].

GCABA, Secretaría de Educación y Cultura, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currículum (1993) *Taller de resolución de problemas. Matemática 3º ciclo*. Disponible en: http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/trp.pdf [consultado el 6/9/2018].

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, Dirección General de Cultura y Educación, Subsecretaría de Educación, Unidad Ejecutora Provincial (2007) *Orientaciones didácticas sobre la enseñanza de la medida en 2º ciclo. Documento de apoyo para la capacitación*. La Plata. Disponible en: http://abc.gob.ar/primaria/sites/default/files/documentos/orientaciones_didacticas_sobre_la_ensenanza_de_la_medida_en_2deg_ciclo.pdf [consultado el 11/9/2018].

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2007) *NAP. Matemática 4, 5 y 6. Segundo ciclo EGB / Nivel Primario.* Serie Cuadernos para el aula. 4º grado: pp. 155-172, 5º grado: pp. 154-173 y 6º grado: pp. 153-183. Disponible en: http://repositorio.educacion.gov.ar [consultado el 8/1/2019].

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2012) *Leer, escribir y argumentar. Matemática. Último año primaria/Inicio secundaria*. Cuadernos para el aula. Docentes. NAP. Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Disponible en: https://www.educ.ar/recursos/111095/cuaderno-septimo-ano-matematica-leer-escribir-argumentar-docentes [consultado el 7/9/2018].

Vamos Buenos Aires

Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires
04-04-2026