MATEMÁTICA

A

Guía de estudio

Educación Adultos 2000

*Material de distribución gratuita

Buenos Aires Ciudad

Vamos Buenos Aires

Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires

06-07-2025

Ministra de Educación e Innovación
Soledad Acuña

Subsecretaria de Coordinación Pedagógica y Equidad Educativa
Andrea Fernanda Bruzos Bouchet

Subsecretario de Carrera Docente y Formación Técnica Profesional
Jorge Javier Tarulla

Subsecretario de Gestión Económico Financiera y Administración de Recursos
Sebastián Tomaghelli

Subsecretario de Planeamiento e Innovación Educativa
Diego Meiriño

Directora General de Educación de Gestión Estatal
Carola Martínez

Directora de Educación del Adulto y el Adolescente
Sandra Jaquelina Cichero

Primera Impresión agosto - 2018

Adults 2000

Guía de Estudios Matemática A

Equipo Docente de Adultos 2000

Índice

Presentación de la materia

Seguramente usted no se acerca a la Matemática por primera vez. Ya ha estudiado esta materia en otras oportunidades y sus experiencias al respecto pueden haber sido muy variadas.

Quienes diseñamos la propuesta de enseñanza de Matemática en Educación Adultos 2000 partimos de algunas ideas generales sobre cómo estudiar esta materia que queremos compartir:

Usted utiliza en su vida diaria una gran cantidad de nociones matemáticas, las usa de manera tal que le permiten resolver diferentes situaciones relativas a su vida cotidiana. Nosotros consideramos que, partiendo de su «experiencia matemática», es posible avanzar hacia la interpretación de los conceptos matemáticos y es por eso que le proponemos no dejarla de lado al momento de ponerse a estudiar la materia.

Por otro lado, cada nuevo concepto matemático que se aprende se apoya en otros ya adquiridos como si se tratara de hileras de ladrillos que se asientan unas en otras para que la pared que se construye sea sólida. Cada adquisición pasa por una serie de etapas que van desde lo más concreto y ligado a nuestra experiencia cotidiana, hacia niveles de complejidad y abstracción cada vez mayores. Nosotros le proponemos acompañarlo/a en su tránsito por esas etapas de modo que pueda ir aprendiendo satisfactoriamente todos los temas.

En síntesis, le proponemos aprender Matemática de una manera semejante a la que el hombre ha seguido en la creación de las ideas matemáticas: descubriendo los conceptos a partir de problemas que debió resolver en su vida cotidiana (o a través de problemas de otras ciencias que requieren de conceptos matemáticos para ser resueltos) y avanzando luego hacia la resolución de problemas más complejos. Dado que la Matemática se expresa a través de un sistema de símbolos y representaciones que le es propio, también nos proponemos que usted pueda comprender el lenguaje con el que se expresa, desde su significado matemático y desde su relación con situaciones concretas.

La **guía de estudio** constituye la herramienta fundamental para el aprendizaje de los contenidos de la materia. Por lo tanto, un uso adecuado de la misma favorecerá su proceso de aprendizaje. Para ello, tenga en cuenta las siguientes **recomendaciones**:

Respete el orden de presentación de los temas y las actividades.

Resuelva cada una de las actividades a medida que se van presentando. Anímese a dar respuesta aunque no esté seguro si la misma es correcta o no. El error es un elemento más de aprendizaje que le permitirá avanzar hacia la construcción de los conceptos con los que esté trabajando.

No se anticipe leyendo las *Orientaciones*. Estas solo tendrán sentido para usted si previamente realizó la actividad propuesta.

Consulte todas las dudas que le vayan surgiendo. Puede hacerlo a través de cualquiera de los medios que le ofrecemos. Tenga en cuenta que, si usted puede asistir a una consultoría presencial, tendrá también la oportunidad de intercambiar y compartir el trabajo con otros alumnos. En la **hoja de recursos** de la materia encontrará información sobre las formas de contactarse con un consultor.

Utilice un cuaderno o carpeta para resolver por escrito las actividades propuestas en la guía, escribir sus dudas y realizar anotaciones vinculadas con el trabajo que está realizando. Tenga en cuenta que las actividades propuestas deben ser resueltas por usted mismo y que este trabajo será el que le irá indicando qué ha comprendido y cuáles son sus dificultades. Tener registro de esto facilitará su tarea y le resultará un material fundamental para hacer sus consultas.

Vaya registrando, de algún modo que a usted le resulte útil, toda la simbología matemática que la guía vaya presentando, de modo que pueda tenerla a mano cuando la necesite.

Respete su propio ritmo de trabajo. No hay un tiempo ni un ritmo que sea más apropiado que otro. Cada persona tiene el ritmo que necesita de acuerdo con sus tiempos y circunstancias, y no lo ayudará alterarlo.

Programa

Unidad 1:

Números naturales. Operaciones con números naturales. Propiedades. Convenciones para realizar cálculos. Problemas de conteo. Combinatoria.

Unidad 2:

Números enteros. Representación en la recta numérica. Operaciones con números enteros. Suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Unidad 3:

Números racionales. Representación en la recta. Fracciones y números decimales. Operaciones con números racionales. Proporcionalidad. Probabilidades.

Unidad 4:

Modelo matemático. Variables. Expresiones algebraicas. Ecuaciones. Solución de una ecuación. Resolución de ecuaciones. Inecuaciones.

Unidad 5:

Funciones. Interpretación y producción de gráficos cartesianos que representan situaciones contextualizadas. Funciones dadas por tabla de valores. Funciones dadas mediante fórmulas.

Unidad 6:

Geometría. Elementos de la geometría. Clasificación de ángulos. Ángulos entre paralelas. Clasificación de triángulos. Clasificación de cuadriláteros. La circunferencia y el círculo.

Unidad 7:

Las magnitudes y su medición. SIMELA. Unidades convencionales de longitud, capacidad, peso, superficie y volumen. Múltiplos y submúltiplos de la unidad de medida en cada magnitud.

UNIDAD 1: Números naturales - Operaciones

Actividad 1

Ana fue a la librería. Pidió 3 marcadores que costaban $15 cada uno, 2 cuadernos a $25 cada uno y 4 mapas de color a $3 cada uno. Al llegar a la caja vio que la docena de lápices se vendían a $24 y decidió llevar media docena. En el momento de pagar presentó dos vales que decían «$5 de descuento en tu próxima compra».

A partir de la información anterior, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto gastó Ana en la librería?

b) Para calcular lo que gastó Ana en la librería usted hizo algunas cuentas. ¿Qué operaciones matemáticas intervinieron en esas cuentas?

c) ¿En qué orden fue resolviendo las operaciones que intervinieron? Indique qué operación resolvió en primer lugar, qué operación resolvió a continuación y así sucesivamente.

Orientaciones

En la situación planteada utilizamos números con los que usted habitualmente tiene contacto.

Para responder a lo pedido en la actividad usted seguramente resolvió operaciones entre estos números e identificó el orden en que realizó estas operaciones. Al calcular el gasto de Ana en la librería, siguiendo el orden del enunciado, calculó en primer lugar cuánto dinero gastó en la compra marcadores, a continuación cuánto en la compra de cuadernos, cuánto en la de mapas, cuánto en la de lápices y finalmente cuál fue el descuento obtenido por la presentación de los bonos.

Para calcular, por ejemplo, cuánto gastó en los marcadores, usted pudo haber procedido de dos formas: sumando 3 veces el precio de cada marcador o multiplicando 3 por dicho precio. Vamos a utilizar la segunda opción para representar la situación planteada, por ser la más breve y cómoda. Para calcular, cuánto gastó en lápices pudo haber dividido 24 por 2.

Por lo tanto, para realizar el cálculo del gasto total en la librería intervienen distintas operaciones: multiplicaciones, una división, sumas y una resta. Resolvemos en primer lugar las multiplicaciones y la división y a continuación las sumas y la resta.

Si usted utilizó este orden intuitivamente para resolver la situación planteada, este es el mismo orden que utilizaremos para resolver los cálculos cuando se combinan operaciones.

Con + indicaremos la suma, con – la resta, con . la multiplicación y con : la división. Entonces podremos escribir el cálculo de lo gastado por Ana en la librería de la siguiente manera:

$$3 \cdot \$15 + 2 \cdot \$25 + 4 \cdot \$3 + \$24 : 2 - 2 . \$5 = \$109$$

Actividad 2

La empleada de la biblioteca de una escuela al final de cada día controla los movimientos de libros efectuados en la jornada. Para hacerlo registra cada ingreso o egreso de libros.

El día 31 de marzo a la hora de cierre se encontró con el siguiente listado:

- Apertura: 2543 libros.
- Préstamos a docentes: 132 libros.

- Préstamo a alumnos: 856 libros.
- Devoluciones: 270 libros.
- Donación de editoriales: 64 libros.
- Donación del Ministerio de Educación e innovación: 100 libros.
- Enviados al taller de reparación: 25 libros.

De acuerdo a la información anterior:

a) Calcule con cuántos libros abrió la biblioteca al siguiente día hábil.
b) Escriba de dos formas diferentes el cálculo que realizó en el ítem 1.

Orientaciones

Una de las opciones para resolver el problema es seguir el orden ofrecido por el listado y realizar las operaciones de izquierda a derecha en el orden escrito. Esto es:

2543 – 132 – 856 + 270 + 64 + 100 – 25 =

2411 – 856 + 270 + 64 + 100 – 25 =

1555 + 270 + 64 + 100 – 25 =

1825 + 64 + 100 – 25 =

1889 + 100 – 25 =

1989 – 25 =

1964

Otra de las opciones es sumar por un lado los ingresos y por otro lado los egresos, para luego restar ambos resultados. Para ello vamos a utilizar paréntesis, como se describe a continuación:

(2543 + 270 + 64 + 100) – (132 + 856 + 25) = 2977 – 1013 = 1964

1. Números naturales

Los números utilizados en las actividades precedentes, que son los números que utilizamos para contar, son los números naturales.

Al conjunto de los números naturales lo simbolizamos con la letra N. Escribimos:

$$N = \{1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$$

1.1. Convenciones para realizar cálculos

Para realizar cálculos entre números naturales combinando operaciones vamos a establecer el orden en el que deben realizarse dichas operaciones, de acuerdo a lo visto en las actividades.

En un cálculo en el que intervienen sumas, restas, multiplicaciones y divisiones deben resolverse en primer las multiplicaciones y divisiones y a continuación las sumas y restas de izquierda a derecha.

En un cálculo en el que intervienen paréntesis, estos nos indican que debemos resolver primero los cálculos planteados en su interior. Una vez resueltos los cálculos incluidos en los paréntesis, para continuar utilizamos la convención citada anteriormente. Es decir, resolviendo primero multiplicaciones y divisiones y a continuación las sumas y restas de izquierda a derecha.

En una sucesión de multiplicaciones o divisiones, los cálculos se realizan de izquierda a derecha.

Las convenciones dadas para realizar cálculos son también válidas para los conjuntos numéricos que trataremos más adelante.

Ejemplos:

10 + 3 · 5 = 10 + 15 = 25	**Resolución correcta.**
10 + 3 · 5 = 13 · 5 = 45	**Resolución incorrecta.**
(10 + 3) · 5 = 13 · 5 = 45	**Resolución incorrecta.**
15 – 10 + 3 = 5 + 3 = 8	**Resolución correcta.**
15 – 10 + 3 = 15 – 13 = 2	**Resolución incorrecta.**
100 : 10 : 2 = 10 : 2 = 5	**Resolución correcta.**
100 : 10 : 2 = 100 : 5 = 20	**Resolución incorrecta.**
30 : 5 · 3 = 6 · 3 = 18	**Resolución correcta.**
30 : 5 · 3 = 30 : 15 = 2	**Resolución incorrecta.**

Actividad 3

1. Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) 7,2 es un número natural.

b) 1503 es un número natural.

c) -3 es un número natural.

d) Existen infinitos números naturales.

2. Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) La suma de dos números naturales es siempre un número natural.

b) La resta de dos números naturales es siempre un número natural.

c) La multiplicación de dos números naturales es siempre un número natural.

d) La división de dos números naturales es siempre un número natural.

3. Luis Alberto recibió $500. Le dio la mitad a su hermano y luego compró dos libros a un costo de $75 cada uno. ¿Cuál de los siguientes cálculos permite determinar cuánto dinero le quedó?

a) 500 + 2 · 75 – 500 : 2

b) 500 – 500 : 2 – 2 · 75

c) (500 – 75) · 2

d) 500 : 2 + 2 · 75 – 500

4. Escriba un problema que se pueda resolver realizando el siguiente cálculo:

4.5 + 3.7 + 100: 2

5. Resuelva los siguientes cálculos:

a) $15 + 4 \cdot 20 =$

b) $5 \cdot 8 - 100 : 10 : 2 + 5 =$

c) $100 - 10 \cdot 3 - 15 - 5 =$

d) $(85 - 10 - 5) \cdot 4 =$

e) $15 . 3 - 12 : 4 - 7 \cdot 3 =$

f) $(13 + 24 : 8) : 2 - (4 + 2) =$

g) $5 + (8 + 20) \cdot (13 - 4) - 10 =$

6. Indique cuál de los siguientes cálculos da por resultado 11:

a) $4 + 2 \cdot 3 - 2 - 5$

b) $(4 + 2) \cdot 3 - 2 - 5 =$

c) $4 + 2 \cdot (3 - 2) - 5$

d) $(4 + 2) \cdot 3 - (5 - 2)$

2. Propiedades de la suma y multiplicación en el conjunto de números naturales

2.1. Propiedad conmutativa

Tanto en la suma como en la multiplicación se puede cambiar el orden en que operan los números sin que se modifique el resultado. Ejemplos:

$$\mathbf{3 + 5 = 5 + 3} \qquad \mathbf{10 + 7 = 7 + 10}$$

$$\mathbf{2 \cdot 9 = 9 \cdot 2} \qquad \mathbf{6 \cdot 11 = 11 \cdot 6}$$

La propiedad se cumple para cualquier par de números naturales *a* y *b*:

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

$$\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$$

Usted puede verificar que la propiedad conmutativa no es válida para la resta y la división.

2.2. Propiedad asociativa

Tanto en la suma como en la multiplicación se puede agrupar de manera diferente los números que intervienen en la misma sin que se modifique el resultado. Ejemplos:

$$\mathbf{19 + (143 + 7) = (19 + 143) + 7 = 19 + 143 + 7}$$

$$\mathbf{19 + 150 = 162 + 7}$$

$$\mathbf{169 = 169}$$

$$\mathbf{3 \cdot (5 \cdot 20) = (3 \cdot 5) \cdot 20 = 3 \cdot 5 \cdot 20}$$

$$\mathbf{3 \cdot 100 = 15 \cdot 20}$$

$$\mathbf{300 = 300}$$

La propiedad se cumple para cualquier terna de números naturales *a*, *b* y *c*:

$$\mathbf{a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)}$$

$$\mathbf{a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

Usted puede verificar que la propiedad asociativa no es válida para la resta y la división.

3. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma

Francisco tiene que comprar para cada uno de sus tres hijos un cuaderno cuyo costo por unidad es de \$25 y una lapicera cuyo costo por unidad es de \$10. ¿Cuál es el costo total de la compra?

Veamos diferentes maneras de resolver el problema:

- Por cada hermano los gastos son \$25 + \$10 y entonces el total es:

$$\mathbf{(\$25 + \$10) \cdot 3 = \$35 \cdot 3 = \$105}$$

- El gasto en cuadernos es de \$25 . 3 y el gasto en lapiceras es de \$10 . 3 y entonces el total es:

$$\mathbf{\$25 \cdot 3 + \$10 \cdot 3 = \$75 + \$30 = \$105}$$

Observamos que $(25 + 10) \cdot 3 = 25 \cdot 3 + 10 \cdot 3$ y la propiedad es válida para cualquier terna de número naturales *a*, *b* y *c*:

$$\mathbf{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c}$$

También es válida la siguiente propiedad para cualquier terna de números naturales *a*, *b* y *c*:

$$\mathbf{(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c}$$

Determine si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones para cualquier terna de números naturales *a*, *b* y *c*:

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$
- $(a + b) : c = a : b + a : c$
- $(a - b) : c = a : c - b : c$
- $a : (b + c) = a : b + a : c$
- $a : (b - c) = a : b - a : c$

Cálculo mental

Veamos cómo resolver mentalmente algunos cálculos utilizando propiedades de las operaciones y sin apelar a los algoritmos convencionales para su resolución.

1) Podemos resolver 1000 – 755 de la siguiente manera:
$1000 - 700 = 300$
$300 - 50 = 250$
$250 - 5 = 245$

2) $43 + 99 = 43 + 100 - 1 = 142$

3) $25 \cdot 120 = 5 \cdot (5 \cdot 120) = 5 \cdot 600 = 3000$

4) $5 \cdot 73 = 5 \cdot (70 + 3) = 5 \cdot 70 + 5 \cdot 3 = 350 + 15 = 365$

5) $8 \cdot 59 = 8 \cdot (60 - 1) = 8 \cdot 60 - 8 \cdot 1 = 480 - 8 = 472$

Actividad 4

1. Resuelva cada uno de los siguientes cálculos de dos maneras diferentes:

a) $4 + 7 + 10 =$

b) $(10 + 3 + 2) \cdot 7 =$

c) $(15 + 2 - 5) \cdot 4 =$

d) $(398 + 195) + (2 + 5) =$

2. Resuelva mentalmente. Luego escriba cómo lo hizo y qué propiedades utilizó:

a) $24 \cdot 5 =$

b) $2.500 - 554 =$

c) $9 \cdot 41 =$

d) $55 + 99 =$

e) $103 \cdot 8 =$

f) $49 \cdot 7 =$

g) $84 : 4 =$

3. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a) $100 : 10 = 10 : 100$

b) $70 - (25 - 12) = (70 - 25) - 12$

c) $105 \cdot 12 \cdot 100 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 12$

d) $100 : (10 : 2) = (100 : 10) : 2$

Actividad 5

Diremos que un número natural *a* es **múltiplo** de un número natural *b* si existe un número natural *c* tal que $a = b \cdot c$ y en tal caso diremos también que *b* es *divisor* de *a*.

Indique si son verdaderas las siguientes afirmaciones:

a) 5 es múltiplo de 1.

b) 1 es múltiplo de 5.

c) Todo número natural es múltiplo de sí mismo.

d) Todo número natural tiene infinitos múltiplos.

e) Todo número natural tiene infinitos divisores.

4. Problemas de conteo. Combinatoria

Actividad 6

En un restaurante se ofrecen almuerzos promocionales a precios muy accesibles. Los mismos se componen de una bebida, una entrada, un plato principal y un postre. Cada cliente arma su almuerzo a partir de las siguientes listas:

BEBIDAS	ENTRADAS	PLATOS PRINCIPALES	POSTRES
Agua mineral	Matambre	Milanesa con puré	Ensalada de frutas
Gaseosa	Lengua	Tallarines	Flan mixto
	Ensalada	Asado al horno	Helado
		Calabaza rellena	

Responda a las siguientes preguntas:

a) Por cada bebida, ¿cuántas opciones de entradas propone el restaurante?

b) Teniendo en cuenta solo la bebida y la entrada, ¿cuántas elecciones diferentes pueden armarse?

c) Un cliente ya eligió la bebida y la entrada. Por cada elección, ¿entre cuántos platos principales puede optar?

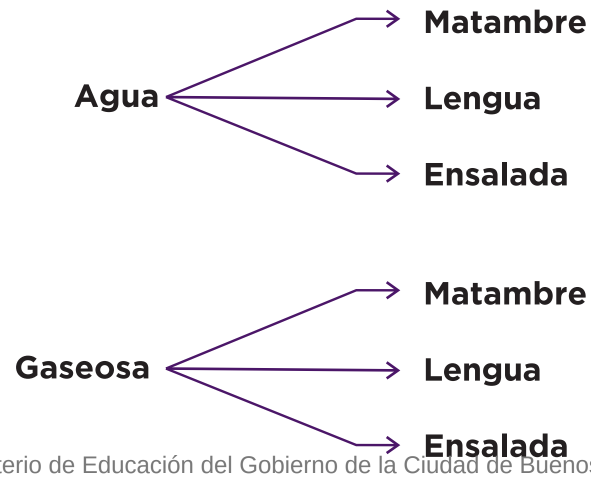
d) Teniendo en cuenta solo la bebida, la entrada y el plato principal, ¿cuántas elecciones diferentes pueden armarse?

e) El cliente ya eligió la bebida, la entrada y el plato principal. Por cada elección, ¿entre cuántos postres puede optar?

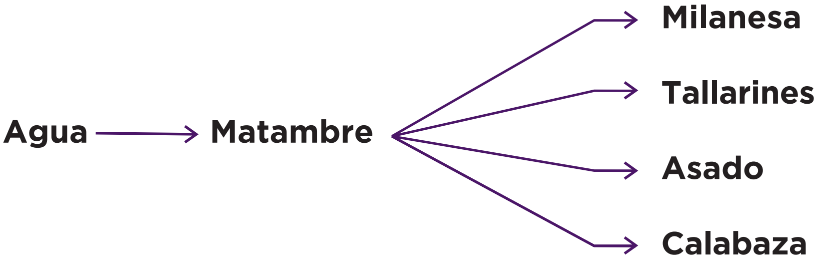
f) ¿Cuántos almuerzos completos diferentes pueden armarse?

Orientaciones

Por cada bebida podemos elegir 3 entradas. Como las opciones de bebidas son 2, podemos armar $2 \cdot 3 = 6$ elecciones diferentes de bebida y entrada. Son las que describe el siguiente diagrama de árbol:



Una vez hecha esta elección, podemos optar entre 4 platos principales. Es decir, para cada una de las 6 elecciones anteriores, hay 4 opciones de plato principal. Por ejemplo, si consideramos la opción agua – matambre: una vez hecha esta elección, podemos optar entre 4 platos principales. Es decir, para cada una de las 6 elecciones anteriores, hay 4 opciones de plato principal. Por ejemplo, si consideramos la opción agua – matambre:



Y de la misma forma con cada una de las otras 5 elecciones restantes de bebida y entrada.

En total podemos armar 6 · 4 = 24 almuerzos optando entre una bebida, una entrada y un plato principal. Si por cada uno de ellos agregamos las 3 opciones de postres, totalizamos 24 · 3 = 72 almuerzos completos diferentes.

La cuenta completa que nos permite calcular la cantidad total de almuerzos completos diferentes es: 2 · 3 · 4 · 3 = 72

4.1 Principio multiplicativo del conteo

En la situación anterior tenemos 2 opciones para la bebida. Ya elegida la bebida tenemos 3 opciones para la entrada. Ya elegidas la bebida y la entrada tenemos cuatro opciones para el plato principal y finalmente ya elegidos la bebida, la entrada y el plato principal tenemos 3 opciones para el postre. La cantidad total de resultados que simbolizamos con la letra T es:

$$T = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 72$$

En general, si n_1 es la cantidad de resultados posibles del primer paso de un «experimento» y por cada uno de estos resultados, n_2 es la cantidad de resultados del segundo paso etc. Y n_k es la cantidad de resultados del último paso, el número total de resultados posibles T es igual al producto de los resultados de cada paso:

$$T = n_1 . n_2 \ldots \ \ldots n_k$$

A este procedimiento lo llamamos principio multiplicativo del conteo.

Actividad 7

¿Cuántos números de tres cifras e impares hay?

Orientaciones

Para el primer dígito del número de tres cifras tenemos nueve opciones (1, 2, 3,..., 9), para el segundo dígito, 10 opciones (0, 1, 2, 3, ..., 9) y para el tercer dígito, cinco opciones, porque el número es impar (1, 2, 3, 4, 5). Entonces, aplicando el principio multiplicativo, la cantidad de números de tres cifras e impares es 450, el resultado de multiplicar 9 por 10 por 5.

Actividad 8

Una partido político debe definir el orden en el que sus 6 candidatos A, B, C, D, E y F aparecerán en la lista de legisladores. ¿De cuántas maneras distintas pueden ordenarse los seis candidatos en la lista?

Orientaciones

Para contar todos los posibles ordenamientos de los 6 candidatos en la lista podemos utilizar el principio multiplicativo. En este caso se trata de un experimento de 6 pasos, en el que cada paso es uno de los puestos de la lista. En cada paso hay un resultado posible menos que en el anterior ya que el candidato que ocupe el primer lugar no podrá ocupar el segundo y así sucesivamente. La cantidad total de ordenamientos posibles de los 6 candidatos en la lista es $T = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

5. Factorial de un número. Permutaciones

Al producto $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ lo escribimos en forma abreviada como 6!, que leemos «factorial de 6».

En general, si el número de objetos que van a ser ordenados es n (siendo n un número natural) calculamos la cantidad de ordenamientos posibles de esos n objetos con la fórmula:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \cdot \cdot 1$$

Leemos la expresión $n!$ diciendo «factorial de n».

A cada ordenamiento diferente de una cantidad de objetos lo llamaremos permutación. La fórmula anterior, entonces, nos permite obtener el número total de permutaciones (formas de ordenar todos los elementos) de n objetos.

Actividad 9

Frida ha decidido esta noche ir al cine o ir a escuchar música cerca de su casa. Hay dos cines en su barrio, en uno de ellos proyectan *El séptimo sello* y en el otro *Pánico en el parque*, y habrá tres recitales en bares cercanos, de jazz, de tango y de folclore, respectivamente. ¿De cuántas maneras distintas puede tomar su decisión Frida teniendo en cuenta que todos los espectáculos comienzan a la misma hora?

Orientaciones

Frida dispone de dos posibilidades si elige ir al cine y de tres si elige escuchar música, teniendo en cuenta que todos los espectáculos comienzan a la misma hora, entonces son cinco las posibles decisiones que puede tomar.

5.1 Principio aditivo del conteo

En la situación anterior el total de las posibles decisiones resulta de sumar 3 + 2. En general, si un «experimento» puede realizarse de k maneras distintas y $n_1; n_2; \ldots; n_k$ son los resultados posibles de cada una de ellas, entonces el número total de resultados posibles T del experimento es igual a la suma de los resultados de cada una de las k opciones:

$$T = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k$$

A este procedimiento lo llamamos principio aditivo del conteo.

Actividad 10

1. Una banda de música debe establecer un orden para los 9 temas que integrarán su próximo disco. ¿De cuántas maneras lo puede hacer?

a) 9

b) 45

c) 362.880

d) 387.420.489

2. Paula y tres amigas se quieren tomar una foto sentadas una al lado de la otra en un banco del patio de la escuela. ¿De cuántas maneras pueden posar para la foto?

3. Se debe elegir entre un grupo de 30 alumnos de un curso a tres de ellos para desempeñarse como abanderado, primer escolta y segundo escolta en el próximo acto escolar. ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer dicha elección?

4. Siete excursionistas deben atravesar, uno detrás del otro, un puente angosto. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo si uno de ellos, Juan, debe ir primero?

5. ¿Cuántos números de tres cifras podemos formar con los dígitos 4, 5, 6 y 7?

6. ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas podemos formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6?

7. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos 5 y 7?

8. Un mensaje telegráfico consiste en una sucesión de puntos y rayas. Ejemplo: - . . - - ¿Cuántos mensajes con cinco símbolos pueden enviarse?

a) 5

b) 10

c) 120

d) 32

9. Juan debe viajar mañana a un sitio de nuestro bello país. Puede hacerlo en su auto, en avión o en micro. Existen dos líneas aéreas y cinco empresas de transporte público terrestre que llegan a su destino. ¿De cuántas maneras distintas puede Juan hacer el viaje?

10. Un cliente acude al restaurante mencionado en la actividad 6 de este capítulo y decide que la ensalada y la calabaza rellena no sean parte del mismo menú. Esto es, si pide ensalada no pide calabaza rellena. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir el menú?

Actividades de autoevaluación

1. Solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera. Indique cuál:

a) Si a un número natural cualquiera le sumo 4, el resultado es un número natural.

b) Si a un número natural cualquiera lo divido por 4, el resultado es un número natural.

c) Si a un número natural cualquiera lo resto por 4, el resultado es un número natural.

d) Si a un número natural cualquiera lo multiplico por 0, el resultado es un número natural.

2. Una de las siguientes opciones es el resultado del siguiente cálculo:

$$10 - 4 : 2 + 100 : 10 : 2$$

Indique cuál es:

a) 8

b) 23

c) 13

d) 28

3. 143 es múltiplo de solo uno de los siguientes números. Indique cuál es:

a) 14

b) 3

c) 11

d) 41

4. Siete amigas se reúnen para compartir un asado. Una de ellas debe prender el fuego, otra debe preparar la mesa y otra lavar los platos. ¿De cuántas maneras distintas se pueden distribuir dichas tareas si ninguna de las amigas debe realizar más de una?

a) 5.040

b) 210

c) 6

d) 343

5. Siete excursionistas deben atravesar, uno detrás del otro, un puente angosto. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo si uno de ellos, Juan, debe ir primero?

a) 5.040

b) 7

c) 6

d) 720

UNIDAD 2: Números enteros

Actividad 1

El siguiente cuadro muestra las temperaturas máximas y mínimas registradas un día de julio en algunas ciudades de la República Argentina:

Ciudad	Temperatura mínima (en º C)	Temperatura máxima (en º C)
Bariloche	-3	5
Buenos Aires	1	11
C. Rivadavia	-4	2
Córdoba	0	15
Formosa	3	16
Mar del Plata	-2	9
Resistencia	2	16
Río Gallegos	-8	1
Trelew	-6	4
Ushuaia	– 10	0

Responda las siguientes preguntas a partir de los datos del cuadro:

a) ¿Cuál es la ciudad de la tabla que registra la temperatura mínima más baja?

b) La temperatura mínima de Bariloche, ¿es mayor o menor que la de Comodoro Rivadavia?

c) ¿Cuántos grados subió ese día la temperatura en la ciudad de Buenos Aires?

d) ¿Cuántos grados subió ese día la temperatura en la ciudad de Ushuaia? ¿Y en la ciudad de Trelew?

e) En otra ciudad del sur argentino se registró una temperatura mínima de – 8°C. Si se sabe que la temperatura ascendió 6 °C a lo largo del día, ¿cuál fue la temperatura máxima registrada en ese día?

1. Números enteros

No siempre que restamos dos números naturales obtenemos como resultado un número natural.

5 – 3 = 2, ya que 2 + 3 = 5, pero 3 – 5 no es igual a ningún número natural dado que no existe ninguno de ellos que sumado a 5 sea igual a 3.

Podemos asociar las operaciones planteadas en el párrafo anterior a las siguientes situaciones: para la primera, estoy en el quinto piso de un edificio y desciendo tres para llegar al segundo piso y para la segunda, estoy en el tercer piso y desciendo cinco para llegar al segundo subsuelo, que nombraremos piso -2 (el opuesto de dos o menos dos).

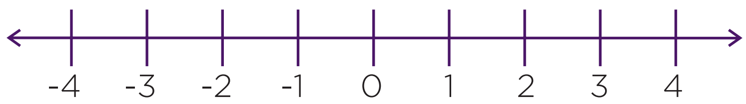
Si del tercer piso desciendo tres pisos, accedo a la planta baja, que nombraremos piso 0 y la operación asociada es 3 – 3 = 0.

Por lo tanto, vamos a considerar un nuevo conjunto de números, el de los enteros, que es el conjunto formado por los números naturales, los opuestos de estos y el 0. El conjunto de los números enteros se simboliza con la letra Z.

Z = {1; 2; 3; 4; 5; ...}

2. Representación en la recta numérica

Representaremos los números enteros en una recta. En algún punto de la recta indicamos el 0 y en algún punto de la recta situado a la derecha del 0 indicamos el 1. Al número 2 lo ubicaremos a la derecha del 1 de tal manera que la distancia entre el 1 y el 2 sea la misma que la distancia entre el 0 y el 1. Al número 3 lo ubicaremos a la derecha del 2 de tal manera que la distancia entre el 2 y el 3 sea la misma que la distancia entre el 0 y el 1. La distancia entre 0 y 1 se toma como unidad, entonces la distancia entre 0 y 1 es igual a 1. De manera análoga procedemos con los siguientes números naturales. A los opuestos de los números naturales los ubicamos a la izquierda del 0, de tal manera que la distancia entre 0 y -1 sea igual a la distancia entre 0 y 1, la distancia entre 0 y -2 sea igual a la distancia entre 0 y 2 y de manera análoga con los otros.



La **distancia** entre dos números enteros es la cantidad de unidades que hay entre ellos.

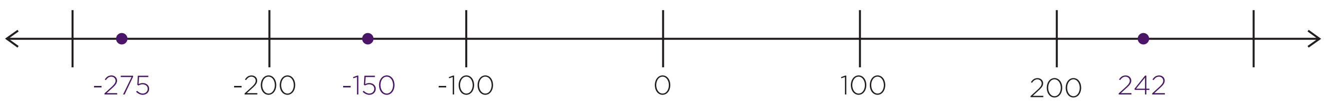
La distancia entre 2 y 7 es 5, la distancia entre -4 y 8 es 12, la distancia entre 7 y 7 es 0. Diremos que dos números son **opuestos** si están a la misma distancia del 0. Todo número entero tiene un único opuesto . Al opuesto del número entero z lo escribiremos –z.

7 y -7 son opuestos porque están a la misma distancia del 0. Diremos que -7 es el opuesto de 7 y que - (-7) = 7 es el opuesto de -7.

Llamaremos **módulo** o **valor absoluto** de un número entero z a la distancia de z a 0 y lo escribiremos | z | .

Ejemplos: | 5 | = 5 y |- 3| = 3

Actividad 2



Responda a las siguientes preguntas referidas a la recta numérica y teniendo en cuenta que la distancia entre dos puntos es un número mayor o igual a 0:

a) ¿Cuál es la distancia entre 0 y 100?
b) ¿Cuál es la distancia entre -150 y 0?
c) ¿Cuál es la distancia entre -150 y 100?
d) ¿Cuál es la distancia entre -275 y 242?
e) ¿Cuál es la distancia entre -275 y -200?
f) ¿Cuál es la distancia entre 200 y 200?

Actividad 3

Alejandro Magno conquistó el mundo griego hacia fines del siglo IV antes de Cristo. Fundó la ciudad de Alejandría en el año –331. Falleció a los 33 años, 8 años después de la fundación.

Responda a partir de la información anterior:

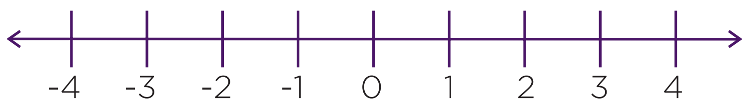
a) ¿En qué año falleció Alejandro?

b) ¿Cuál fue su año de nacimiento?

Orientaciones

En la actividad 1 le preguntamos cuál de las ciudades registró la temperatura mínima más baja. La respuesta es Ushuaia ya que – 10 es la temperatura más baja de todas las registradas en la tabla.

Observe la recta numérica:



Vamos a decir que un número *a* es menor que un número *b* si la representación del número *a* en la recta está a la izquierda de la representación del número *b* en la recta. Por lo tanto la temperatura mínima en el día de referencia fue menor en Comodoro Rivadavia que en Bariloche. Simbólicamente escribimos:

– 4 < – 3 y se lee «– 4 es menor que – 3» o **– 3 > – 4** y se lee «–3 es mayor que – 4»

Diremos que un número es **positivo** si es mayor que 0 y diremos que un número es **negativo** si es menor que 0.

Para la actividad 2 tenga en cuenta que la distancia entre 0 y 100 es 100, la distancia entre -150 y 0 es 150, entonces la distancia entre -150 y 100 es 250.

En la situación presentada en la actividad 3, el cero indica el año 0, que en el mundo occidental se fija como el año del nacimiento de Cristo y los números negativos representan fechas anteriores al nacimiento de Cristo, de tal manera que Alejandro Magno vivió entre los años -356 y -323.

Actividad 4

1. Escriba dos ejemplos, diferentes a los mencionados anteriormente, en los que intervengan números negativos.

2. ¿Existe un número entero menor al resto de los números enteros? ¿Existe algún número entero mayor al resto de los números enteros?

3. Indique cuál es el número entero que expresa cada una de las siguientes situaciones, indicando en cada caso cuál es la situación que utiliza para definir el 0:

a) La cima de una montaña está a 3.500 metros del nivel del mar.

b) Se encontraron restos de animales que murieron 150 años antes de Cristo.

c) Un submarino está navegando a 123 metros bajo el nivel del mar.

d) Un buceador explora a 20 metros bajo el nivel del mar.

e) Platón murió en el año 347 antes de Cristo.

f) El ascensor llegó a la terraza situada en el piso 25 de una torre.

g) La cochera se encuentra en el segundo subsuelo.

4. Un buzo exploró incrustaciones coralinas a 50 m bajo el nivel del mar. Luego descendió 30 m más y recogió algas. Finalmente bajó 10 m más y descansó.

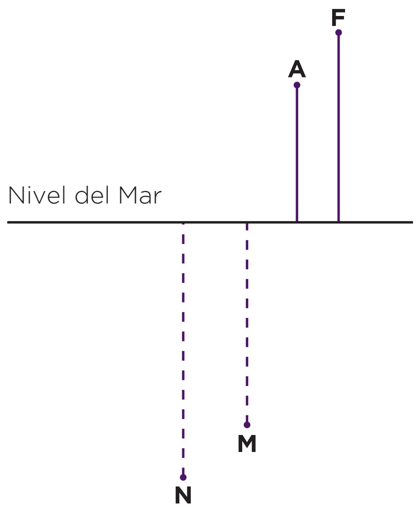
¿Cuántos metros hay entre las incrustaciones coralinas y el lugar de descanso? Indique el número entero que representa el lugar de descanso.

5. En el dibujo que sigue se han representado posiciones de algunos objetos que están sobre el nivel del mar y otros que están debajo de ese nivel.

F representa el extremo más alto de un faro que mide 12 m, **A** representa el extremo de una antena de una radio de 8 m, **M** y **N** las posiciones de dos submarinos que se encuentran a una profundidad de 10 y 12 m.

a) Escriba las posiciones de cada uno de los puntos utilizando números enteros.

b) Represente en la recta numérica los puntos F, A, M



6. Represente en una recta los números enteros pertenecientes al conjunto:

A = {– 5 ; – 3 ; – 2 ; 0 ; 1 ; 4 ; 5}

7. Determine, en cada una de las siguientes rectas numéricas, la ubicación del número 0 y del número 1. Describa el procedimiento que utilizó para ubicarlos:

8. Complete la línea de puntos con mayor (>) o menor (<) según corresponda:

4	______	**7**	**- 4**	______	**0**
- 4	______	**- 7**	**7**	______	**4**
0	______	**- 7**	**-7**	______	**4**

9. Ordene de menor a mayor los siguientes números enteros:

– 6 ; – 17 ; 12 ; 7 ; – 19 ; 0 ; 4 ; 106 ; 14

10. Un ascensor descendió del piso siete hasta el segundo subsuelo.
¿Cuántos pisos descendió?

11. Escriba todos los números enteros cuya distancia a 7 es igual a 13.

12. Escriba todos los números enteros cuya distancia a 3 es menor que 7.

13. Escriba todos los números enteros cuyo módulo es igual a 14.

14. Indique 4 números (dos negativos y dos positivos) cuya distancia a 9 es mayor que 15.

15. ¿Entre qué números se encuentra un número entero n cuyo opuesto está entre -2 y5?

16. Ubique sobre la recta numérica: 0 ; 1; un número entero $a > 3$; $a+1$; $-a$; $2a$; $-a-3$.

17. Decida si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Dos números opuestos tienen el mismo módulo.

b) El módulo de -3 es -3.

c) Si a es un número entero negativo entonces $-a$ es un número entero positivo.

d) Si $a < b$, entonces $-a < -b$.

3. Operaciones con números enteros

3.1. Suma

El resultado de la suma de dos números enteros con el mismo signo es un número entero con el mismo signo que los anteriores y cuyo módulo se obtiene sumando los módulos de los números indicados.

Ejemplos:

$7 + 3 = 10$ $\quad$ $-7 + (-4) = -11$

$(-3) + (-10) = -13$ $\quad$ $0 + 0 = 0$

El resultado de la suma o adición de dos números con distinto signo es un número cuyo signo es el mismo que el de mayor módulo y cuyo módulo se obtiene restando el mayor de los módulos menos el menor de los módulos.

Ejemplos:

$4 + (-15) = -11$ $\quad$ $-4 + 1 = -3$

$8 + (-2) = 6$

3.2. Resta

Definimos la resta o diferencia entre dos números enteros como la suma del primer número más el opuesto del segundo. Esto es:

Si a y b son números enteros, $a - b = a + (-b)$

Ejemplos:

$8 - 5 = 8 + (-5) = 3$

$7 - 10 = 7 + (-10) = -3$

$8 - (-3) = 8 + (-(-3))= 8 + 3 = 11$

$-7 - 5 = -7 + (-5) = -12$

3.3. Multiplicación

a) El resultado de multiplicar cualquier número entero por 0 es igual a 0.

Ejemplos:

6 · 0 = 0

-17 · 0 = 0

b) El resultado de multiplicar dos números enteros de distinto signo es un número entero negativo.

Veamos:

3 · (-1) es 3 veces el -1, entonces 3 · (-1) = -1 + (-1) + (-1) = -2 + (-1) = -3 y en general para cualquier número entero z vale que z · (-1) = -1 · z = -z

5. (-3) = 5 · ((-1) · 3) = (5 · (-1)) · 3 = (-1 · 5) · 3 = -1 · (5 · 3) = -1 · 15 = 13) = -1 · 15 = 15

(Utilizamos en esta sucesión de igualdades, la igualdad del párrafo anterior y las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación de números enteros).

Ejemplos:

8 · (-4) = -32

-5 · 7 = -35

c) El resultado de multiplicar dos números enteros del mismo signo es un número entero positivo.

Veamos:

-5 · (-4) = (-1 · 5) . (-1 · 4) y asociando convenientemente esto es igual a

(-1 · (-1)) · (5 · 4) = 1 · 20 = 20

Ejemplos:

-10 · (-34) = 340

-4 · (-11) = 44

Podemos recordar lo visto precedentemente, mediante el uso de la llamada «regla de los signos»:

+ por + = + **- por - = +** **+ por - = -** **- por + = -**

3.4. División

Dados dos números enteros *a* y *b*, diremos que *a* : *b* = *c* si existe un número entero *c* tal que *a* = *b* . *c*

El resultado de la división entre dos números enteros no es siempre un número entero.

Ejemplos:

10 : (-5) = -2

-80 : (-4) = 20

15 : (-2) no es un número entero.

3.5. Potenciación

Si a es un número entero y n un número natural, definimos la potencia n a de la siguiente manera:

$a^n = a \cdot a........ a$ (el factor a aparece n veces en la multiplicación)

Diremos que a es la base y n el exponente.

Ejemplos:

$3^4 = 81$

$(-5)^2 = 25$

$-5^{2} = -25$

$(-2)^5 = -32$

$(-2)^6 = 64$

$(-1)^{1000} = 1$

$(-1)^{999} = -1$

3.6. Radicación

La radicación es la operación inversa de la potenciación.

Si n es un número natural par, $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $b^n = a$, entonces $\sqrt[n]{a}=b$. Al número n lo llamaremos índice de la raíz.

Ejemplos:

$\sqrt[2]{16} = 4$, ya que 4 es mayor o igual que 0 y $4^2 = 16$.

$\sqrt[4]{81} = 3$, ya que 3 es mayor o igual que 0 y $3^4 = 81$.

$\sqrt[2]{-16}$ no existe, ya que ninguna potencia con exponente 2 es igual a -16.

Si n es un número natural impar y $b^n = a$, entonces $\sqrt[n]{a}=b$.

Ejemplos:

$\sqrt[3]{8} = 2$, ya que $2^3 = 8$.

$\sqrt[3]{-8} = -2$, ya que $(-2)^3 = -8$.

4. Convenciones para realizar cálculos combinados

El resultado de la suma de dos números enteros con el mismo signo es un número entero con el mismo signo que los anteriores y cuyo módulo se obtiene sumando los módulos de los números indicados.

Como ya vimos en la unidad 1, los cálculos entre números combinando operaciones se realizan en orden establecido por el hombre. En un cálculo en el que intervengan potencias o raíces, multiplicaciones o divisiones y sumas o restas debe resolverse:

- En primer lugar las potencias y raíces.
- A continuación las multiplicaciones y divisiones.
- Por último las sumas y restas de izquierda a derecha.

Si en el cálculo intervienen paréntesis, estos nos indican el orden que debemos seguir para resolver el cálculo combinado. Resolvemos en primer lugar las cuentas dentro del paréntesis. Al resolver las operaciones planteadas dentro de cada uno de ellos debemos tener en cuenta el orden de resolución establecido por la convención anterior. Una vez resueltas las cuentas dentro del paréntesis, continuamos con la resolución del cálculo.

Videos relacionados	Suma de números enteros. - Aritmética - Educatina *https://youtu.be/1B7rNTrapPw*	Resta de números negativos. - Aritmética - Educatina *https://youtu.be/NiiIKXNiGLg*
	Regla de los signos. - Aritmética - Educatina *https://youtu.be/03fLWuyR1HE*	Potencia de números enteros. - Aritmética - Educatina *https://youtu.be/Cm2cCeV94kE*

Actividad 5

1. Complete la tabla:

a	-a	a-2	a+3	-a-2	-a+1
	7				
					-9

2. Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $18 + (-3) + 3 = 18$

b) $24 : (-4 + 8) = 24 : (-4) + 24 : 8$

c) $3 - 8 = 8 - 3$

d) $-3 \cdot (5 + (-2)) = -3 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2)$

e) $5 - (-7) = 5 + 7$

f) $-5 + (-2) +8 = -5 + 6$

3. Resuelva:

a) $-3 - (5 + 2 \cdot (-3)) =$

b) $48 : (-2 + 6) - 5 \cdot (-4) =$

c) $17 - (5 - 8) - 3 \cdot (5 - 8) + 3 : (5 - 8) =$

d) $(-8 - 2) \cdot (-2) + (-1)2 =$

e) $(10 - 7 \cdot 2)3 - (-3) =$

f) $\sqrt{25} + \sqrt[3]{-8} +2 \cdot 3^2 =$

Actividades de autoevaluación

1. Solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera. Indique cuál:

a) $-4 > -2$

b) $5 < -10$

c) $-12 < -3$

d) $0 < -2$

2. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «Entre dos números enteros cualesquiera, existen infinitos números enteros».

3. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «Si un número entero es menor que -8, su opuesto es mayor que 8».

4. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «La distancia entre -22 y 103 es igual a 125».

5. Solo una de las siguientes igualdades es verdadera. Indique cuál:

a) $- 7 \cdot (- 2) + \sqrt{9} = -11$

b) $(- 1)^{33} + 5 \cdot (-3) = -16$

c) $(-7 -11) \cdot (-2) = -36$

d) $-3^{2} + 6 : 2 = 12$

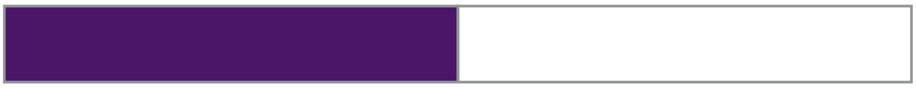
UNIDAD 3: Números racionales

Actividad 1

En una inmobiliaria venden una extensión grande de terreno. Para ello lo han dividido en «lotes» como fue dibujado a continuación:

Como cada lote es muy grande, la inmobiliaria los ha fraccionado en partes iguales. Confeccionó los planos y se redactaron las correspondientes escrituras de ventas. Por eso, cada fracción de «lote» no puede ser subdividida. A continuación le mostramos los planos de las «fracciones de lote» que vende la inmobiliaria:

Medios de un «lote»

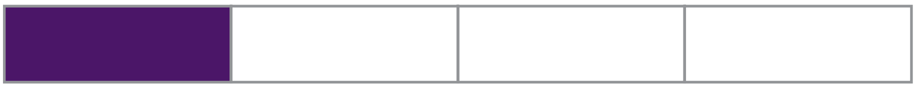


La parte sombreada es un medio lote.

Tercios de un «lote»

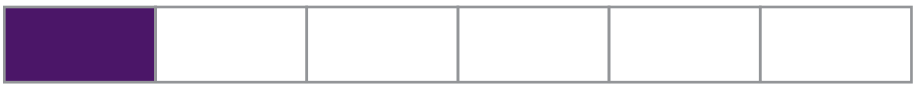
La parte sombreada es un tercio de lote.

Cuartos de un «lote»



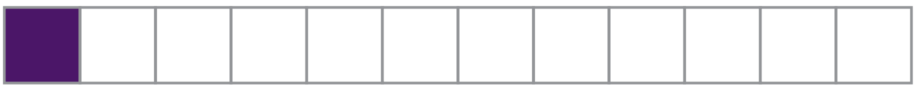
La parte sombreada es un cuarto de lote.

Sextos de un «lote»



La parte sombreada es un sexto de lote.

Doceavos de un «lote»



La parte sombreada es un doceavo de lote.

Mire los planos y responda:

a) ¿Cuántos «medios lotes» forman un lote?

b) Si se quiere formar un lote con «tercios de lote», ¿cuántos de ellos hacen falta?

c) ¿Cuántos «cuartos de lote» entran en un lote?

d) Para obtener «sextos de lote», ¿en cuántas partes iguales hay que dividir al lote?

e) ¿Cuántos «doceavos de lote» hay en un lote?

Orientaciones

En todos los casos es indispensable precisar a qué unidad está referida cada una de esas partes. En este caso se usó como unidad el «lote», que está representado a escala en el plano.

La inmobiliaria fraccionó al «lote» de la siguiente manera:

• En algunos casos lo dividió en dos partes iguales. A cada parte la llamó «un medio lote». Esto puede escribirse así: 1/2 de lote o también $\frac{1}{2}$ de lote.

• En otros, dividió al lote en tres partes iguales, y a cada parte la llamó «tercio de un lote». Esto puede escribirse así: 1/3 de lote o $\frac{1}{3}$ de lote.

• En forma similar determinó los «cuartos de lote» (1/4 de lote o $\frac{1}{4}$ de lote) dividiendo el lote en cuatro partes iguales.

• los «sextos de lote» (1/6 de lote o $\frac{1}{6}$ de lote)

• Dividiendo al lote en seis partes iguales; y los «doceavos de lote» (1/12 de lote o $\frac{1}{12}$) dividiendo al lote en 12 partes iguales.

Actividad 2

A partir de los planos y de la información anterior responda las siguientes preguntas:

1. En una oportunidad, un cliente quiere comprar «medio lote» y la inmobiliaria no dispone de uno de ellos. El empleado de la inmobiliaria le sugiere que compre otras fracciones de lote que cubran la misma superficie que medio lote, es decir, fracciones de lote que ocupen una superficie de igual tamaño que el medio lote pedido.

a) ¿Qué fracciones de lote podría ofrecer el empleado a su cliente en reemplazo del medio lote pedido?

b) Si le ofreciera «cuartos de lote», ¿cuántos «cuartos de lote» debería comprar? Como cada lote es muy grande, la inmobiliaria los ha fraccionado en partes iguales. Confeccionó los planos y se redactaron las correspondientes escrituras de ventas. Por eso, cada fracción de lote no puede ser subdividida.

c) ¿Y si le ofreciera «sextos de lote» o «doceavos de lote»?

d) El empleado, ¿puede ofrecer a su cliente «tercios de lote»? ¿Por qué?

2. Otro cliente quiere «un tercio de lote», pero estos se acabaron.

a) ¿Con qué fracciones de lote podría cubrir exactamente la superficie de un tercio de lote?

b) Si para reemplazar el «tercio de lote» le ofrece «sextos de lote», ¿cuántos necesitaría? ¿Y si usara «doceavos de lote»?

El empleado de la inmobiliaria se inquietó un poco al ver que a medida que los lotes se iban vendiendo se complicaba un poco su tarea. Debía cambiar los pedidos de los clientes por otros equivalentes. Se dijo: «Tengo que organizarme para hacer más eficiente la atención al público».

Se le ocurrieron dos ideas:

• En primer lugar, calcó y recortó los planos de lotes y fracciones de lotes que vende la inmobiliaria.

• En segundo lugar, confeccionó el cuadro que figura a continuación. Para llenarlo, pensó así, por ejemplo: «Como un tercio de lote (1/3 de lote) equivale a 2 terrenos de sextos de un lote, completo la tabla poniendo un 2 en la columna de los sextos».

	Medios de lote	Tercios de lote	Cuartos de lote	Sextos de lote	Doceavos de lote
Un lote equivale a:					
Un medio de un lote equivale a:					
Un tercio de un lote equivale a:				**2**	**4**
Un cuarto de un lote equivale a:					
Un sexto de un lote equivale a:					

Responda las siguientes consignas a partir de la información anterior:

a) ¿Cuál cree que fue la intención del encargado al calcar y recortar los planos de los lotes y fracciones de lote?

b) ¿Cómo usaría los planos para afirmar que «dos sextos de lote» es equivalente a «un tercio de lote»?

c) Complete la tabla que empezó a completar el empleado. ¿Por qué cree que hay casillas sombreadas?

Orientaciones

En el cuadro anterior puede leerse, por ejemplo, que «un tercio de lote equivale a cuatro doceavos de lote». Esto se puede escribir así:

$\frac{1}{3}$ de lote es igual a 4 veces $\frac{1}{12}$ de lote.

o $\frac{1}{3}$ de lote es igual a $4 \cdot \frac{1}{12}$ de lote.

o $\frac{1}{3}$ de lote es igual a $\frac{4}{12}$ de lote.

Otro ejemplo que puede leerse de la tabla es que: «un lote equivale a 6 sextos de lote». Esto se puede escribir así:

1 lote es igual a 6 veces $\frac{1}{6}$ de lote.

o 1 lote es igual a $6 \cdot \frac{1}{6}$ de lote.

o 1 lote es igual a $\frac{6}{6}$ de lote.

1. Números Fraccionarios

$\frac{1}{3}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{6}$ son ejemplos de números fraccionarios. En general, cualquier número de la forma $\frac{a}{b}$ (con a y b números enteros, $b \neq 0$) es un número fraccionario. El número a se llama **numerador** de la fracción y el número b se llama **denominador**. El denominador le da el nombre a la fracción (la denomina) indicándonos la cantidad de partes en la que ha sido dividida la unidad. El numerador indica el número de partes de la unidad que se están tomando.

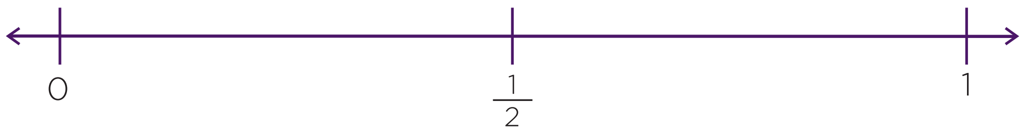
Actividad 3

Podemos simplificar las representaciones de los lotes utilizando segmentos:

- Como el lote es la unidad y el segmento simboliza a un lote entonces la longitud completa del segmento es la unidad. Por esta razón, consideraremos al segmento de longitud 1.
- La mitad del segmento representa a 1/2 de lote.
- Pero la mitad del segmento es un medio de la unidad, o sea 1/2 de unidad o 1/2 de 1, o simplemente $\frac{1}{2}$.

La representación es así:

Responda las siguientes consignas a partir de la información anterior:



a) Usando el mismo criterio, represente las siguientes fracciones sobre el segmento unidad:

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$

b) Sobre el mismo segmento represente las fracciones:

¿Qué puede observar sobre sus ubicaciones en el $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{12}$ segmento?

c) Represente, también, sobre el mismo segmento, las fracciones:

¿Qué observa en cuanto a sus ubicaciones? $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{6}{12}$

d) ¿Qué ubicación sobre el segmento tienen las fracciones

¿Por qué? Interprete esta ubicación en términos de $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{6}{6}$ $\frac{12}{12}$ l ? a situación de los lotes.

Orientaciones

Cuando el empleado de la inmobiliaria calcó y recortó los planos de los lotes, pudo comprobar que «un medio lote» es equivalente a «dos cuartos de lote» y también es equivalente a «tres sextos de lote» y a «seis doceavos de lote».

También pudimos observar al representar en el segmento a las fracciones $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{6}{12}$ que todas ellas se ubican en el mismo lugar. Como todas estas fracciones están referidas a la misma unidad, si las comparamos resultan ser **equivalentes**.

e) Teniendo en cuenta las representaciones que realizó sobre el segmento, dé otros ejemplos de fracciones equivalentes.

f) Teniendo en cuenta las fracciones equivalentes encontradas, intente armar un recurso que le permita determinar una fracción equivalente a otra dada.

Orientaciones

De acuerdo con las representaciones realizadas sobre el segmento, también podemos observar que las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{12}$ son equivalentes dado que tienen la misma ubicación sobre el segmento y por lo tanto representan al mismo número.

¿Cómo podemos pasar de una a otra? Por ejemplo, cómo encontrar $\frac{2}{6}$ a partir de $\frac{1}{3}$ y viceversa? Observe que si multiplicamos por 2 al numerador y al denominador de la fracción $\frac{1}{3}$, obtenemos la fracción $\frac{2}{6}$. Y que si dividimos por 2 al numerador y denominador de la fracción $\frac{2}{6}$, obtenemos la fracción $\frac{1}{3}$.

2. Fracciones equivalentes. El número racional

De acuerdo con lo observado, decimos que el número fraccionario $\frac{1}{3}$ es **equivalente** al número fraccionario $\frac{2}{6}$. Escribimos: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

En general decimos que dos fracciones referidas a la misma unidad, **son equivalentes** si se ubican en el mismo punto sobre la recta numérica, y en tal caso diremos que representan al mismo **número racional**.

Diremos que dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si $a \cdot d = b \cdot c$

Por ejemplo:

$\frac{3}{2} \equiv \frac{9}{6}$ al número fraccionario ya que $3 \cdot 6 = 2 \cdot 9$

$\frac{9}{36} \equiv \frac{5}{20}$ al número fraccionario ya que $9 \cdot 20 = 5 \cdot 36$

Una de las formas de hallar fracciones equivalentes consiste en multiplicar al numerador y al denominador de la fracción por un mismo número entero distinto de cero o en dividir al numerador y al denominador por cualquier número entero que divida a ambos.

En los casos en que encontramos una fracción equivalente a otra dividiendo al numerador y al denominador por un número entero distinto de cero, decimos que estamos **simplificando.**

Si en la fracción el numerador y el denominador no admiten divisores comunes distintos de 1, decimos que la fracción es **irreducible.**

Videos relacionados	¿Qué es un número racional? - Aritmética - Educatina *https://youtu.be/NLJ9zlO4M4E*	¿Qué son las Fracciones? - Aritmética - Educatina https://youtu.be/aSxNeQrCYaU
Fracciones equivalentes. - Aritmética - Educatina *https://youtu.be/GYG8eAOHt3Q*	Fracciones en la recta numérica *https://youtu.be/YnAyCUWfAVg*	Ejercicio de fracciones equivalentes. -Aritmética -Educatina *https://youtu.be/_9jlbYyg6m0*

Actividad 4

1. Encuentre dos fracciones equivalentes a cada una de las fracciones indicadas a continuación, una de ellas irreducible: $\frac{4}{16}$; $\frac{128}{64}$; $\frac{7}{21}$.

2. Indique para qué valor de *a* y de *b* las siguientes afirmaciones son verdaderas:

$\frac{5}{2} = \frac{a}{8}$; $\frac{4}{3} = \frac{8}{b}$

3. Juan, Matías y Gabriel compraron tres chocolates iguales. Juan lo dividió en dos partes iguales y se comió una sola, Matías lo dividió en cuatro partes iguales y se comió dos de esas partes y Gabriel lo dividió en ocho partes iguales y se comió cuatro de ellas.

a) Exprese la fracción de chocolate que comió cada uno.

b) ¿Quién comió más cantidad de chocolate?

Actividad 5

Le proponemos continuar trabajando con los lotes de la inmobiliaria para seguir pensando algunas cosas más sobre las fracciones. Le pedimos ahora que:

a) Represente los planos de cada una de las siguientes ventas:

- Dos «tercios de lote».
- Tres «cuartos de lote».
- Cinco «tercios de lote».
- Once «sextos de lote».

b) Indique, para cada una de las ventas anteriores, si se vendió más o menos que un lote.

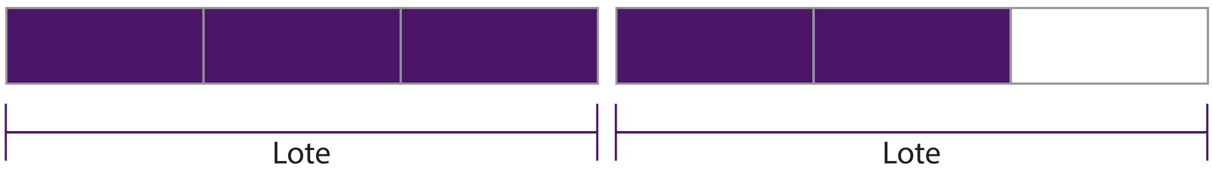
c) Simbolice, ahora, cada una de las ventas en un segmento que represente al lote como unidad y escríbalas como números fraccionarios.

Orientaciones

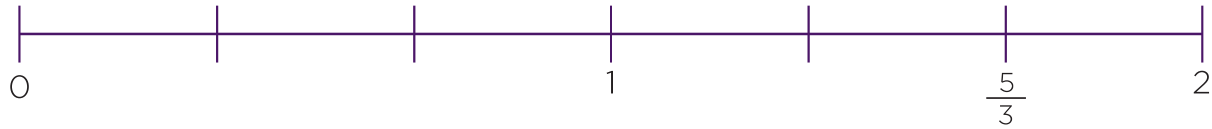
De acuerdo con la representación que hemos hecho de los lotes, la representación de dos «tercios de lote» es:

En la representación anterior, podemos observar que se vendió una fracción de lote menor a un lote. Su representación en el segmento unidad es:

Para realizar la venta correspondiente a cinco «tercios de lote» no nos alcanza con un lote ya que en un lote solo tenemos tres «tercios de lote». Quiere decir que se vendió más que un lote. La representación gráfica de la venta nos queda:



Para su representación necesitamos tener en cuenta dos veces el segmento unidad, y nos queda:



4. Si el lote midiera $300m^2$, ¿qué superficie tendrían los $\frac{1}{3}$?

5. Si el lote midiera $300m^2$, ¿qué superficie tendrían los $\frac{2}{3}$?

6. A continuación se representan los $\frac{2}{3}$ de un lote: 

7. Si le dijeran que la superficie de $\frac{2}{3}$ de lote es de $400m^2$, ¿cuántos metros cuadrados mide el lote completo?

8. a) Si venden $\frac{2}{3}$ de lote y luego $\frac{1}{3}$ de lote, ¿cuántos tercios de lote vendieron en total?
b) Si venden $\frac{1}{12}$ de lote y luego $\frac{7}{12}$ de lote, ¿cuántos tercios de lote vendieron en total?

9. a) Si venden $\frac{3}{4}$ de lote y después $\frac{2}{4}$ de lote, ¿cuántos cuartos de lote se vendieron? ¿Alcanza con un lote?
b) Si venden $\frac{3}{4}$ de lote y después $\frac{1}{2}$ de lote, lo que se vendió en total en esta oportunidad, ¿es equivalente a lo vendido en el caso del ítem 7. a? ¿Por qué?

10. a) Si se venden $\frac{3}{6}$ de lote y después $\frac{2}{6}$ de lote, ¿cuántos sextos de lote se vendieron? ¿Alcanza con un lote?
b) Si se vende $\frac{1}{2}$ de lote y después $\frac{1}{3}$ de lote, ¿se vende lo mismo que en la venta del ítem 8. a? ¿Por qué?
c) Se vende $\frac{1}{2}$ de lote y después $\frac{2}{3}$ de lote, La cantidad total vendida, ¿a cuántos sextos de lote es equivalente?

11. a) Si se vende $\frac{1}{2}$ de lote y después $\frac{2}{3}$ de lote, ¿en qué tipo de fracción de lote conviene expresar el total vendido? ¿Por qué?
b) Se venden $\frac{3}{4}$ de lote y después $\frac{2}{3}$ de lote. Exprese la fracción de lote vendida en total.

Orientaciones

Cuando, por ejemplo, se vende $\frac{1}{3}$ de lote y después $\frac{2}{3}$ de lote y queremos expresar el total de la venta, decimos «se vendieron 3 tercios de lote». Estamos sumando las cantidades vendidas o estamos sumando los «tercios de lote». Este resultado es equivalente a un lote. Lo escribimos así:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Cuando se venden $\frac{3}{4}$ de lote y después $\frac{2}{4}$ de lote, el total de la venta es de $\frac{5}{4}$ de lote. En este caso estamos sumando «cuartos de lote». Lo escribimos así:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}$$

En los casos anteriores sumamos «tercios de lote» con «tercios de lote» o «cuartos de lote» con «cuartos de lote». Y, ¿cómo hacemos para sumar, por ejemplo, «tercios de lote» con «cuartos de lote»? En el ítem **11** se vende $\frac{1}{4}$ de lote y después $\frac{2}{3}$ de lote y le pedimos que exprese el total de la venta. Es decir, le pedimos que resuelva la suma: $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$

La primera venta es en cuartos y la segunda en tercios. Como ya hemos observado, existen fracciones equivalentes a cualquier fracción dada. Entonces podríamos reemplazar cada venta por otra equivalente que fuera más conveniente para realizar la suma. Lo que hay que preguntarse es: ¿pueden expresarse las dos ventas con el mismo tipo de fracciones de lote?

En este caso podemos decir que:

$\frac{1}{4}$ de lote es equivalente a $\frac{3}{12}$ de lote, y que $\frac{2}{3}$ de lote es equivalente a $\frac{8}{12}$ de lote.

Por lo tanto, la venta total es de $\frac{11}{12}$ de lote. Lo escribimos así:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$$

3. Suma y resta de fracciones

Para sumar o restar fracciones es necesario que las fracciones tengan el mismo denominador. Si los denominadores de las fracciones son diferentes, se deben buscar fracciones equivalentes a las dadas de modo que resulten fracciones con el mismo denominador. Luego se suman (o restan) los numeradores manteniéndose el denominador.

Actividad 6

Una empresa constructora decide realizar una compra importante: compra 5 «medios lotes», 7 «tercios de lote» y 15 «sextos de lote».

a) Exprese como fracción la cantidad de «medios lotes», de «tercios de lote» y de «sextos de lote» que compró la empresa constructora.

b) Calcule la fracción de lote comprada en total por la empresa.

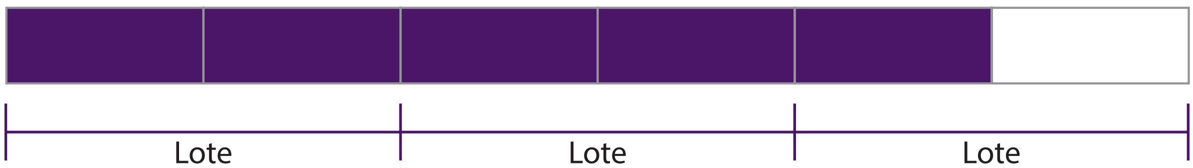
Luego de la compra, la empresa subdivide los lotes comprados en lotes más pequeños para construir mayor cantidad de viviendas. Divide cada «medio lote» en tres lotes iguales y cada «tercio de lote» en dos lotes iguales.

c) Cada una de las partes en las que la empresa constructora divide al «medio lote», ¿qué fracción representa respecto del lote inicial de la inmobiliaria?

d) Exprese la fracción que representa a cada una de las partes en las que la empresa constructora divide al «tercio de lote» en relación con el lote inicial de la inmobiliaria.

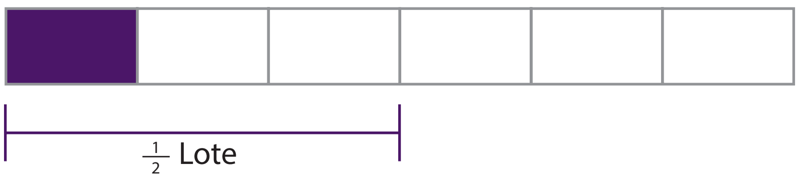
Orientaciones

La empresa constructora compró 5 «medios lotes». Podemos escribir a esta compra como $5 \cdot \frac{1}{2}$, que es igual a $\frac{5}{2}$ de lote. Gráficamente:
Para calcularlo resolvimos la multiplicación entre 5 y $\frac{1}{2}$.



Lo mismo hacemos para expresar la fracción de «tercios de lote» y de «sextos de lote» comprada en total en cada caso: la empresa compró $\frac{7}{3}$ de lote y $\frac{15}{6}$ de lote respectivamente.

Para expresar la fracción que representa a cada una de las partes en las que la empresa constructora divide al «medio lote» debemos dividir al «medio lote» en tres partes iguales. Gráficamente:
Es decir, hacemos: $\frac{1}{2}$: 3, que representa a $\frac{1}{6}$ del lote inicial de la inmobiliaria.



La fracción que representa a cada una de las partes en las que la constructora divide a cada «tercio de lote» es también $\frac{1}{6}$, ya que dividimos cada «tercio de lote» en dos partes iguales.

4. Multiplicación y división de fracciones

En la situación de la empresa constructora, en todos los casos multiplicamos a cada fracción de lote por un número natural, que es una fracción de denominador uno. También podría ser necesario calcular, por ejemplo, las «tres quintas partes» de «medio lote». Para calcularlo resolvemos la multiplicación $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$. Lo hacemos así:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$$

En general, cuando multiplicamos dos fracciones se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí. Así:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Ejemplos:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{3}{11} \cdot \frac{2}{7} \cdot 7 = \frac{42}{77}$$

En el caso en que se dividió a medio lote en 3 lotes iguales, resolvimos la cuenta

$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$, que es el resultado de multiplicar $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

En general, para dividir fracciones, siempre y cuando el divisor sea diferente de 0, se multiplica la primera fracción por la segunda invertida. Así:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejemplos:

$$\frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$$

$$2 : \frac{3}{7} = \frac{14}{3}$$

5. Potenciación con exponente negativo

Si $a \neq 0$ definimos $a^{-n} = \left(\frac{3}{5}\right)^{n}$

Ejemplos:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = \frac{25}{4}$$

Videos relacionados	Multiplicación de fracciones - Aritmética - Educatina https://youtu.be/a3S2_FIMehY	División de fracciones - Aritmética - Educatina https://youtu.be/G2DPA8I-C90

Actividad 7

1. Determine, para cada uno de los siguientes casos, dos fracciones que verifiquen las condiciones dadas:

a) Sean equivalentes.

b) Tengan numerador 5 y sean mayor que 1.

c) Tengan numerador 5 y sean menor que 1.

d) Tengan denominador 5 y sean mayor que 1.

e) Tengan denominador 5 y sean menor que 1.

f) Tengan el mismo denominador y su suma sea equivalente a un entero.

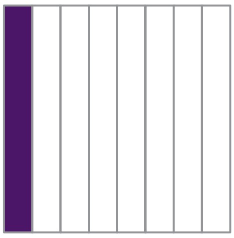
g) Tengan distinto denominador y su suma sea equivalente a un entero.

h) Que su producto sea equivalente a un entero.

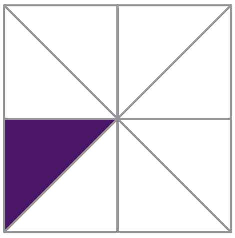
i) Que su división sea equivalente a un entero.

2. Observe los dos cuadrados representados a continuación:

I



II



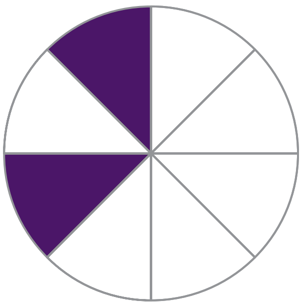
a) Si los dos cuadrados son iguales y usted tiene que pintar la zona sombreada en cada uno de ellos:

La cantidad de pintura que necesita para pintar la zona sombreada en el cuadrado I, ¿es mayor, menor o igual que la que necesita para pintar la zona sombreada en el cuadrado II?

b) Indique la fracción que representa la zona sombreada en cada uno de los cuadrados.

3. Un almacenero cortó un queso en partes iguales tal como se muestra en el siguiente dibujo.

A la mañana vendió las partes sombreadas y durante la tarde $\frac{5}{8}$ del total del queso.



Responda las siguientes preguntas a partir de la información anterior:

a) ¿Qué fracción del total del queso se vendió a la mañana?

b) ¿Qué fracción del queso quedó sin vender al final del día?

c) Si el queso pesa 5 kilogramos, ¿qué cantidad de kilogramos vendió el almacenero durante la tarde?

4. a) Si usted compra 1 kilo y medio de pan, ¿cuántos paquetes de medio kilogramo de pan puede armar?

b) Resuelva la siguiente suma $1 + \frac{1}{2}$

5. a) Si usted pide 2kg y $\frac{3}{4}$ de carne, ¿cuántos cuartos kilogramos de carne le dan?

b) Resuelva la suma: $2 + \frac{3}{4}$

6. a) En una familia comen $1\frac{7}{8}$ de pizza, es decir 1 pizza y $\frac{7}{8}$ de otra. ¿Cuántos octavos de pizza comen?

b) Resuelva la suma: $1 + \frac{7}{8}$

Orientaciones

En el ítem 5 de este ejercicio se compran 3 medios kilogramos de pan ya que en un kilogramo hay dos medios kilogramos y además se compra otro medio kilogramo. Esto es equivalente a calcular $1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. También se puede escribir:

$1\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la expresión $1\frac{1}{2}$ debe interpretarse como $1 + \frac{1}{2}$.

Asimismo, en el ítem 6, el pedido de carne es de $2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$; y en el ítem 7, se consumen $1\frac{7}{8} = 1 + \frac{7}{8} = \frac{15}{8}$ de pizza.

6. Números mixtos

A los números $1\frac{1}{2}$ y $2\frac{3}{4}$ utilizados en la actividad anterior, los llamaremos números mixtos. En general, una expresión del tipo $a\frac{b}{c}$ se obtiene de sumar el número entero a y la fracción $\frac{b}{c}$. En símbolos: $a + \frac{b}{c}$.

Uso de la calculadora científica:

Si usted tiene una calculadora científica, verá que tiene una tecla en la que figura la expresión $a\frac{b}{c}$. Dicha tecla se usa para operar con fracciones.

Indicaremos acá cómo se ingresa una fracción en su calculadora: Por ejemplo, para ingresar la fracción $\frac{7}{6}$ debe teclear 7, después la tecla $a\frac{b}{c}$ y por último, teclear 6. Aparecerá en la pantalla la escritura 7⌋6, que equivale al número $\frac{7}{6}$. El número ya está cargado en su máquina, listo para operar con cualquier otro que usted desee.

Si como resultado de una operación con fracciones aparece en la pantalla una escritura del tipo 7 ⌋ 1 ⌋ 6, esta equivale al número mixto $7\frac{1}{6}$ y para expresarlo como fracción deberá teclear shift acompañado de $a\frac{b}{c}$ y en la pantalla aparecerá 43 ⌋ 6.

7. Resuelva los siguientes ejercicios utilizando fracciones. Tenga en cuenta el orden en el que deben resolverse las operaciones de acuerdo con la convención establecida al operar con los números naturales.

a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} =$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + 3 : \frac{1}{2} =$

c) $1 + (\frac{5}{2} - 1) : \frac{2}{3} =$

d) $\frac{1}{5} \cdot (\frac{7}{3} + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{6} =$

e) $(\frac{2}{3})^2 + 1 =$

f) $\sqrt{\frac{9}{4}} + (\frac{1}{2})^3 =$

8. Josefina canceló con \$750 las dos quintas partes de una deuda. ¿Cuánto dinero debía Josefina?

9. Indique como fracción qué parte representa:

a) 3 facturas de una docena.

b) 5 horas de un día.

c) 35 días de un año.

d) 36 años de un siglo.

10. El salario de María es de \$14.000 y utilizó las dos séptimas partes del mismo para pagar el alquiler de su vivienda. ¿Cuánto paga María por el alquiler de su vivienda?

11. Un Centro de Formación Profesional ofrece a la comunidad un curso gratuito de computación. Por razones de infraestructura y organización decidió dividir la oferta en 3 sedes con cupos limitados.

• El cupo fijado para la Sede 1 fue de 1.200 alumnos. El primer día de inscripción se anotó las $\frac{3}{4}$ partes del cupo de la sede.

• En la Sede 2 se inscribieron 480 personas, que representan los $\frac{3}{5}$ del cupo de la sede.

• En la Sede 3, se inscribieron 1.750 personas, que representan las $\frac{7}{4}$ partes del cupo de la sede.

Responda las siguientes preguntas de acuerdo con la información anterior:

a) ¿Cuántos alumnos se inscribieron en la Sede 1 el primer día?

b) ¿Cuántas personas más se pueden anotar en la Sede 2?

c) ¿Cuál es el cupo de la Sede 2?

d) Sin calcular cuál es el cupo de la Sede 3 indique, basándose en la información dada sobre la inscripción, ¿cómo resulta ser la cantidad de alumnos inscriptos respecto del cupo de la Sede? Piense argumentos que justifiquen su respuesta.

e) ¿Cuál es el cupo de la Sede 3?

12. Se vendieron 9.000 entradas para un recital de Los Auténticos Sonrientes. De las entradas vendidas, la sexta parte fueron plateas, 3.500 fueron para el césped y las demás fueron populares.

De acuerdo con la información anterior:

a) ¿Cuántas plateas y cuántas populares se vendieron?

b) ¿Qué parte del total de entradas vendidas corresponden al césped?

c) ¿Qué parte del total de entradas vendidas corresponden a populares?

Actividad 8

Alejandro encontró una oferta en un kiosco de su barrio.

Alfajores:	3 x $26	2 x $17,50

¿Cuál de las dos ofertas es más conveniente? Explique con sus palabras todo lo que tenga en cuenta para responder.

Orientaciones

Una manera de determinar cuál de las dos ofertas es más conveniente consiste en averiguar cuál es el precio del alfajor en cada caso. Para ello hacemos la división del precio de la oferta por la cantidad de alfajores en cada caso.

```
26   | 3
 20  |________
  20   8,666...
   20
    2
```

Como esta cuenta no termina nunca, podemos escribir su resultado como $8{,}\widehat{6}$. Por lo tanto, el precio real de cada alfajor en la primera oferta es de $\$8{,}\widehat{6}$ (aunque nosotros en nuestra vida cotidiana utilizaríamos un valor cercano como podría ser $8,65 u $8,70).

Si queremos saber cuánto pagaría Alejandro cada alfajor si optara por la otra oferta, hacemos:

Por lo tanto el precio de cada alfajor en la segunda oferta es de $8,75.

```
17,5 | 2
 1 5 |________
  1 0  8,75
    0
```

Las dos divisiones anteriores pueden ser resueltas usando la calculadora. Si no lo ha hecho aún, compruebe los resultados de la división usando la suya.

7. Expresión decimal de un número racional

El precio de cada alfajor en la primera oferta es de $\$8{,}\widehat{6}$. Esta es una **expresión decimal periódica.** Estas expresiones aparecen cuando, como en este caso, realizamos una división que no termina porque el resto nunca es cero y las cifras obtenidas en el resultado, en algún momento empiezan a repetirse. Simbólicamente colocamos un arco sobre la parte que repite indefinidamente.

El precio de cada alfajor en la segunda oferta es de $8,75. Esta es una **expresión decimal exacta** porque el resto de la división es cero. Toda expresión decimal exacta se puede escribir como una fracción cuyo numerador es el número sin coma y el denominador es un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tiene el número. Un número racional es un número cuya expresión decimal es exacta o periódica.

Existen infinitos números cuya expresión decimal no es ni exacta ni periódica. Son los **números irracionales**, su expresión decimal es infinita, no periódica y son números que no pueden expresarse como fracción.

Algunos ejemplos de números irracionales:

$\sqrt{2} \cong 1{,}4142135$

1,414213562 es un número racional cercano al número irracional $\sqrt{2}$

$\sqrt{3} \cong 1{,}7320508$

$\pi \cong 3{,}14159265$

Los números racionales ($\mathbb{Q}$) junto con los números irracionales ($\mathbb{I}$) forman el conjunto de **números reales** ($\mathbb{R}$). Los números reales se representan en la recta de tal manera que todo número real está asociado a un punto de la misma y todo punto de la recta está asociado a un número real.

Videos relacionados	El número Pi - Alterados por Pi - Encuentro *https://youtu.be/3Gdjkz60ON4*

Actividad 9

Marcos y Joaquín están preparando una clase especial sobre los planetas del sistema solar y la distancia que se encuentran del sol. Encontraron algunos datos interesantes:

Plutón es el planeta más alejado porque se encuentra a una distancia media de 5.905.000.000 km del Sol y Mercurio el más cercano a 58.000.000 km.

También descubrieron que hay una forma más corta para expresar estos números con muchas cifras y pudieron escribir que Plutón se encuentra a $5{,}9 \cdot 10^9$ km del Sol y Mercurio a $5{,}8 \cdot 10^7$ km del Sol.

Responda las siguientes consignas a partir de la información anterior:

a) Si la distancia media de Venus al Sol es de 108.000.000 km, ¿cómo podemos expresar esta distancia de manera más corta?

b) Exprese de manera más corta la distancia media de la Tierra al Sol que es de 149.000.000 km.

7.1. Notación científica

En la situación anterior, Marcos y Joaquín escribieron las distancias medias al Sol de los planetas del sistema solar usando **notación científica**.

Esta forma de escritura de los números se utiliza para abreviar números muy grandes o muy pequeños. Consiste en escribir el número en forma de producto entre un número decimal con módulo mayor o igual que 1 y menor que 10 y una potencia de 10.

Para escribir números decimales menores que 1 y cercanos al 0 usamos potencias de 10 con exponente negativo. Por ejemplo el volumen de una célula humana, que es $0{,}000000004 cm^3$ lo expresamos como $4.\ 10^{-9}\ cm^3$.

Videos relacionados	Qué es la notación científica. - Aritmética - Educatina *https://youtu.be/0TAHmWp7VTs*	Exponentes negativos y positivos. - Aritmética - Educatina *https://youtu.be/ARdDfBvc09A*
	Pasar de notación científica a decimal. - Aritmética - Educatina *https://youtu.be/xjACrAU902c*	Pasar de decimal a notación científica. - Aritmética - Educatina *https://youtu.be/nnBIgFprcDU*

Actividad 10

1. Exprese como número decimal con la notación usual:

$3 \cdot 10^{4}$

$8{,}02 \cdot 10^{12}$

$3{,}21 \cdot 10^{7}$

$1{,}002 \cdot 10^{10}$

$3 \cdot 10^{-4}$

$8{,}02 \cdot 10^{-12}$

$3{,}21 \cdot 10^{-7}$

$1{,}002 \cdot 10^{-10}$

2. Escriba los siguientes números utilizando notación científica:

a) 2.000.000

b) 49.000.000.000

c) 1.040.000.000.000

d) 8.902.000.000

e) 0,00000000535

f) 0,000000076

g) 0,0768

3. Indique para qué valores de x cada una de las siguientes igualdades son verdaderas:

a) $45.367.000.000 = 4{,}367 \cdot 10^{x}$

b) $0{,}0000589 = 5{,}89 \cdot 10^{x}$

c) $423.000.000.000.000 = 4{,}23 \cdot 10^{x}$

8. Problemas de proporcionalidad

Actividad 11

1. Para preparar una pintura de determinado color se mezclan 10 litros de pintura blanca con 3 litros de pintura verde.

a) Se quiere hacer una mezcla que tenga la misma tonalidad pero usando 6 litros de pintura verde, ¿cuántos litros de pintura blanca se deberán usar en este caso?

b) Si se usan, en otra mezcla, 5 litros de pintura blanca, ¿cuántos litros de pintura verde serán necesarios?

c) ¿Cuántos litros de pintura blanca habrá que mezclar con 4 litros de pintura verde, para conservar la tonalidad? ¿Y con 7 litros de pintura blanca, cuántos litros de pintura verde?

Orientaciones

$\frac{10}{3}$ = 3,333... es la cantidad de litros de pintura blanca necesaria por cada litro de pintura verde necesaria para alcanzar la tonalidad deseada, de tal manera que para 6 litros de pintura verde la cantidad de litros de pintura blanca necesaria es $\frac{10}{3} \cdot 6 = 20$.
$\frac{10}{3} \cdot 4 = \frac{40}{3} = 13\,\frac{1}{3} = 13{,}333...$, entonces parar 4 litros de pintura verde serán necesarios $\frac{40}{3}$ litros de pintura verde.

2. Si a una mezcla de 2 litros de pintura negra y 7 litros de pintura blanca se le agrega un litro de cada color, ¿se obtiene un color más claro, más oscuro o de igual tonalidad?

Orientaciones

$\frac{7}{2} = 3{,}5$ y $\frac{7+1}{2+1} = \frac{8}{3} = 2{,}6666...$, por lo tanto la segunda mezcla es más oscura que la primera porque en la primera por cada litro de pintura negra hay 3,5 litros de pintura blanca y en la segunda por cada litro de pintura negra hay menos de tres litros de pintura blanca.

3. ¿Será cierto que se obtiene la misma tonalidad si se mezclan 9 litros de pintura verde y 21 litros de blanca que si se mezclan 15 litros de pintura verde y 35 de blanca?

4. Se mezclaron 3 litros de pintura negra con 7 litros de pintura blanca. ¿Qué otras cantidades mezcladas darán la misma tonalidad?

9. Probabilidades

Actividad 12

Mauro y Bruno están pensando en ir al cine y no se ponen de acuerdo sobre cuál es la película que irán a ver. Para dirimir la cuestión deciden arrojar una moneda. Si sale cara elige Mauro, si sale ceca elige Bruno.

a)Mauro o Bruno, ¿pueden saber cuál será el resultado que se obtendrá al arrojar la moneda antes de tirarla?

b) ¿Cuáles son los posibles resultados que pueden obtenerse al arrojar una moneda?

c) ¿Alguno de los dos tiene más posibilidades de ganar? Explique con sus palabras el porqué de su respuesta.

Orientaciones

Para tomar una decisión, Mauro y Bruno decidieron arrojar una moneda al aire. Están realizando una acción cuyo resultado depende del azar y en la que no puede predecirse qué ocurrirá antes de realizarla, o sea, antes de arrojar la moneda. Una vez arrojada la moneda solo hay dos resultados posibles: que salga cara o que salga ceca. Cada uno de los chicos seleccionó una de esas alternativas. Por lo tanto, Mauro y Bruno tienen las mismas posibilidades de elegir la película ya que cada uno de ellos apostó a uno de los dos resultados posibles.

Seguramente usted puede encontrar muchos ejemplos vinculados a su vida cotidiana en los que ocurre algo similar. Los juegos de azar son ejemplos de **experimentos aleatorios.**

Nosotros estuvimos trabajando con un experimento que consiste en arrojar una moneda al aire. Este experimento tiene solo dos resultados posibles: que salga cara o que salga ceca. El conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimentos recibe el nombre de **espacio muestral**. El espacio muestral correspondiente al experimento arrojar una moneda al aire es:

E = {cara, ceca}

Si suponemos que **todos los resultados posibles que pertenecen al espacio muestral tienen la misma probabilidad**, vamos a calcular **la probabilidad de un suceso** realizando el siguiente cociente:

$$\mathbf{P} = \frac{\textit{Cantidad de resultados favorables al suceso}}{\textit{Cantidad de resultados posibles}}$$

A un espacio muestral en el que todos los resultados posibles tienen la misma probabilidad lo llamaremos **espacio equiprobable** y solo en ellos podemos utilizar el cociente mencionado anteriormente.

Si calculamos la probabilidad para el suceso «salga cara» haremos el cociente entre 1 y 2, ya que hay un caso favorable (salga cara) de dos posibles (salga cara o salga ceca). Por lo tanto **P = 1/2**. Lo mismo para el suceso «salga ceca».

Llamamos suceso **seguro** a aquel en el que la cantidad de resultados favorables es igual a la cantidad de resultados posibles. Por ejemplo: sacar una moneda de $1 de una urna donde solo hay monedas de $1. La probabilidad de un suceso seguro es 1. Piense por qué. Llamamos suceso **imposible** a aquel en el que, entre todos los resultados posibles, no hay ninguno favorable. Por ejemplo, sacar una moneda de $0,25 de una urna en la que hay solo monedas de $1. La probabilidad de un suceso imposible es 0. Piense por qué. Según la cantidad de casos favorables que registre el suceso, se tratará de un suceso más o menos probable. La probabilidad de un suceso es un número mayor o igual que cero y menor o igual que 1. Cuanto más probable sea el suceso, más cercana a 1 será la medida de su probabilidad.

Videos relacionados	Probabilidades: Problema 1 *https://youtu.be/nyxtNFVwR8U*	Probabilidades: Problema 3 *https://youtu.be/cndpYNtIXHY*
	Probabilidades: Problema 2 *https://youtu.be/-tKabGthZyw*	Probabilidades: Problema 4 *https://youtu.be/fzjb0pELA8o*

Actividad 13

1. Para cada uno de los sucesos descriptos a continuación determine si corresponde o no a un experimento aleatorio:

a) Que salga un 5 al arrojar un dado cuyas caras están numeradas del 1 al 6.

b) Que salga un 5 al arrojar un dado cuyas caras no están numeradas.

c) Sacar una bola roja de una urna donde hay 25 bolas rojas.

d) Sacar una bola roja de una urna donde hay 15 bolas rojas y 10 bolas verdes.

e) Obtener una copa al sacar una carta de un mazo de 40 cartas españolas.

f) Obtener una copa al sacar una carta de un mazo de 52 cartas de póquer.

g) Sacar un alfajor de chocolate de una caja en la que hay 12 alfajores de chocolate.

h) Sacar un alfajor de chocolate de una caja en la que hay 6 alfajores de chocolate y 6 alfajores de fruta.

i) Contar la cantidad de estudiantes que hay en un aula.

2. Para cada uno de los sucesos enunciados en el ítem **1** y que corresponden a experimentos aleatorios determine su probabilidad.

3. Joaquín llevó a la escuela una caja con 15 alfajores: 6 de chocolate, 5 de dulce de leche y 4 de frutas. Convidó a 3 compañeros que se comieron 2 de chocolate y 1 de dulce de leche. Si se elige 1 nuevo alfajor al azar, ¿es más probable que sea de chocolate, de dulce de leche o de fruta? ¿Por qué?

4. En una urna hay 10 bolas rojas y 10 bolas verdes. Se realizan 5 extracciones consecutivas devolviéndose la bola a la urna luego de cada extracción. En las cuatro primeras extracciones salió una sola bola roja, por lo tanto, en la quinta extracción:

a) Es más probable que salga una bola verde.

b) Hay igual probabilidad de que la bola que salga sea verde o roja.

c) Es más probable que salga una bola roja.

Elija la opción que considere correcta explicando el porqué de su elección.

5. De los 1.500 aspirantes a los cursos de capacitación laboral que ofrece el Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 450 se inscribieron solo para el curso de carpintería, 670 se inscribieron solo para el curso de plomería, 245 se inscribieron a ambos cursos y 135 se inscribieron a otros cursos.

Si se elige un inscripto al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un alumno inscripto solamente al curso de carpintería?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un alumno inscripto a los dos cursos mencionados?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un alumno inscripto al curso de carpintería?

Actividades de autoevaluación

1. Solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera. Indique cuál es:

a) $\frac{5}{3} < \frac{3}{2}$

b) $-\frac{1}{5} > \frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$

d) $\frac{3}{7} > \frac{2}{3}$

2. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «Entre dos números racionales cualesquiera, existen infinitos números racionales».

3. En un teatro están ocupadas las tres quintas partes de su capacidad y quedaron libres 322 butacas. ¿Cuál es la capacidad total del teatro? Indique la respuesta correcta.

a) 805 butacas.

b) 966 butacas

c) 1.610 butacas

d) 644 butacas

4. Indique cuál es el resultado del siguiente cálculo: $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$

a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{10}{9}$

5. En una bolsa hay 30 bolitas negras y 15 rojas. Se extraen dos bolitas, una a continuación de la otra y sin reposición (la bolita que sale no se incorpora nuevamente a la bolsa). ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bolita extraída sea roja si la primera fue también roja?

a) $\frac{14}{45}$ b) $\frac{14}{44}$ c) $\frac{14}{30}$ d) $\frac{15}{45}$

UNIDAD 4: Modelo matemático. Ecuaciones e inecuaciones

Actividad 1

Santiago quiere tener todo bajo control. Entre otras cosas, ha decidido ir controlando sus gastos día a día. Luego de cobrar su sueldo mensual el último día del mes y de pagar sus gastos fijos (alquiler de vivienda y servicios) le quedan $8.400.

Veamos cómo fueron sus gastos durante julio.

El 30 de junio cobró su sueldo. Después de un día, a la noche del 1º de julio, le quedaban $8.200. Al finalizar el 2 de julio le quedaban $8.000 y al concluir el 3 de julio le quedaban $7.800.

A partir de la información anterior, responda las siguientes consignas:

1. Describa con sus palabras cómo usó el dinero Santiago durante los tres primeros días de julio.

2. A partir del gasto de dinero que hizo Santiago en los tres primeros días del mes calculó que al terminar el 4 de julio tendría $ 7.600.

3. Para ir registrando la evolución del gasto de su dinero durante el mes de julio, Santiago confeccionó una tabla o planilla. En ella fue anotando, día a día, cuánto dinero le iba quedando.

Las siguientes son las anotaciones que hizo para la primera semana del mes:

Día del Mes	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Dinero que le queda.	**8.200**	**8.000**	**7.800**	**7.600**	**7.400**	**7.200**	**7.000**

4. Si el dinero restante lo gastó de la misma forma en que lo hizo la primera semana,

a) ¿Cuánto dinero esperaría que le quede el día 10 de julio? ¿Y el 25 de julio?

b) ¿Le alcanzará el dinero cobrado para sus gastos del mes de julio?

5. En la vida de Santiago:

a) ¿Puede ocurrir que algún día deba gastar $350?

b) ¿Es posible que el 10 de julio le queden $2.970?

c) ¿Podría ocurrir que al 15 de julio haya gastado todo el dinero que cobró?

Orientaciones

Si nos guiamos por lo que le ocurrió durante la primera semana del mes de julio, podemos predecir que a Santiago el dinero le va a alcanzar para llegar a fin de mes, aunque podría no ser así.

Si analizamos lo que pasó con los gastos de Santiago durante los primeros días de julio, podemos pensar que cada día le quedan $200 menos que el día anterior.

En este caso, estamos pensando en un **modelo matemático** que consiste en restar 200 a la cantidad de dinero que tenía el día anterior. De esta manera, para calcular cuánto dinero se espera que tenga Santiago el 25 de julio, podemos realizar el siguiente cálculo: $8.400 - 25 . $200 = $3.400 , y así para cualquier otro día del mes de julio.

Este modelo nos permite describir lo que ocurrió con el dinero de Santiago durante la primera semana de julio. Si bien a través de él podemos estimar qué cantidad de dinero le quedará a Santiago un día cualquiera del mes, el modelo podría perder validez cualquier día. Esto ocurriría, por ejemplo, si un día del mes a Santiago se le presentara un gran gasto que supere los $200. O también, si un día gastara menos de $200.

Un modelo matemático nos permite describir lo que observamos en la realidad, pero no debemos perder de vista que su validez depende de lo que ocurra en la realidad. Puede ser que lo que ocurra en la realidad lleve a cambiar o modificar el modelo formulado.

Actividad 2

Usted va a una librería para hacer algunas fotocopias cuyo precio por unidad es de $0,90.

1. ¿Cuánto se debe pagar por 14 fotocopias? ¿Y por 35 fotocopias?

2. ¿Cuánto esperaría que le cobren por 110 fotocopias? ¿Y por 180 fotocopias?

3. Describa, con sus palabras, la cuenta que hace con la cantidad de fotocopias para calcular lo que se debe pagar por ellas.

4. Responda las siguientes preguntas a partir de las cuentas realizadas para calcular el importe que se debe pagar por las fotocopias:

a) En la cuenta que hace en cada caso para obtener el dinero a pagar por cada cantidad de fotocopias, ¿qué número se repite? ¿Qué representa dicho número para un cliente de la librería?

b) En las mismas cuentas a las que hacíamos referencia en la pregunta anterior, ¿qué número cambia? ¿Qué representa dicho número para un cliente de la librería?

Orientaciones

El precio de cada fotocopia es de $0,90. Para calcular cuánto cuesta hacer una determinada cantidad de fotocopias, usted habrá multiplicado esa cantidad por 0,90. Es decir, que realizó una misma cuenta con distintos números (multiplicar por 0,90 la cantidad de fotocopias). Por lo tanto, hay un número que se repite en todos los cálculos (el precio de cada fotocopia) y otros que van cambiando (la cantidad de fotocopias).

Por ejemplo, usted multiplicó a 0,90 por 14, por 35, por 110 y por 180. Con esas cuentas calculó cuánto debe pagar por 14, por 35, por 110 y por 180 fotocopias, respectivamente.

En Matemática, se utilizan letras para representar conjuntos de valores. Por ejemplo, para la situación de las fotocopias que estamos analizando, podemos representar con la letra *c* a las diferentes cantidades de fotocopias a realizar. Así, para expresar en forma general la cuenta que debe hacerse para calcular cuánto se paga por realizar una cantidad c de fotocopias, escribimos: $0{,}90 \cdot c$

Los resultados de estas cuentas para los diferentes valores de *c* nos indican los diferentes importes a pagar por hacer una cantidad *c* de fotocopias. También podemos utilizar una letra para representar al conjunto de los importes a pagar. Por ejemplo, la letra *p*.

¿Cómo relacionamos el importe a pagar *p* con la cantidad de fotocopias *c*?

Como vimos, para calcular el importe a pagar por hacer una cantidad c de fotocopias, resolvemos la cuenta $0{,}90 \cdot c$. El resultado de esta cuenta nos da el importe a pagar *p*.

Por lo tanto, podemos expresar lo hecho usando la igualdad:

$$p = \mathbf{0{,}90} \, . \, c$$

Debido a los aumentos de precio del papel y de la tinta, el dueño de la fotocopiadora debe cambiar el precio de las fotocopias. Después de estudiar esta situación, decide que debe cobrar $1,10 por cada fotocopia.

Responda las siguientes consignas a partir de la información anterior:

a) Arme una lista de los importes a pagar para el empleado de la fotocopiadora, escribiendo el importe a pagar por 15, 35, 50, 80 y 100 fotocopias.

b) Si identificamos a la cantidad de fotocopias con la letra *c* y al importe a pagar por ellas con la letra *p*, ¿cuál es la igualdad que permite describir la cuenta que hay que hacer con *c* para calcular *p* después del aumento?

c) En esta librería a los clientes que hacen más de 200 fotocopias se les ofrece un descuento. ¿Puede usar la igualdad $p = 1{,}10 \cdot c$ para calcular el importe a pagar por 250 fotocopias? Explique su respuesta con sus palabras.

Orientaciones

El uso del modelo matemático de fórmula $p = 1{,}10 \cdot c$ tiene restricciones en su validez. Se puede utilizar solo si la cantidad *c* de fotocopias es menor o igual que 200.

Si la cantidad de fotocopias es mayor a 200, el modelo pierde vigencia. Eventualmente, se puede buscar otro modelo que sea válido para más de 200 fotocopias.

Tenga en cuenta entonces que un modelo matemático puede tener restricciones en su uso. Es decir, que el modelo puede tener validez en algunos casos y en otros no.

1. Variables. Fórmulas

En las situaciones planteadas intervienen cantidades que varían: las cantidades de fotocopias y el monto a pagar por las mismas. A estas cantidades que varían las llamaremos **variables** y las representaremos con letras. A las igualdades que describen las relaciones existentes entre las variables que intervienen en el problema las llamaremos **fórmulas**.

Al escribir la relación observada a través de una fórmula hemos realizado una traducción del lenguaje coloquial -el que usted utiliza habitualmente para comunicarse- al lenguaje que utiliza la Matemática. Es decir, escribimos la relación observada utilizando **lenguaje simbólico.**

Las fórmulas son una forma de expresar modelos matemáticos.

Actividad 3

1.

a) Para calcular el doble de 4, ¿qué cuenta hace?

b) Para calcular el doble de 12, ¿qué cuenta hace?

c) Para calcular el doble de 37, ¿qué cuenta hace?

d) Para calcular el doble de un número cualquiera que identificamos con la letra *m*, ¿qué expresión es adecuada para indicar la cuenta que hace?

e) Escriba una fórmula que permita expresar que un número identificado con la letra *d* es el doble de un número identificado con la letra *m*?

2.

a) Para calcular el triple de 6, ¿qué cuenta hace?

b) Para calcular el triple de 25, ¿qué cuenta hace?

c) Escriba una fórmula que permita expresar que un número identificado con la letra *y* es el triple de un número identificado con la letra *x*.

3. Pedro tiene 5 años menos que José.

a) Si José tiene 27 años, ¿con qué cuenta calcula cuántos años tiene Pedro?

b) Si José tiene 42 años, ¿con qué cuenta calcula cuántos años tiene Pedro?

c) Si representamos con la letra *p* a la edad de Pedro y con la letra *j* a la edad de José, escriba una fórmula que permita calcular la edad de José en función de la de Pedro.

4. Se realiza un experimento en el que se mide la temperatura de una barra de metal en distintos instantes. Se observa que la temperatura *c* (medida en grados) después de 3 minutos de comenzado el experimento se puede calcular haciendo la cuenta $c = 5 \cdot 3 + 2$.

Después de 7 minutos de comenzado el experimento, la temperatura se calcula haciendo $c = 5 \cdot 7 + 2$ y a los 20 minutos de empezar el experimento, $c = 5 \cdot 20 + 2$.

Teniendo en cuenta la información anterior, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las variables que intervienen en este experimento?

b) Calcule la temperatura de la barra a los 3 minutos de comenzar el experimento.

c) Calcule la temperatura a los 7 minutos de empezar el experimento.

d) ¿Cuál es la temperatura a los 20 minutos de comenzado el experimento?

e) ¿Con qué cuenta calcularía la temperatura de la barra a los 12 minutos de comenzado el experimento?

f) Si utilizamos la letra *t* para expresar el tiempo transcurrido desde el inicio del experimento, escriba una fórmula que le permita calcular la temperatura *c* de la barra en cualquier instante *t*.

g) Utilice la fórmula que dio en el ítem anterior para determinar la temperatura de la barra de metal 30 minutos después del inicio del experimento.

5. Se pudo establecer que la fórmula $y = 3x + 5$ es un adecuado modelo matemático para determinar la temperatura de una sustancia durante el primer minuto de un experimento.

A partir de ese instante la temperatura se mantiene constante.

Teniendo en cuenta la información dada, complete la siguiente tabla:

x (tiempo en segundos)	**5**	**18**	**45**	**60**	**75**	**100**
y (temperatura en grados)						

6. Se mide la altura de una planta joven. Se considera como *t* = 0 al instante en que se comienza con las observaciones. El tiempo *t* se mide en días y la altura *a* se mide en centímetros. Los datos observados se muestran en la siguiente tabla:

t (días)	1	2	3	4	5
a (cm)	6,2	10,9	16	21,4	25,8

Responda las siguientes consignas teniendo en cuenta la información anterior:

a) ¿Cuál de las siguientes fórmulas permite calcular, aproximadamente, la altura *a* de la planta en cada día *t*?

- a = t + 5
- a = 6 . t
- a = 5 . t – 1
- a = 5 . t + 1

b) Utilice la fórmula que eligió en el ítem a) para predecir cuál será la altura aproximada esperable de la planta a los 7 días de observación.

c) ¿Es posible que la altura que calculó en el ítem a) no sea la que se mida en la planta a los 7 días de observación? Explique por qué.

d) ¿Cuál fue la altura de la planta en el momento en que comenzaron las observaciones?

Actividad 4

La fórmula $p = 0{,}90 \cdot c$ de la actividad 2 nos permite determinar el monto a pagar en función de la cantidad de fotocopias encargadas.

a) Utilice la fórmula para determinar el monto a pagar por 13 fotocopias.

b) Utilice la fórmula para determinar cuántas fotocopias encargó un cliente que pagó $65,7.

c) ¿Es posible que un cliente haya pagado $15,75 por una cantidad de fotocopias?

Orientaciones

En la fórmula reemplazamos la letra *c* por 13 y nos queda $p = 0{,}90 \cdot 13 = 11{,}70$. Entonces por 13 fotocopias el monto a pagar es de $11,70.

Si el monto que pagó el cliente es de $65,70, en la fórmula debemos reemplazar la letra *p* por 65,70 y nos queda $65{,}70 = 0{,}90 \cdot c$.

2. Ecuación

Diremos que una igualdad en la que intervienen variables representadas por letras es una **ecuación**. Si para algunos valores numéricos de esas letras la igualdad resulta verdadera, diremos que esos números son **soluciones** de la ecuación.

En la ecuación $65{,}70 = 0{,}90 \cdot c$ podemos reemplazar la letra *c* por cualquier número entero y positivo.

Si reemplazamos la *c* por 15 queda $65{,}70 = 0{,}90 \cdot 15$ que es una afirmación falsa. En tal caso diremos que 15 no es solución de la ecuación.

Para hallar la solución de la ecuación dividimos 65,70 por 0,90 y el resultado es 73. Entonces si reemplazo la *c* por 75 queda $65{,}70 = 0{,}90 \cdot 73$ que es una afirmación verdadera y en tal caso diremos que 73 es **solución** de la ecuación.

Si reemplazamos la letra *p* por 15,75 queda $15{,}75 = 0{,}90 \cdot c$ y entonces $c = 15{,}75 : 0{,}90 = 17{,}5$; pero no es posible que un cliente haya encargado 17,5 fotocopias.

Actividad 5

1. Determine si 8 es solución de la ecuación $2x + 3 = 41$

2. Determine si -3 es solución de la ecuación $-5x + 10 = -8x + 1$

Orientaciones

En el ítem 1, reemplazamos la *x* por 8 y resolvemos los cálculos:

$2 \cdot 8 + 3 = 41$

$16 + 3 = 41$

$19 = 41$

$19 = 41$ es una afirmación falsa, entonces 8 no es solución.

En el ítem 2, luego de resolver los cálculos, la afirmación resultante es verdadera y entonces -3 es solución de la ecuación.

Actividad 6

Alberto y Roberto trabajan en una fábrica textil desde el año 2004. Identificaremos sus salarios básicos con las letras *a* y *b*, respectivamente. Alberto y Roberto tienen la misma categoría, por lo que sus salarios básicos son iguales. Esto es: $a = b$.

Si todos los trabajadores de la fábrica reciben una suma fija de $1.500 a cuenta de las futuras paritarias, podemos expresar los salarios de Alberto y Roberto como $a + 1.500$ y $b + 1.500$, respectivamente. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

$a + 1.500 < b + 1.500$

$a + 1.500 > b + 1.500$

$a + 1.500 = b + 1.500$

Orientaciones

Como los salarios básicos de Alberto y Roberto son iguales, al incrementarse ambos en \$1.500 podemos afirmar que $a + 1.500 = b + 1.500$.

En general, diremos que si $a = b \Rightarrow a + c = b + c$ para cualquier número a, b y c.

($a = b$, entonces $a + c$ es igual a $b + c$).

También son válidas las siguientes afirmaciones:

$a = b \Rightarrow a - c = b - c$ para cualquier número a, b y c.

$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$ para cualquier número a, b y c.

$a = b \Rightarrow a : c = b : c$ para cualquier número a, b y $c \neq 0$.

$a = b \Rightarrow a^n = b^n$ para cualquier número a, b y n *natural*.

$a = b \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ para cualquier número a, b y n *natural* impar.

$a = b \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ para cualquier número a y b positivos y n par.

2.1. Resolución de ecuaciones. ¿Cómo determinar las posibles soluciones de una ecuación?

Aplicaremos las propiedades vistas en el párrafo anterior para determinar las posibles soluciones de una ecuación y a continuación, algunos ejemplos:

1.

$x + 7 = 10$

Restamos 7 en ambos miembros de la igualdad y queda:

$x + 7 - 7 = 10 - 7$

$x + 0 = 3$

$x = 3$

Por lo tanto, la única solución de la ecuación es 3 y escribimos al **conjunto solución** de la siguiente manera: $S = \{ 3 \}$

Podemos verificar que la solución hallada es correcta reemplazando la x por 3 y constatando que la igualdad resultante es una afirmación verdadera.

$3 + 7 = 10$.

2.

$6x = 42$

Dividimos ambos miembros de la igualdad por 6 y queda:

$6x : 6 = 42 : 6$

$1x = 7$

$x = 7$

$S = \{ 7 \}$

Verifique que la solución hallada sea correcta.

3.

$5x - 12 = 3$

Sumamos 12 en ambos miembros, entonces:

$5x - 12 + 12 = 3 + 12$

$5x + 0 = 15$

$5x = 15$

Dividimos ambos miembros de la igualdad por 5, entonces:

$5x : 5 = 15 : 5$

$1x = 3$

$x = 3$

$S = \{ 3 \}$

Verifique que la solución hallada sea correcta.

4.

$2x - 6 = -11$

Resolveremos la ecuación de manera similar a las anteriores, pero simplificando la escritura:

$2x = -11 + 6$

$2x = -5$

$x = -2, 5$

$S = \{ -2{,}5 \}$

Verifique que la solución hallada sea correcta.

5.

$2(5x + 3) - 14 = 40$

Utilizamos la propiedad distributiva:

$10x + 6 - 14 = 40$

$10x - 8 = 40$

$10x = 40 + 8$

$10x = 48$

$x = 48 : 10$

$x = 4{,}8$

$S = \{ 4{,}8 \}$

Verifique que la solución hallada sea correcta.

6.

En la siguiente ecuación hay letras a ambos lados de la igualdad.

$3x + 10 = x - 2$

Llevamos los términos que tienen letras a un lado de la igualdad y los términos que no tienen letras al otro lado:

$3x - x = -2 - 10$

$2x = -12$

$x = -12 : 2$

$x = -6$

$S = \{ -6 \}$

Verifique que la solución hallada sea correcta.

7.

$2(x + 1) - 3 = 2x + 7$

$2x + 2 - 3 = 2x + 7$

$2x - 1 = 2x + 7$

$2x - 2x = 7 + 1$

$0 = 8$

0 = 8 es una afirmación falsa para cualquier valor de *x*, entonces diremos que la ecuación no tiene solución, el conjunto solución es el conjunto vacío.

8.

$(7 + 3x) \cdot 2 - 9 = 6x + 5$

$14 + 6x - 9 = 6x + 5$

$6x - 6x = 5 - 14 + 9$

$0 = 0$

0 = 0 es una afirmación verdadera para cualquier valor de x, la ecuación tiene infinitas soluciones, cualquier número real y entonces el conjunto solución es el conjunto de los números reales.

Elija un número cualquiera y verifique que sea correcta la solución de la ecuación.

9.

$x^2 + 15 = 24$

$x^2 = 24 - 15$

$x^2 = 9$

Como $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$, $S = \{ -3 ; 3 \}$

Verifique que las soluciones halladas sean correctas.

10.

$\sqrt[3]{x+1} + 1 = 3$

$\sqrt[3]{x+1} = 3 - 1$

$\sqrt[3]{x+1} = 2$

$x + 1 = 2^3$

$x = 8 - 1$

$x = 7$

$S = \{ 7 \}$

Verifique que la solución hallada sea correcta.

2.2. Problemas resueltos mediante ecuaciones

1. Ismael es un vendedor de teléfonos. Su salario mensual consta de un básico (fijo) de \$4.000 y de una comisión de \$150 teléfonos vendidos. ¿Cuántos teléfonos deberá vender Ismael para que su salario mensual sea igual a \$9.700? ¿Cuántos teléfonos deberá vender Ismael para que su salario mensual sea igual a \$8.000?

Llamaremos x a la cantidad de teléfonos que Ismael debe vender en el mes para recibir un salario de \$9.700. Entonces el salario mensual de Ismael se puede expresar como **4.000 + 150 x** y una ecuación adecuada para responder la primera pregunta es:

$4.000 + 150\,x = 9.700$

$150\,x = 9.700 - 4.000$

$150\,x = 5.700$

$x = 5.700 : 150$

$x = 38$

Por lo tanto, Ismael deberá vender 38 teléfonos para que su salario sea de \$9.700.

Para responder la segunda pregunta:

4.000 + 150 x = 8.000

150 x = 8.000 - 4.000

150 x = 4.000

x = 4.000 : 150

x = 26,666...

Dado que el número de teléfonos vendidos debe ser un número entero mayor o igual que 0, la respuesta es que no hay cantidad alguna de teléfonos vendidos para que el salario de Ismael sea de $8.000.

2. La suma de dos números consecutivos es igual a 443. ¿Cuáles son dichos números? Llamaremos *x* al primer número y a su consecutivo (siguiente) x+1. Entonces, una ecuación adecuada para resolver el problema es:

x + (x + 1) = 443

(x + x) +1 = 443

2x + 1 = 443

2x = 443 - 1

2x = 442

x = 442 : 2

x = 221 ; y entonces x + 1 = 222.

Los números son 221 y 222.

3. Luis tiene hoy en una latita $30 y a partir de mañana agregará a la misma $5 todos los días del año en curso. Gladys tiene hoy en su latita $40 y a partir de mañana agregará a la misma $5 todos los días del año en curso. ¿Después de cuántos días Luis y Juan tendrán la misma cantidad de dinero en sus latitas?

Luis tiene 30 pesos y cada día suma 5 pesos, por lo tanto después de *x* días tendrá en su latita 30 + 5x pesos.

Gladys tiene 40 pesos y cada día suma 5 pesos, por lo tanto después de *x* días tendrá en su latita 40 + 5x pesos.

Para responder a la pregunta resulta adecuada resolver la siguiente ecuación:

30 + 5x = 40 + 5x

5x – 5x = 40 – 30

0 = 10

0 = 10 es una afirmación falsa para cualquier valor de *x*, entonces la ecuación no tiene solución y la respuesta es que no habrá día alguno en que ambas latitas tengan la misma cantidad de dinero.

Videos relacionados	Ecuación con pasaje de términos - Álgebra - Educatina *https://youtu.be/K402N8xMQqc*	Incógnitas en los dos miembros - Álgebra - Educatina *https://youtu.be/tNJigOP7ucU*
Resolver una ecuación y verificarla - Álgebra - Educatina *https://youtu.be/49DnVrKTIsw*	Ley uniforme y ley cancelativa - Álgebra - Educatina *https://youtu.be/GyP-4i61DxY*	Ecuaciones simples (método para resolverlas) - Álgebra - Educatina *https://youtu.be/ScEhJ0bjNRY*
Sumando incógnitas - Álgebra - Educatina *https://youtu.be/iEYEkVmuSiw*	Ecuaciones simples con productos - Álgebra - Educatina *https://youtu.be/f4kVkgLDJ70*	

3. Inecuaciones

1. Ismael es un vendedor de teléfonos. Su salario mensual consta de un básico (fijo) de $.4000 y de una comisión de $150 teléfonos vendidos. ¿Cuántos teléfonos deberá vender Ismael para que su salario mensual sea mayor a $9.700?

Como ya vimos en un párrafo anterior, el salario mensual de Ismael se puede expresar como 4.000 + 150x, y una expresión adecuada para la situación presentada es la siguiente:

$4.000 + 150x > 9.700$

A estas expresiones con letras y desigualdades (mayor, menor, mayor o igual, menor o igual) las llamaremos inecuaciones y en este caso el conjunto solución es el conjunto de todos los números naturales mayores que 38. Las soluciones son números naturales porque la cantidad de teléfonos vendidos es 0 o un número natural.

2. Dada la inecuación $4.000 + 150x > 9.700$, ¿cuál es el conjunto solución de la misma? La inecuación es la misma que la presentada en el ítem anterior, pero en este caso las soluciones pueden ser números reales cualesquiera, no como en el problema anterior que debían ser números naturales. Entonces, el conjunto solución de la inecuación es el conjunto de todos los números reales mayores que 38; a tal conjunto lo llamaremos «intervalo abierto 38, más infinito» y lo notaremos $(38;+\infty)$. El infinito no es número y el intervalo $(38;+\infty)$ satisface la condición de que para cualquier número *k*, por «más grande que sea», existe un número *p* en el intervalo tal que *p* es mayor que *k*.

Dada la inecuación $4.000 + 150x < 9.700$ el conjunto solución es el conjunto de todos los números reales menores que 38; a tal conjunto lo llamaremos «intervalo abierto menos infinito, 38» y lo notaremos $(38;+\infty)$. El intervalo $(38;+\infty)$ satisface la condición de que para cualquier número *k*, por «más chico que sea», existe un número *p* en el intervalo tal que *p* es menor que *k*.

Si en las inecuaciones anteriores hubiéramos utilizado las desigualdades ≥ (mayor o igual) o ≤ (menor o igual) las soluciones serían los intervalos $[38;+\infty)$ o $(-\infty; 38]$, respectivamente.

3. Dadas las siguientes inecuaciones: $x > -5$ y $x < 13$, el conjunto de las soluciones comunes a ambas inecuaciones es el conjunto de los números reales mayores que -5 y menores que 13, se llama intervalo abierto -5, 13 y lo notaremos $(-5 ; 13)$.

4. El intervalo cerrado -5, 13 y que notaremos $[-5 ;13]$ es el conjunto de las soluciones comunes a las inecuaciones $x \geq -5$ y $x \leq 13$.

Videos relacionados	Introducción a inecuaciones - Álgebra - Educatina *https://youtu.be/ugbJy1VqlHc*	Conjunto solución de una inecuación - Álgebra - Educatina *https://youtu.be/FP4xsWaTlqs*

Ejercicios

1. En cada uno de los siguientes casos verifique -sin resolver la ecuación- que:

a) $x = -4$ es solución de la ecuación $3x + 5 = -7$

b) $x = -5$ es solución de la ecuación $7x + 45 = -2x$

c) $x = 3$ es solución de la ecuación $x^2 - 9 = 0$

d) $x = -3$ es solución de la ecuación $x^2 - 9 = 0$

e) $x = 0$ es solución de la ecuación $5(x - 10) = x - 50$

f) $x = -4$ es solución de la ecuación $7 - (3x - 6) = 2x + 33$

g) $x = \frac{1}{2}$ es solución de la ecuación $x + 2 = 5 \cdot x$

2. En cada uno de los siguientes casos verifique -sin resolver la ecuación- que:

a) $x = 4$ no es solución de la ecuación $3x + 5 = -7$

b) $x = -2$ no es solución de la ecuación $7x + 45 = -2x$

c) $x = 4$ no es solución de la ecuación $x^2 - 9 = 0$

d) $x = 10$ no es solución de la ecuación $5(x - 10) = x - 50$

e) $x = -7$ no es solución de la ecuación $7 - (3x - 6) = 2x + 33$

3. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones y verifique las soluciones que halle:

a) $2x = 10$

b) $x - 10 = 12$

c) $5x + 3 = 13$

d) $5(2x + 3) = -30$

e) $10x - 2 = 5x + 18$

f) $0,5x + \frac{1}{3} = 0,2x + 1$

g) $3(x+2) + 1 = 3x + 5$

h) $2x - 3 = 4(x+1) - 2x - 7$

4. Un campo se divide en 2 parcelas que se dedican al cultivo de distintos cereales. Una de esas parcelas ocupa 5/13 de la superficie del campo y en ella se cultiva trigo. La otra parcela tiene una superficie de 48 hectáreas y está sembrada con maíz.

Teniendo en cuenta el enunciado anterior, responda las siguientes consignas:

a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite encontrar la superficie *x* (en hectáreas) del campo?

$x + \frac{5}{13}x = 48$ $\qquad$ $x + 48 = \frac{5}{13}x$ $\qquad$ $\frac{5}{13}x + 48 = x$

b) Encuentre la solución de la ecuación que eligió en el ítem a).

c) ¿Cuál es la superficie del campo medida en hectáreas?

d) ¿Cuántas hectáreas están sembradas con trigo?

e) Verifique la solución que halló en el ítem b).

5. A continuación le daremos algunos enunciados de problemas.

Para cada uno de ellos:

- Identifique qué se pretende conocer (incógnita).
- Plantee una ecuación que traduzca las condiciones dadas en el enunciado.
- Encuentre la solución de la ecuación que planteó.
- Conteste la o las preguntas planteadas en cada problema.
- Verifique la solución hallada.

Los enunciados son los siguientes:

I. Un tanque tiene 3.000 litros de agua y a partir de instante t= 0 comienza a desagotarse a razón de 15 litros por horas. ¿Después de cuántas horas en el tanque hubo 1.155 litros? ¿Después de cuántas horas el tanque se vació?

II. Pedro gasta los tres quintos de su sueldo mensual durante 3 semanas. Le quedan $4.530. ¿Cuál es el sueldo de Pedro?

III. Un laboratorio elabora dos tipos de productos. Para eso utiliza la droga MT. Esta droga está envasada en paquetes que contienen ***x*** gramos. En la elaboración de uno de los productos se necesitan cuatro décimos de un paquete de MT y para el otro producto las tres cuartas partes de un paquete de dicha droga. Un día se abrieron y utilizaron dos paquetes de MT para elaborar un producto de cada tipo y sobraron 170 gramos de esa droga. ¿Cuántos gramos de droga contiene cada paquete de MT?

IV. Ignacio tiene que comprar 18 bidones de lavandina para su negocio. Por pago al contado le hacen un descuento de $70. Ignacio paga $1.010 al contado por su compra. ¿Cuál es el precio de cada bidón de lavandina?

V. Un campo se divide en dos parcelas que se dedican al cultivo de distintos cereales. Una de esas parcelas ocupa 3/11 de la superficie del campo y en ella se cultiva trigo. La otra parcela tiene una superficie de 72 hectáreas y está sembrada con maíz. ¿Cuál es la superficie del campo en hectáreas? ¿Cuántas hectáreas están sembradas con trigo?

VI. Un automovilista divide su viaje en tres etapas. En la primera recorre 2/7 del camino, en la segunda 2/5 recorre del camino y en la tercera recorre 275 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros recorre en total? ¿Cuántos kilómetros recorre en la primera etapa? ¿Y en la segunda?

VII. Martín gastó 3/10 de su sueldo mensual en gastos de supermercado, 2/5 del resto del sueldo en pagos de servicios y le quedaron $4.410 para otros gastos. ¿Cuánto dinero cobró Martín? ¿Cuánto gastó en el supermercado? ¿Cuánto gastó en el pago de servicios?

VIII. Actualmente, Juan tiene 2/3 de la edad que tendrá dentro de 6 años. ¿Cuántos años tiene Juan?

6. Determine si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) 4 es solución de la inecuación $3x + 5 > -7$

b) -2 es solución de la inecuación $7x + 45 < 2x$

c) 3 es solución de la inecuación $x^2 - 3 \geq 0$

d) 10 no es solución de la inecuación $5(x - 10) \leq x - 50$

e) -7 es solución de la inecuación $2x < x$

f) $\sqrt[2]{2}$ es solución de la inecuación $3x < x + 3$

7. Indique dos números racionales y dos números irracionales que sean soluciones de la inecuación $x > 3x + 2$

8. Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $(2;-\infty)$ es el conjunto solución de la inecuación $x - 2 > 0$.

b) $(-\infty;7]$ es el conjunto solución de la inecuación $x - 7 \leq 0$.

c) $(-\infty;7)$ es el conjunto solución de la inecuación $x - 7 \leq 0$.

Actividades de autoevaluación

1. Indique cuál de las siguientes expresiones se corresponde con el siguiente enunciado: «El siguiente del triple de un número entero *x*».

a) x + 1

b) 3x + 1

c) 3 · (x + 1)

d) 3x

2. En la siguiente tabla se registraron los pesos y los precios de una determinada mercadería en un negocio:

x (peso de la mercadería en kg)	5	10	15
y (precio en $)	17	27	37

¿Cuál de las siguientes fórmulas permite calcular el precio y si se conoce el peso *x* de la mercadería?

a) y = 2x + 7

b) y = 3x + 2

c) y = 3x + 4

d) y = 2x + 2

3. Luisa cobra un salario diario que se compone de un viático de $80, más $100 por hora trabajada. Ayer Luisa cobró $780. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar cuántas horas trabajó Luisa ayer?

a) 100x - 80 = 780

b) 100x = 780

c) 80x + 100 = 780

d) 100x + 80 = 780

4. ¿Cuál es la solución de la ecuación 5x + 4 = 39?

a) -11 b) 11 c) -7 d) 7

5. 5 es solución de una de las siguientes inecuaciones. ¿De cuál?

a) -2x + 7 > -4

b) -2x + 7 < -4

c) 2x + 7 < -4

d) -2x - 7 > -4

UNIDAD 5: Funciones

Luis Alberto es un vendedor de aceites especiales. Su salario mensual está constituido por un monto fijo de $4.000, que llamaremos básico, más una comisión de $100 por litro de aceite vendido. En esas condiciones, es claro que el salario mensual de Luis Alberto varía en función de la cantidad de litros de aceite vendidos. Diremos que en la situación planteada intervienen dos variables, una independiente y la otra dependiente de la anterior. En este caso, el salario a cobrar depende de la cantidad de litros de aceite vendidos. Como ya hemos visto a las variables las nombramos con letras.

Llamaremos x a la cantidad de litros de aceite vendidos y llamaremos y al salario. Una función es una correspondencia entre dos variables x e y, de tal manera que a cada valor de x le corresponde un único valor de y. La dependencia de la variable y respecto de la variable x se manifiesta en el lenguaje escrito de la siguiente manera:

$$y = f(x)$$

Observemos la siguiente tabla de valores:

x **(Cantidad de litros de aceite vendidos)**	y **(Salario a cobrar, en pesos)**
0	$4000 + 100 \cdot 0 = 4000$
20	$4000 + 100 \cdot 20 = 6000$
40	$4000 + 100 \cdot 40 = 8000$
70	$4000 + 100 \cdot 70 = 11000$
100	$4000 + 100 \cdot 100 = 14000$

Resulta de interés expresar mediante una fórmula la relación existente entre ambas variables, esto es, qué cálculos debemos realizar para determinar el valor de la variable y conociendo el valor de la variable x.

Para determinar el salario de Luis Alberto (y), al básico de $4.000 le sumamos la comisión, que es el resultado de multiplicar $100 por la cantidad de litros vendidos (x). Entonces la fórmula deseada es:

$$y = 4.000 + 100x \text{ o también } f(x) = 4.000 + 100x$$

Si nos proponemos determinar el salario de Luis Alberto en un mes en el que vendió 112 litros, reemplazamos la letra x por 112 y luego realizamos los cálculos:

$$f(112) = 4.000 + 100 \cdot 112 = 15.200$$

Si Luis Alberto vende 112 litros de aceite su salario es de $15.200 y diremos que la imagen de 112 es 15.200, $f(112) = 15.200$.

En una función, a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

Si nos proponemos determinar cuántos litros debe vender Luis Alberto para que su salario sea de $6.500, reemplazamos la letra y por 6.500 y resolvemos la ecuación:

$6500 = 4000 + 100x$

$6500 - 4000 = 100x$

$2500 = 100x$

$2500 : 100 = x$

$25 = x$

Para que el salario de Luis Alberto sea de $6.500, debe vender 25 litros de aceite.

¿Qué valores toma la variable independiente de acuerdo al enunciado de la situación?

En este caso la variable *x* puede ser 0 o cualquier número mayor que 0, dado que Luis Alberto no vende o vende un número positivo de litros de aceite. Al conjunto de valores que toma la variable independiente lo llamaremos **dominio de la función**.

Por lo tanto $Domf$ [0 ; +∞)

¿Qué valores toma la variable dependiente?

Los valores que toma la variable dependiente son las imágenes de cada uno de los elementos del dominio y al conjunto de todas las imágenes lo llamaremos **conjunto imagen**. En la situación presentada es $Conjunto\mathbf{Im}agenf$ = [4000; +∞).

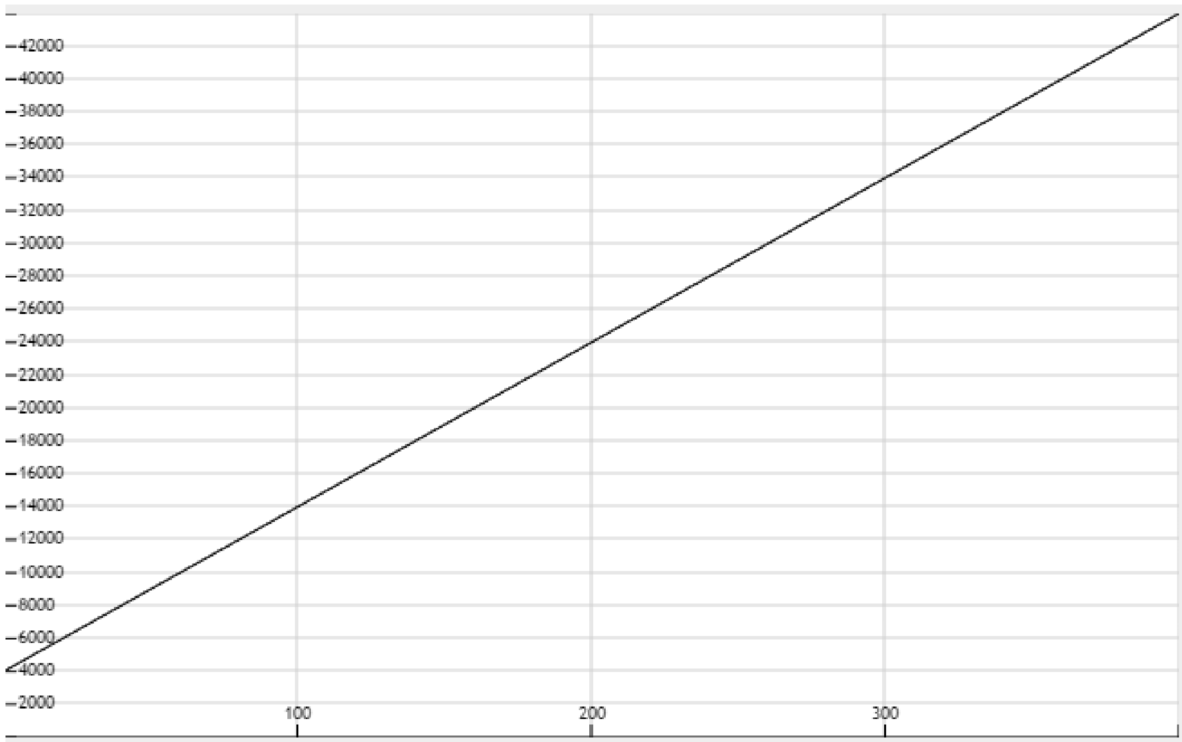
A continuación, la representación gráfica de la función.

Representaremos en un sistema de coordenadas cartesianas y mediante puntos los infinitos pares ordenados (x ; f(x)) determinados por la función. Algunos de ellos son (0 ; 4.000) ; (1 ; 4.100) ; (2 ; 4.200) ; (100 ; 14.000), (122, 5 ; 16.250).

Para ello utilizaremos dos rectas perpendiculares que llamaremos eje. El eje horizontal es el eje de abscisas y el eje vertical es el eje de ordenadas.

Sobre el eje horizontal están representados los valores de la variable *x* y sobre el eje vertical los valores de la variable *y*.

Podemos observar en el gráfico, por ejemplo, que para 0 litros vendidos, el salario es de $4.000; para 100, $14.000; para 200, $24.000 y para 400, $44.000.



El punto (0 ; 4,000) de abscisa 0 y ordenada 4.000 pertenece a la representación gráfica de la función.

Los puntos (50 ; 9.000) , (80,5 ; 12.050), (100 ; 14.000), (200 ; 24.000), (400 ; 44.000) pertenecen al gráfico de la función.

Los puntos (0 ; 10000) ; (150 ; 32000) no pertenecen al gráfico.

Observación

Si Luis Alberto vendiera teléfonos y cobrara un básico de $4.000 más una comisión de $100 por teléfono vendido, la fórmula f (x) = 4000 + 100x también sería válida para determinar su salario en función de las ventas, pero dado que los teléfonos no pueden venderse fraccionados el dominio de la función sería el conjunto de los números enteros mayores o iguales que 0 y la representación gráfica de la función, una sucesión de puntos aislados y no un trazo continuo como en el caso de la venta de aceites.

Videos relacionados	Funciones https://youtu.be/k74Ub6LkjWw	Representación gráfica de una función - Álgebra - Educatina https://youtu.be/bH9W0f1lIsI

Actividad 1

Una empleada de casa particular cobra diariamente un salario que consiste en un viático de $50 más $70 por hora trabajada. Si con la letra x llamamos a la cantidad de horas trabajadas por la empleada y con la letra $y=f(x)$ llamamos al salario a cobrar por la empleada en función de las horas trabajadas:

a) ¿Cuál de las siguientes fórmulas permite determinar el salario de la empleada en función de las horas trabajadas?

$y= f(x) = 50\,x + 70$

$y= f(x) = (50 + 70)\,x$

$y = f(x) = 70\,x + 50$

$y = f(x) = 610$

b) Utilice la fórmula para determinar el salario de la empleada si trabaja 5, 6 o 7 horas.

c) Utilice la fórmula para determinar cuántas horas debe trabajar la empleada para cobrar un salario de $680 o $435.

d) Teniendo en cuenta que la empleada puede trabajar entre 0 y 9 horas por día, según el convenio colectivo de trabado del sector, indique cuál es el dominio y cuál el conjunto imagen de la función f.

e) ¿Cuánto cobra la empleada si trabaja 10 horas?

Orientaciones

La fórmula adecuada es f(x)= 70 x + 50 ya que los $50 son fijos y cobra $70 por hora trabajada.

Para determinar el salario por 5 horas de trabajo reemplazamos la x por 5 :

f(5)= 70 · 5 + 50 = 400, entonces el salario a cobrar por 5 horas de trabajo es $400.

Para determinar la cantidad de horas trabajadas para que la empleada cobre $680 reemplazamos la letra y por 680 y resolvemos la ecuación: 680 = 70 x + 50, entonces para cobrar $680 la empleada debe trabajar 9 horas.

Con las condiciones dadas el dominio de f es [0 ; 9] y el conjunto imagen es

[50 ; 680].

No puede trabajar 10 horas.

Actividad 2

La función g(x) = 100x + 60 permite describir el salario diario de otro empleado en función de las horas trabajadas.

a) Halle $g(5)$.

b) ¿Qué significa $g(5)$ en el contexto de la situación planteada?

c) ¿Cuál es el salario del trabajador si trabaja 9 horas?

d) ¿Cuántas horas debe trabajar el empleado para cobrar $980? ¿Y para cobrar $710?

Orientaciones

$g(5)$ es el salario a cobrar por el empleado si trabaja 5 horas.

Para determinar la cantidad de horas trabajadas para cobrar $710 y $980 procedemos como en el ítem c de la actividad 1.

Actividad 3

El siguiente gráfico representa la temperatura y de una sustancia en cada instante x (en horas) mientras se realizaba un experimento, entre la hora 0 y la hora 3.

a) ¿Qué temperatura tiene la sustancia en el inicio del experimento?

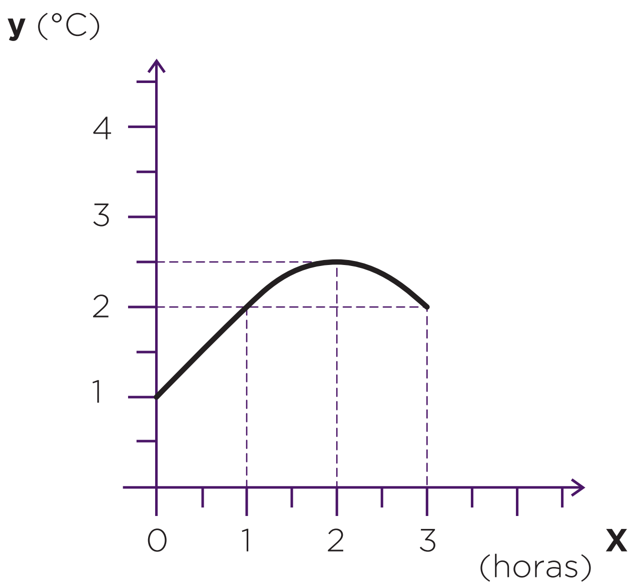
b) ¿Qué temperatura tiene la sustancia a la hora 1? ¿Y a la hora 2,5?

c) ¿Pertenece al gráfico el punto (3 ; 1,5)?

d) ¿Qué significa, con la situación concreta planteada, que el punto (1 ; 2) pertenezca al gráfico?

e) ¿El punto (2 ; 2) pertenece al gráfico? ¿Y el (2 ; 2,5)?

f) Teniendo en cuenta la situación planteada y sin observar el gráfico, ¿es posible que los puntos (3 ; 1,5) y (3 ; 2), los dos, pertenezcan al gráfico?



Orientaciones

La temperatura inicial es 1º C.

La temperatura a la hora 2,5 es 2,25º C.

El punto (3; 1,5) no pertenece al gráfico.

Sin observar el gráfico podemos afirmar que ambos puntos, (3 ; 1,5) y (3 ; 2), no pueden pertenecer al gráfico ya que la sustancia a la hora 3 no puede tener dos temperaturas distintas: 1,5 y 2. Esto ocurre con cualquier otra hora perteneciente al dominio, a una hora determinada no puede haber más de una temperatura y en general en cualquier función a cada elemento del dominio le corresponde una única imagen.

Actividad 4

El gráfico precedente describe las temperaturas de una sustancia durante un experimento.

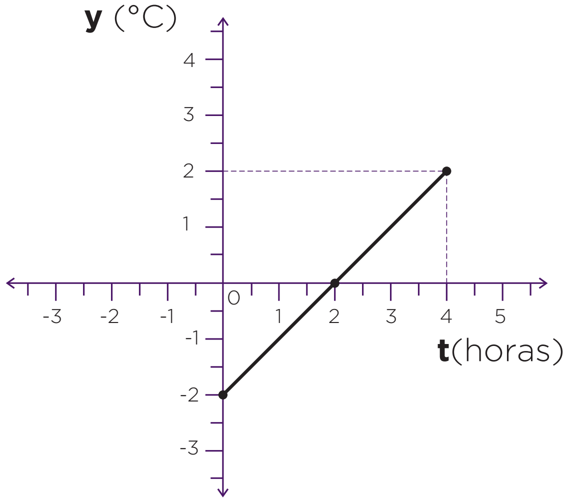
a) ¿Cuál es el dominio de la función representada?

b) ¿Cuál es el conjunto imagen?

c) ¿A qué hora la temperatura de la sustancia fue de 0 ºC?

d) ¿En qué período de tiempo la temperatura de la sustancia se mantuvo por debajo de 0º C?

e) ¿En qué período de tiempo la temperatura de la sustancia fue superior a 0 ºC?



Orientaciones

A partir de la observación del gráfico se puede afirmar que el dominio de la función es [0 ; 4] y que el conjunto imagen es [-2 ; 2], que la temperatura fue de 0º C a la hora 2, que las temperaturas fueron negativas entre la hora 0 y la hora 2, y que las temperaturas fueron positivas entre la hora 2 y la hora 4.

1. Ceros, intervalos de positividad y de negatividad de una función

La temperatura de la sustancia fue de 0° C en t = 2. A este valor de t lo llamamos cero de la función. Gráficamente, es el valor de t en el que la representación gráfica de la función corta al eje x.

En general, un **cero** de una función f es el valor de x en el que el valor de y es cero.

Para buscar los ceros de una función f utilizando su fórmula, debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$.

Para buscar los ceros utilizando la gráfica de la función tenemos que determinar las abscisas de los puntos en los que el gráfico de f corta al eje x.

Al conjunto formado por todos los ceros de la función lo simbolizamos C° .

En este caso, $C^{\circ} = \{ 2 \}$.

A partir de la segunda hora y hasta la cuarta hora la temperatura de la sustancia fue superior a 0° C. A este período de tiempo en el que la temperatura de la sustancia es superior a 0° C lo llamamos **conjunto de positividad** de la función.

En general, llamamos **conjunto de positividad** de una función f, al conjunto de valores de x pertenecientes al dominio de la función cuyas imágenes son positivas.

Para buscar el conjunto de positividad utilizando el gráfico de la función, tenemos que determinar las abscisas de los puntos en los que el gráfico está por encima del eje x.

Al conjunto de positividad de una función lo simbolizamos: C^{+}.

En este caso, el conjunto de positividad es el conjunto de todos los números reales mayores que 2 y menores o iguales que 4 : $C^{+} = (2 ; 4]$

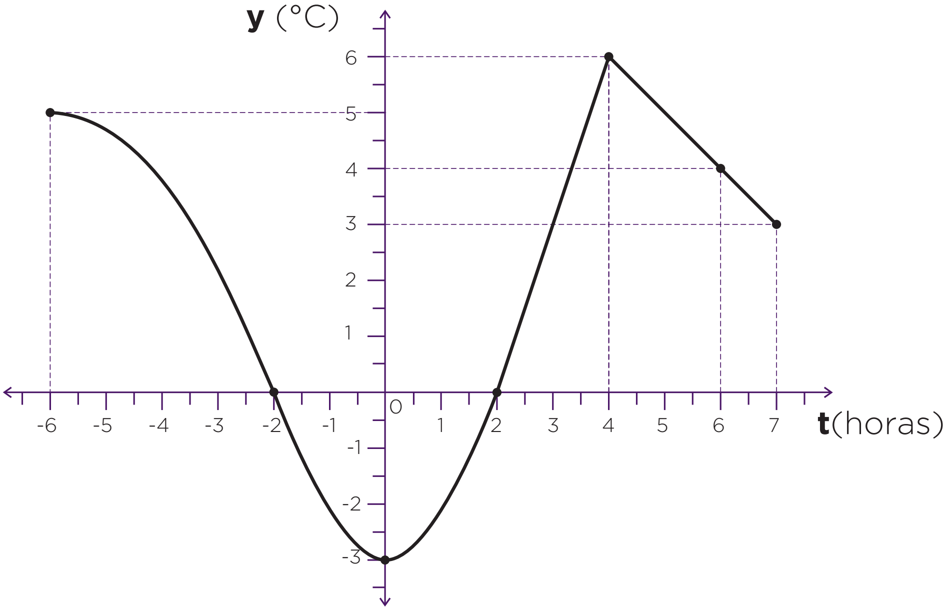
Durante las dos primeras horas la temperatura de la sustancia se mantuvo por debajo de 0° C, es decir, fue negativa. Al período de tiempo en el que la temperatura de la sustancia se mantuvo por debajo de 0° C lo llamamos **conjunto de negatividad** de la función.

En general, llamamos **conjunto de negatividad** de una función *f* al conjunto de valores de x pertenecientes al dominio de la función cuyas imágenes son negativas. Para buscar el conjunto de negatividad de una función, utilizando su gráfico, tenemos que determinar las abscisas de los puntos en los que el gráfico está por debajo del eje *x*.

Al conjunto de negatividad de una función lo simbolizamos: C^-.

En este caso, el conjunto de negatividad es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que 0 y menores que 2 : $C^- = [0 ; 2)$.

Los conjuntos (2 ; 4] y [0 ; 2) son intervalos de números reales que se denominan intervalos semiabiertos o semicerrados.



Responda las siguientes preguntas a partir de la observación del gráfico anterior, que corresponde a la función *T*, que describe la temperatura de una sustancia en el período indicado:

a) ¿Cuál o cuáles son los ceros de la función *T*? Escriba C0.

b) ¿Cuáles son los intervalos de positividad de la función T? Escriba C +.

c) ¿Cuáles son los intervalos de negatividad de la función T? Escriba C –.

d) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento de la función T? Escríbalos.

e) ¿Cuáles son los intervalos de decrecimiento de la función T? Escríbalos.

f) ¿Cuáles son los máximos y mínimos de la función *T*? Escríbalos.

Orientaciones

Los ceros de la función *T* son t = - 2 y t = 2 ya que la temperatura de la sustancia es de 0° C en esos dos instantes. En símbolos: T(-2) = 0 y T(2) = 0. Al conjunto formado por todos los ceros de la función lo escribimos: $C^0 = \{ 2 ; 2 \}$.

Entre los instantes t = -2 y t = 2 la temperatura de la sustancia es menor que cero, por esa razón el conjunto (-2 ; 2) es un intervalo de negatividad de la función *T*. En símbolos: $C^- = (-2 ; 2)$.

Entre t = -6 y t = - 2 la sustancia alcanza temperaturas mayores que cero. Lo mismo ocurre entre t = 2 y t = 7. Por lo tanto, los conjuntos [-6 ; -2) y (2 ; 7] son intervalos de positividad de la función *T*. En símbolos C+=[-6 ; -2) ∪ (2 ; 7].

La temperatura de la sustancia aumenta entre t = 0 y t = 4, por esa razón la función *T* es creciente en el intervalo (0 ; 4). La temperatura de la sustancia disminuye en los demás períodos de análisis. Por lo tanto, la función *T* es decreciente en los intervalos (-6 ; 0) y (4 ; 7).

La sustancia alcanzó su temperatura más baja de 3 °C bajo cero en el instante t = 0. Decimos que la función *T* alcanza un mínimo en t = 0 y que el mínimo valor alcanzado es *T* = -3.

La sustancia alcanzó su temperatura más alta en el instante t = 4 y dicha temperatura fue de 6 °C. Decimos que la función *T* alcanza un máximo en t = 4 y el máximo valor alcanzado es *T* = 6.

Observe el gráfico de la función *T* en el intervalo en el que la función está creciendo y responda las siguientes preguntas:

a) Observando que t = 2 y t = 3 pertenecen a este intervalo, y que la hora 2 es anterior a la hora 3, ¿qué puede decir de la temperatura de la sustancia en la hora 2 respecto de la temperatura de la sustancia en la hora 3?

b) Lea los símbolos y responda: t = 2 y t = 3 pertenecen al intervalo (0 ; 4) , 2 < 3 entonces: ¿cómo son entre sí T (t_1) y T (t_2) ?

c) Si t_1 y t_2 son dos tiempos cualesquiera del intervalo (0 ; 4), de tal manera que $t_1 < t_2$, ¿cómo son entre sí T (t_1) y T (t_2) ?

Observe ahora el gráfico de la función *T* en el intervalo (4 ; 7) y responda las siguientes preguntas:

a) Siendo t = 5 y t = 6 valores que pertenecen a este intervalo, ¿qué puede decir de la temperatura de la sustancia en t = 5 respecto de la temperatura de la sustancia en t = 6?

b) Lea los símbolos y responda: t = 5 y t = 6 pertenecen al intervalo (4 ; 7), 5 < 6 entonces: ¿cómo son entre sí t_1 y t_2 ?

c) Si t_1 y t_2 son dos tiempos cualesquiera del intervalo (4 ; 7), de tal manera que $t_1 < t_2$, ¿cómo son entre sí T (t_1) y T (t_2) ?

¿Qué diría sobre el crecimiento de la función en el intervalo (-2 ; 2)?

2. Función creciente y decreciente

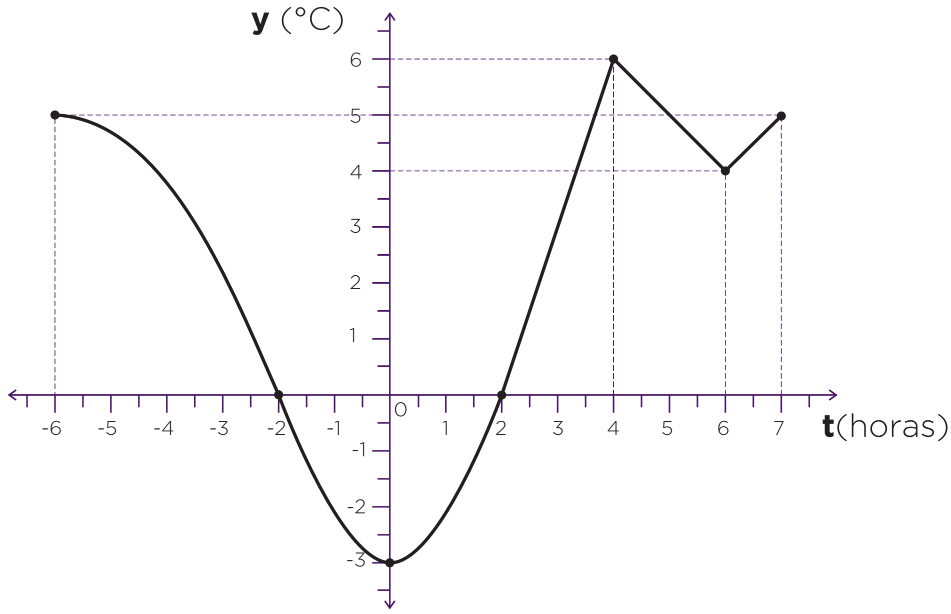
Hemos observado que la temperatura de la sustancia fue creciendo entre la hora 0 y la hora 4, diremos en tal caso que la función es estrictamente creciente en el intervalo (0 ; 4). Si expresamos en símbolos matemáticos lo que ocurre con la función *T* en el intervalo (0 ; 4), resulta que: si t_1 y t_2 son dos tiempos cualesquiera pertenecientes a ese intervalo, de tal manera $t_1 < t_2$ ocurre que T(t_1) < T(t_2) . En general, diremos que una función *f* es estrictamente creciente en un intervalo, si para cualquier x_1 y x_2 pertenecientes al intervalo se verifica que si $x_1 < x_2$ entonces f(x_1) < f(x_2).

Hemos observado que la temperatura de la sustancia fue decreciendo entre la hora 4 y la hora 7, diremos en tal caso que la función es estrictamente decreciente en el intervalo (4 ; 7).

Si expresamos en símbolos matemáticos lo que ocurre con la función *T*, por ejemplo, en el intervalo (4 ; 7), resulta que: si t1 y t2 son dos tiempos cualesquiera de ese intervalo, de tal manera que $t_1 < t_2$ ocurre que $T(t_1) > T(t_2)$. La función *T* es estrictamente decreciente también en el intervalo (-6 ; 0) En general, diremos que una función *f* es estrictamente decreciente en un intervalo, si para cualquier x_1 y x_2 pertenecientes al intervalo se verifica que si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

La función *T* decrece en (- 2 ; 0) y crece en (0 ; 2). En casos como este diremos que la función no crece ni decrece en el intervalo (- 2 ; 2).

El proceso de elaboración de la sustancia puede ser alterado en su última hora con el objetivo de que la temperatura de la misma comience a aumentar en lugar de continuar disminuyendo. La representación gráfica del proceso completo con esta modificación es:



Actividad 5

A partir de la observación del gráfico anterior, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué ocurre con la temperatura de la sustancia en los instantes previos a t = 6?

b) ¿Qué ocurre con la temperatura de la sustancia en los instantes posteriores a t = 6?

c) ¿Cómo es la temperatura de la sustancia en t = 6 respecto de la temperatura de la sustancia en los instantes previos y posteriores a t = 6?

Orientaciones

La temperatura de la sustancia en t = 6 es la más baja entre todas las temperaturas registradas en los instantes previos y posteriores cercanos a t = 6. Si bien la temperatura de la sustancia en este instante no es la más baja de todo el período de elaboración, sí es la temperatura más baja registrada para instantes *t* pertenecientes a un intervalo de valores tomados alrededor de t = 6.

3. Máximos y mínimos

De acuerdo con lo observado sobre la temperatura de la sustancia en t = 6, decimos que la función *T* alcanza un mínimo local o relativo en t = 6.

En general, en una función *f*: A → B / y = f(x) diremos que:

- f(a) es un mínimo local o relativo de la función *f*, o que la función *f* alcanza un mínimo local en *x = a*, si el valor f(a) es menor que los valores f(x) alcanzados para valores de *x* pertenecientes a un intervalo de valores tomados alrededor de x = a. Si además f(a) es menor que f(x) para cualquier *x* perteneciente al dominio de la función, entonces en x = a la función alcanza un mínimo absoluto.
- f(a) es un máximo local o relativo de la función *f*, o que la función *f* alcanza un máximo local en x = a, si el valor f(a) es mayor que los valores f(x) alcanzados para valores de *x* pertenecientes a un intervalo de valores tomados alrededor de x = a. Si además f(a) es mayor que f(x) para cualquier x perteneciente al dominio de la función, entonces en *x = a* la función alcanza un máximo absoluto.

Actividad 6

1. Un tanque, cuya capacidad es de 500 litros, contiene 50 litros de agua. Se abre un grifo que vierte en su interior 4 litros de agua por minuto. Sea **x** el tiempo (en minutos) transcurrido a partir de la apertura del grifo e **y** la cantidad de litros de agua que contiene el tanque.

a) Complete la siguiente tabla y luego grafique los datos de la misma en un sistema de coordenadas cartesianas.

X	Y
5	
10	
	450
	850

b) Halle una fórmula que exprese la relación existente entre las variables **x** e **y**.

c) A partir de la ecuación hallada responda las siguientes preguntas: ¿Cuántos litros de agua habrá en el tanque a los 7 minutos? ¿Al cabo de cuánto tiempo habrá 170 litros? ¿Después de cuánto tiempo el tanque se llena?

d) Determine si los puntos (20 ; 80) y (40 ; 210) pertenecen a la representación gráfica de la función.

2. La ganancia mensual de una inmobiliaria depende de la cantidad de lotes que pueda vender durante un mes. Por mes puede vender hasta 15 lotes y sus gastos son de $128000. Cada lote cuesta $32000.

a) Una de las siguientes fórmulas permite calcular la ganancia g(x) de la inmobiliaria en función de la cantidad x de lotes vendidos. Elija la fórmula correcta.

g(x) = 32000 · x + 128000

g(x) = 128000 - 32000 · x

g(x) = 32000 · x - 128000

b) Utilizando la fórmula que eligió en el ítem 1, defina una función g que describa la situación planteada.

c) Utilizando la función que definió en el ítem 2, calcule g(6), g(0) y g-1 (128000).

d) Interprete las respuestas que dio en el ítem 3. En el contexto de la situación planteada.

e) ¿Cuántos lotes debe vender la inmobiliaria, por lo menos, para no tener pérdidas en un mes?

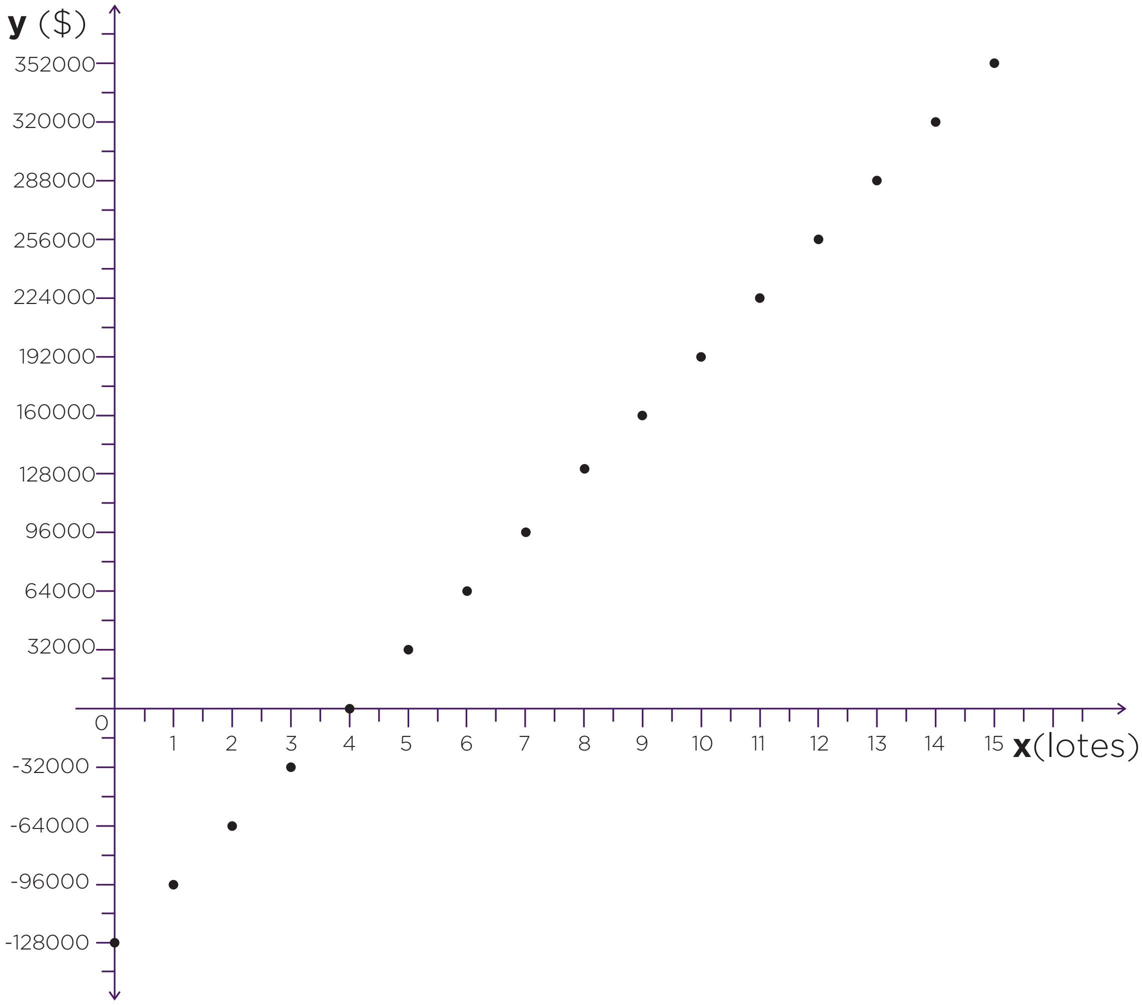
f) ¿Cuál es el cero de la función *g*?

g) Indique el conjunto de positividad de la función *g*.

h) Indique el conjunto de negatividad de la función *g*.

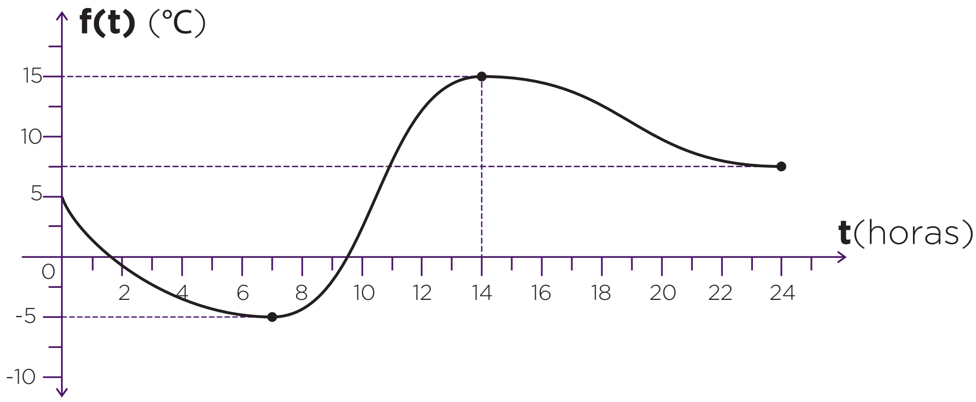
i) Determine el conjunto imagen de *g*.

j) ¿Es correcta la siguiente representación gráfica para la función *g* o habrá que unir los puntos con el trazado de un segmento? Justifique su respuesta.



k) Si su respuesta es afirmativa, ¿por qué piensa usted, le volvemos a preguntar si no lo respondió antes, que en la primera representación gráfica de esta unidad (la del salario de Luis Alberto) los puntos parecen unidos?

3. La función *f* graficada a continuación representa las temperaturas registradas en la ciudad de Mar del Plata durante las 24 horas de un día del mes de mayo:



Responda las siguientes consignas a partir de la observación del gráfico y teniendo en cuenta todo lo realizado en las actividades anteriores:

a) ¿Cuál es el dominio de la función *f* ?

b) Indique el conjunto imagen de la función.

c) ¿Qué temperatura se registró en la ciudad a las 7 horas? ¿Y a las 9?

d) ¿A qué hora se registró una temperatura de 15 °C?

e) ¿En algún momento del día la temperatura fue de 0 °C? Si su respuesta es afirmativa indique dicho/s instante/s.

f) Exprese lo pedido en los ítems 3, 4 y 5 en lenguaje simbólico.

g) Determine los intervalos de positividad y negatividad de la función *f*. Escriba su respuesta en lenguaje simbólico.

h) Exprese lo pedido en el ítem 7 en términos de la situación que representa la función *f* ?

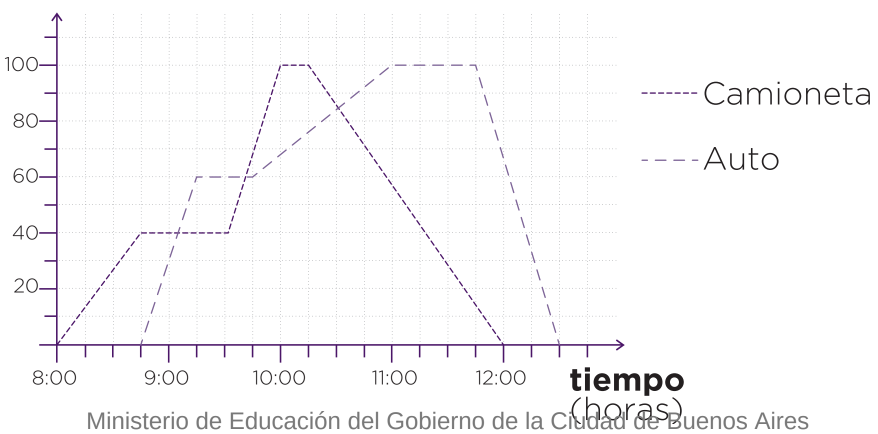
i) ¿Cuál fue la temperatura máxima de la ciudad en ese día? ¿Cuál fue la temperatura mínima? ¿A qué hora se registró cada una de ellas?

j) ¿En qué intervalos de tiempo la temperatura estuvo bajando?

k) ¿En qué intervalos de tiempo la temperatura estuvo subiendo?

l) Escriba las preguntas de los ítems 9, 10 y 11 utilizando lenguaje matemático.

4. Un auto y una camioneta viajan por la ruta 2 desde Buenos Aires hasta Chascomús ida y vuelta. Buenos Aires está a 100km de Chascomús. El gráfico muestra la distancia a Buenos Aires en que se encuentran el auto y la camioneta durante el viaje.



Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) El auto y la camioneta estuvieron juntos en Chascomús durante 1 hora.

b) La camioneta salió más temprano que el auto.

c) A la vuelta, la velocidad de la camioneta fue mayor que la del auto.

d) El auto para a la ida en el kilómetro 60.

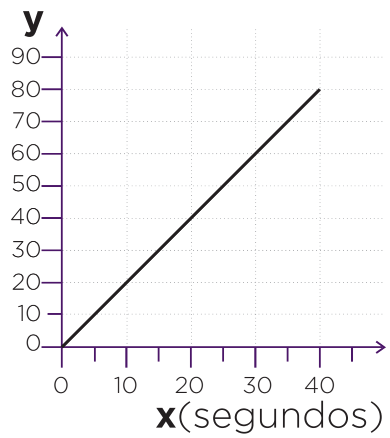
Responda a las siguientes preguntas:

e) ¿A qué distancia de Buenos Aires estaban ambos vehículos a las 10:00 horas?

f) ¿A qué distancia de Chascomús estaban ambos vehículos a las 10:15?

g) ¿Entre qué horas el auto estuvo más cerca de Buenos Aires que la camioneta?

5. El siguiente gráfico describe la posición (y) de un objeto respecto de un punto de referencia, en metros, en función del tiempo (x), en segundos.



Responda a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el dominio de la función?

b) ¿Cuál es el conjunto imagen?

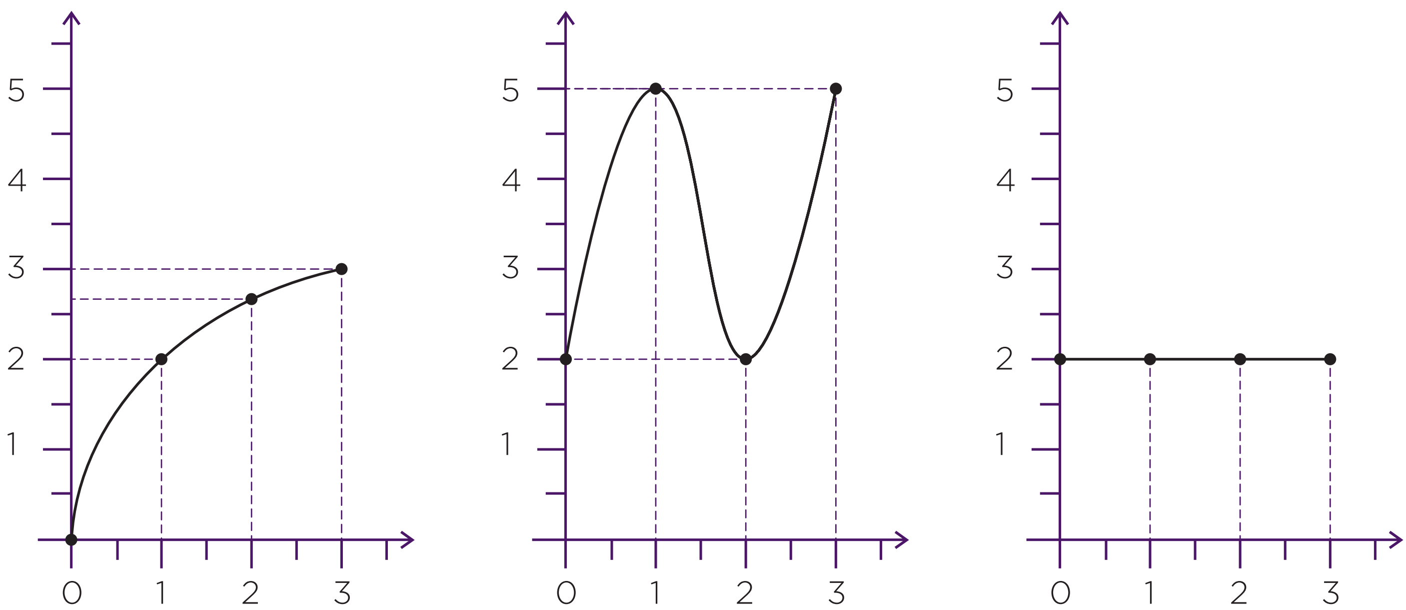
c) ¿El punto (10 ; 40) pertenece al gráfico de la función? ¿Y (30 ; 60)?

d) ¿En qué posición está el objeto a los 10 segundos? ¿Y a los 50 segundos?

e) ¿Cuántos metros avanzó el objeto entre los 10 y los 30 segundos?

6. Diremos que una función es inyectiva si no existen dos elementos del dominio con la misma imagen.

Decida si cada una de las siguientes funciones graficadas son inyectivas o no. Justifique sus respuestas.



Actividades de autoevaluación

1. Dada la función: $f : [0;10] \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 7x - 1$, solo una de las siguientes afirmaciones es correcta. ¿Cuál es?

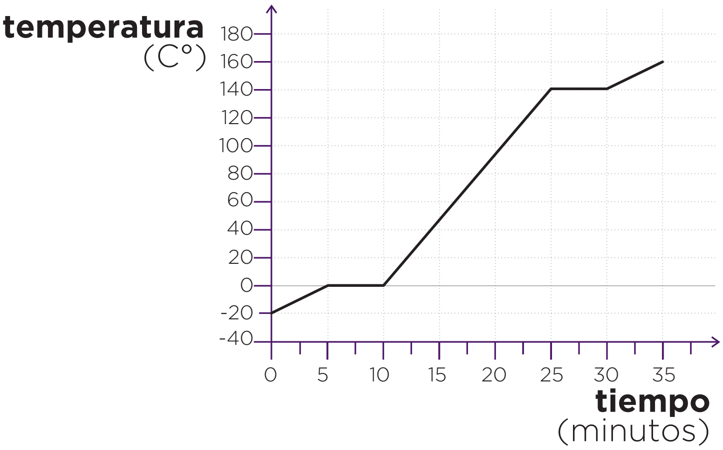
a) f (0) = 0

b) f (5) = 35

c) f (2) = 13

d) f (0,5) = 3

2. Teniendo en cuenta la información proporcionada por el gráfico, indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:



a) La temperatura de la sustancia en el momento inicial fue de 0 ˚C.

b) La temperatura de la sustancia a los 25 minutos fue de 140 ˚C.

c) A los 15 minutos la temperatura de la sustancia fue de 60 ˚C.

d) La sustancia nunca alcanzó temperaturas negativas.

3. Indique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: «Una función *f* alcanza un máximo absoluto en $x = 3$ y $f(3) = 7$, entonces $f(x) \leq 7$ para cualquier x que pertenezca al dominio de *f* ».

a) Verdadera.

b) Falsa.

4. El peso (en kilogramos) de un objeto en función de su volumen (en metros cúbicos) viene dado por la fórmula $p = 32 \cdot 16^{v}$, donde *p* representa el peso y *v* el volumen. Indique cuál es el volumen del objeto si el peso del mismo es de 32.768 kilogramos.

a) 2,5 metros cúbicos.

b) 16 metros cúbicos.

c) 512 metros cúbicos.

d) 128 metros cúbicos.

5. Solo uno de los siguientes puntos pertenece al gráfico de la función cuya fórmula es $y = 2x + 11$. Indique cuál es:

a) (2 ; 11)

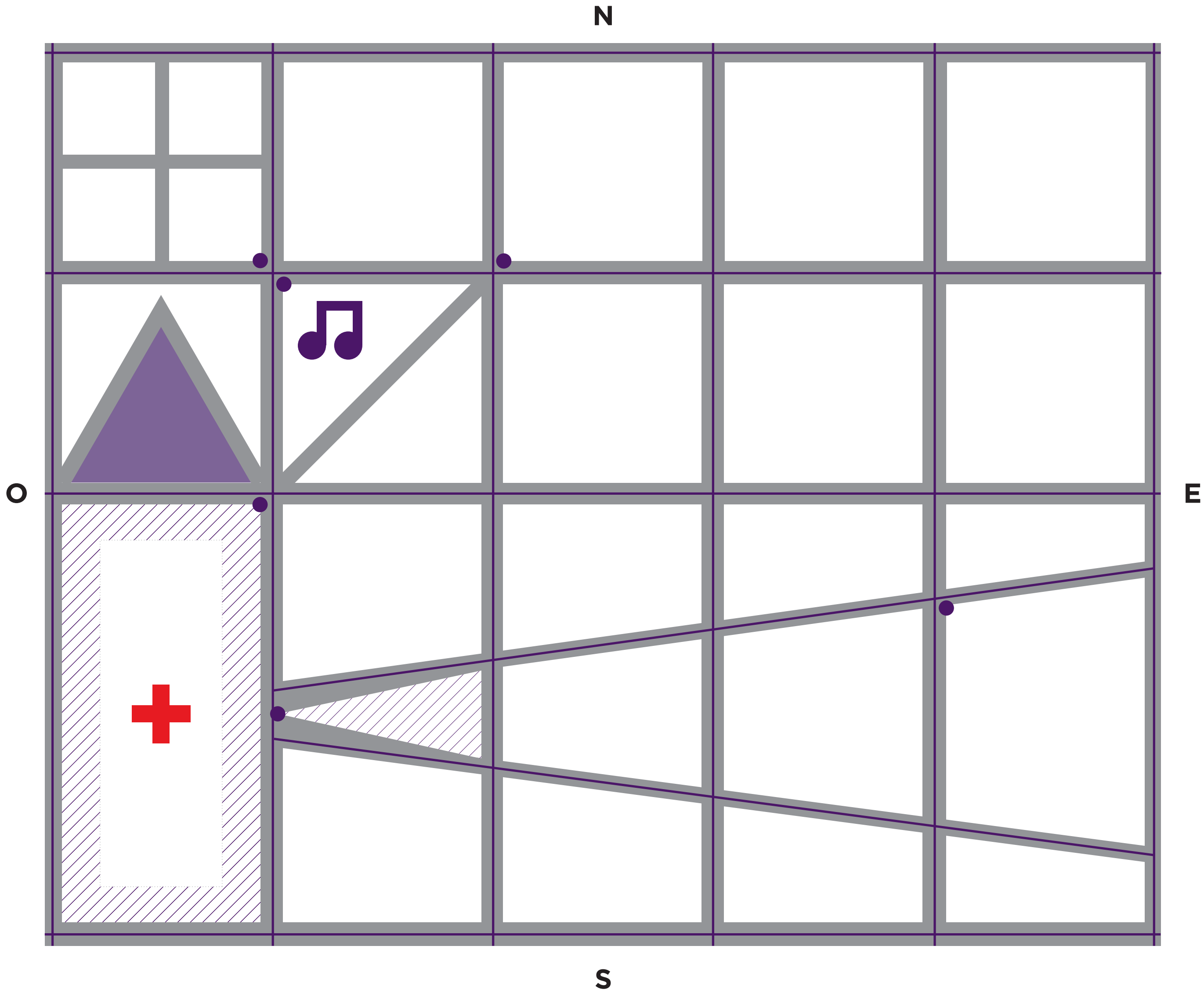
b) (0 ; 2)

c) (3 ; 17)

d) (5 ; 11)

UNIDAD 6: Geometría

Thiago y Sergio son arquitectos y les fue encargada la tarea de construir espacios verdes, remodelar algunos edificios públicos y señalizar las calles y avenidas en un barrio de su ciudad. En el siguiente plano está representada la zona a reciclar. En él se indican las dos diagonales, calles y avenidas de la zona. La esquina conocida con el nombre de **El Punto**, nacimiento de las dos diagonales y algunos lugares en los que realizarán tareas:



La zona esta delimitada por las calles 4 y 9 (que recorren la ciudad de Norte a Sur) y las avenidas 50 y 80 (que están orientadas de Este a Oeste). Los sectores del plano rayados corresponden a plazas o zonas a parquizar.

En primer lugar le proponemos ubicarse en el plano:

¿Qué número lleva cada una de las avenidas y de las calles representadas en el plano? Numere cada una de ellas teniendo en cuenta las numeraciones de las calles y avenidas que delimitan la zona.

¿Entre qué calles se encuentra el conservatorio de música? ¿Y el hospital? ¿Cuál es la esquina conocida como **El Punto**? ¿Dónde se encuentran las plazas y las zonas a parquizar?

¿Cómo resulta ser una avenida respecto de otra? ¿Y una calle respecto de otra calle? ¿Cómo son entre sí las calles y las avenidas? Las diagonales, ¿cortan a las calles del mismo modo que lo hacen las avenidas?

1. Elementos de geometría

Al responder las preguntas anteriores usted habrá utilizado el lenguaje con el que habitualmente se maneja a la hora de interpretar los datos de un plano en su vida cotidiana. Posiblemente las palabras que utilizó coinciden con algunos términos que también utiliza la Geometría.

Por ejemplo, el punto de encuentro de las diagonales nos puede dar una idea sobre a qué llamamos **punto** en Geometría. El punto carece de dimensión y lo identificamos con letras mayúsculas. Por ejemplo:

P • que leemos «punto P»

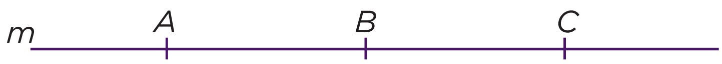
La idea de **recta** puede verse en las calles, avenidas y diagonales de la zona, siempre que se las piense como prolongaciones infinitas de las mismas. Las rectas no tienen comienzo ni fin. Por esa razón, cuando trazamos una recta solo podemos dibujar una parte de ella. Para indicar en forma simbólica a las rectas utilizamos letras minúsculas. Por ejemplo: que leemos «recta r»

Podemos pensar a las diagonales como **semirrectas**. Una semirrecta es una parte de la recta, que tiene principio pero no tiene fin. Las dos diagonales nacen o tienen su punto de origen en **El Punto** y se dirigen hacia el Este. En términos matemáticos, para nombrar las semirrectas indicamos el punto en el que tienen origen y un punto cualquiera por donde pasen. Por ejemplo, si sobre la recta m, señalamos los puntos P y E:

queda determinada la semirrecta de origen P que pasa por E que escribimos en forma simbólica como $\overrightarrow{PE}$.

Cualquier punto de una recta determina dos semirrectas con el mismo origen y direcciones contrarias que se llaman semirrectas opuestas. En el siguiente gráfico $\overrightarrow{PE}$ y $\overrightarrow{PO}$ son semirrectas opuestas.

En el plano solo está representada una parte de cada recta. Por ejemplo, la Avenida 60 solo está representada entre las calles 4 y 9. A esta porción de recta, delimitada por dos puntos, la llamamos **segmento**. Para nombrar segmentos indicamos los puntos que lo delimitan, a los que llamamos extremos. Por ejemplo, sobre la recta m hemos indicado tres puntos, A, B y C:



Al trozo de recta delimitado por los puntos A y B lo llamamos segmento $\overline{AB}$ y lo indicamos $\overline{AB}$ o $\overline{BA}$ indistintamente. El segmento con extremos en los puntos B y C se indica $\overline{BC}$ o $\overline{CB}$. Dos segmentos que tienen un único extremo común se llaman segmentos consecutivos. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son segmentos consecutivos.

A la representación del esquema de la zona lo llamamos **plano**. En términos matemáticos, un plano es una superficie de dos dimensiones infinitas (largo y ancho). Para nombrar los planos utilizamos letras griegas. Por ejemplo:

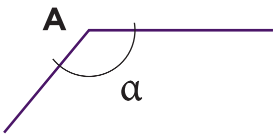
Al que nombramos plano α (alfa).

En un plano, una recta determina dos **semiplanos**.

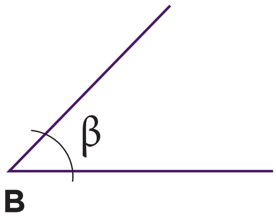
Dos rectas pertenecientes a un mismo plano son **secantes** si tienen un único punto en común.

Dos rectas pertenecientes a un mismo plano son **paralelas** si no son secantes. Por ejemplo, en el plano, las avenidas son paralelas entre sí y las calles, a su vez, son paralelas entre sí.

Dos semirrectas con el mismo origen, llamado vértice, determinan dos regiones de un plano a los que llamaremos ángulos. Las semirrectas son los lados del ángulo. Los nombraremos utilizando una letra griega o la letra del punto que resulta ser el vértice. Por ejemplo:



Ángulo $\hat{\mathbf{A}}$ o $\hat{\alpha}$



Ángulo $\hat{\mathbf{B}}$ o $\hat{\beta}$

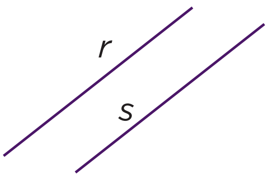
Al nombrar estos dos ángulos hemos usado las letras griegas $\boldsymbol{\alpha}$ (alfa) y $\boldsymbol{\beta}$ (beta).

También usaremos $\boldsymbol{\delta}$ (delta), $\boldsymbol{\pi}$ (pi), $\boldsymbol{\gamma}$ (gamma) y $\boldsymbol{\theta}$ (tita).

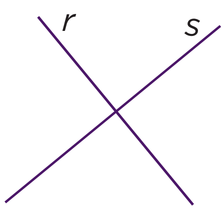
Observemos que el ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ es de mayor amplitud que el ángulo $\boldsymbol{\beta}$.

Diremos que dos rectas son perpendiculares si son secantes y los cuatro ángulos determinados por ellas son de igual amplitud. A cada uno de estos ángulos se los llama ángulo recto.

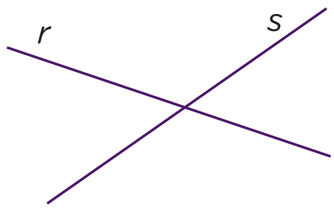
Relaciones entre rectas



Paralelas



Perpendiculares



Secantes

La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento, trazada por su punto medio.

La **bisectriz** de un ángulo es la semirrecta con origen en su vértice y que determina dos ángulos de igual amplitud.

Actividad 1

1. Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Dados dos puntos distintos A y B de un plano, existe una única recta del mismo a la cual ellos pertenecen.

b) Un punto A cualquiera pertenece a infinitas rectas.

c) Dada un recta *r* cualquiera, existe una única recta paralela a ella.

d) Dadas dos rectas paralelas *r* y *s*, y una recta *t* secante a *s*, entonces *s* también es secante a *r*.

2. En el plano de la zona representada encuentre y nombre entre las calles, avenidas o diagonales:

a) Dos segmentos consecutivos.

b) Dos segmentos no consecutivos.

c) Dos semirrectas opuestas.

3. Marque en su cuaderno tres puntos no alineados **A**, **B** y **C** y trace todas las rectas que queden determinadas por estos tres puntos tomándolos de a dos. Nombre a esas rectas.

4. Sobre una recta *m*, marque los puntos **P**, **Q**, **R** y **S** en ese orden. Escriba todos los segmentos distintos que quedaron determinados por esos cuatro puntos (son seis). Determine también un par de semirrectas opuestas.

1.1. El grado sexagesimal

Un grado sexagesimal es la amplitud del ángulo que resulta ser la noventava parte de un ángulo recto y lo escribiremos 1º. De esta manera la medida de un ángulo recto es 90º.

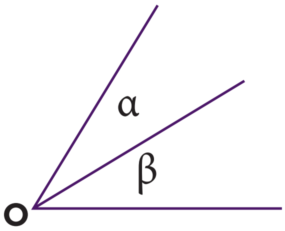
Medimos la amplitud de un ángulo en grados sexagesimales y los clasificamos de acuerdo con esta medida. Si la amplitud del ángulo es menor de 90º, diremos que el ángulo es agudo. Si la amplitud del ángulo es mayor de 90º, lo llamaremos obtuso. Un ángulo es llano si sus lados son semirrectas opuestas y su amplitud es entonces 180º.

Para medir ángulos que no corresponden a un número entero de grados se utilizan el minuto (´), que es la sesentava parte de un grado, y el segundo (´´) que es la sesentava parte de un minuto.

recto agudo llano obtuso

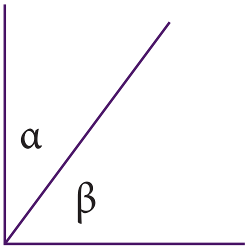
Videos relacionados		
Ángulos I - Trigonometría - Educatina *https://youtu.be/s9mXpX6X-yY*	Ángulos II - Trigonometría - Educatina *https://youtu.be/soLazkDMM8Y*	Ángulos IV - Trigonometría - Educatina *https://youtu.be/MDWVl7eWMuA*

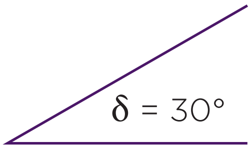
Si dos ángulos tienen un lado en común los llamamos ángulos consecutivos. Por ejemplo:

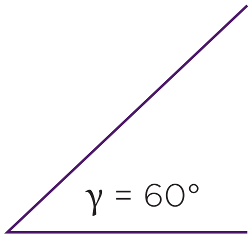


α y β son consecutivos

Dos **ángulos** son **complementarios** cuando sus amplitudes suman 90°. En ese caso, cada uno de ellos es el complemento del otro. Por ejemplo:



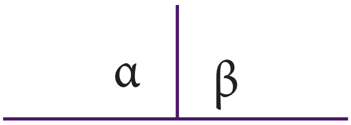


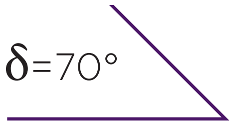


α y β son complementarios y consecutivos

δ y γ son complementarios no consecutivos

Dos **ángulos** son **suplementarios** cuando la suma de sus amplitudes es igual a un llano, es decir 180°. En ese caso decimos que uno es el suplemento del otro.





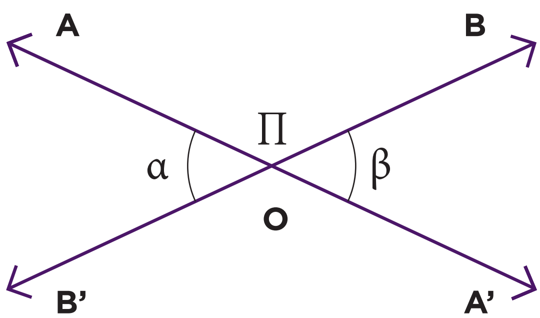
α y β son suplementarios y consecutivos

δ y γ son suplementarios no consecutivos

Dos ángulos son **adyacentes** si son suplementarios y consecutivos. Por ejemplo:

α y γ son adyacentes

Dos ángulos son **opuestos por el vértice** si los lados de uno de ellos son semirrectas opuestas a los lados del otro y tienen el vértice común.



α y β son opuestos por el vértice.

Observemos que:

$\alpha + \pi = 180º$ y $\beta + \pi = 180º$

Entonces:

$\alpha + \pi = \beta + \pi$

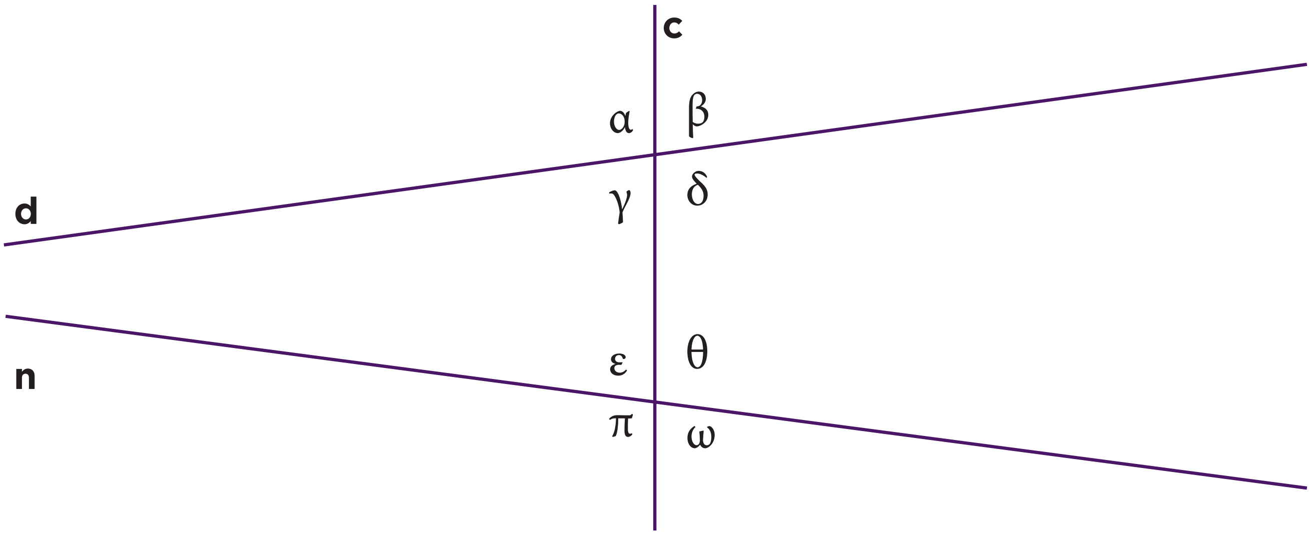
$\alpha = \beta + \pi - \pi$

$\alpha = \beta$

Las medidas de los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Si dos ángulos tienen la misma medida diremos que son **congruentes**.

1.2. Ángulos determinados por dos rectas cortadas por una transversal

Para analizar otras relaciones entre ángulos vamos a volver al plano de Thiago y Sergio. Consideraremos tres rectas: la recta **d** que identifica a la diagonal 1, la recta **n** que identifica a la diagonal 2 y la recta **c** que identifica a la Calle 7. Reproducimos a continuación la parte del plano correspondiente a las calles nombradas simplificándolo de modo que sea más sencillo visualizar las relaciones que queremos observar:



A los ángulos α, β, π y ω los llamaremos **externos**, porque se ubican en forma externa respecto de las rectas **d** y **n**. A los ángulos γ, δ, ε y θ, los llamaremos **internos** porque se ubican en forma interna respecto de esas mismas rectas.

A los pares de ángulos α y ε, β y θ, γ y π, δ y ω los llamaremos **correspondientes**. Los ángulos correspondientes se ubican en un mismo semiplano respecto de la recta **c**, a la que llamamos **transversal**, uno de ellos es interno y el otro externo.

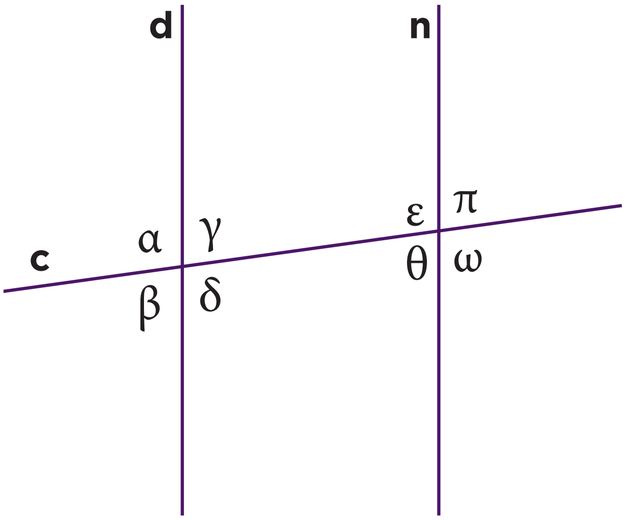
A los pares de ángulos α y ω, β y π los llamamos **ángulos alternos externos**. Alternos por estar ubicados en distintos semiplanos planos respecto de la recta **c** y externos por lo que ya dijimos.

A los pares de ángulos γ y θ, δ y ε los llamamos **ángulos alternos internos**. Alternos por estar ubicados en distintos semiplanos planos respecto de la **transversal** e internos por lo que ya dijimos.

A los pares de ángulos α y π, β y ω los llamamos **ángulos conjugados externos**. Así como a los pares de ángulos γ y ε, δ y θ los llamamos **ángulos conjugados internos**. Los ángulos conjugados se ubican en un mismo semiplano respecto de la transversal **c**, y son ambos internos o ambos externos.

A continuación analizaremos qué ocurre con estos pares de ángulos cuando las rectas cortadas por la transversal **c** son paralelas entre sí.

Por ejemplo, si la recta **d** identificara a la calle 6, la recta **n** identificara a la calle 7 y la recta **c** fuera la diagonal 1 (las calles son paralelas entre sí) como reproducimos en el siguiente dibujo:



Podemos observar que:

Los ángulos alternos externos entre paralelas son congruentes.

Los ángulos alternos internos entre paralelas son congruentes.

Los ángulos correspondientes entre paralelas son congruentes.

Los ángulos conjugados externos entre paralelas son suplementarios.

Los ángulos conjugados internos entre paralelas son suplementarios.

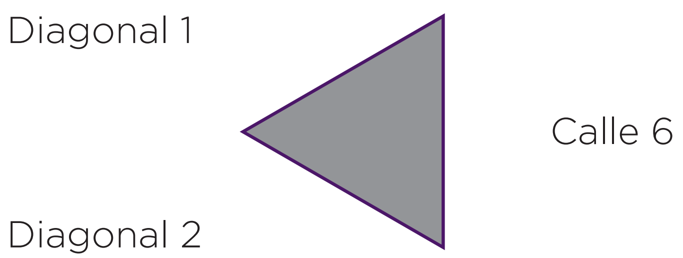
Actividad 2

Indique la medida de cada uno de los ángulos nombrados en la representación gráfica anterior sabiendo uno de los ángulos obtusos mide 113º.

2. Triángulos

A continuación retomaremos el trabajo con el plano de la zona a reciclar para continuar analizando otras propiedades geométricas.

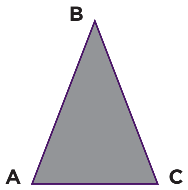
Entre las obras se planea parquizar la Plazoleta del Sol, ubicada en frente del hospital. Reproducimos su esquema a continuación:



¿Cuántas esquinas tiene la plazoleta? ¿Cuántas calles la rodean? ¿Conoce el nombre de la figura geométrica que representa a la plazoleta? Imagine que usted quiere ir caminar desde **El Punto** de encuentro hasta la esquina de calle 6 y diagonal 2, ¿cuál sería el camino más largo? ¿Y el más corto?

A la figura geométrica que representa a la plazoleta la llamamos triángulo porque tiene tres lados y tres ángulos interiores.

Si identificamos con letras mayúsculas a los puntos correspondientes a las esquinas de la plazoleta, nos quedaría:



Entonces:

Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ son los lados del triángulo.

Los puntos A, B y C son sus vértices.

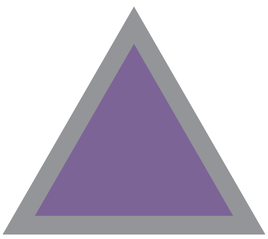
Los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son los ángulos interiores del triángulo.

Los triángulos se clasifican según sus lados en:

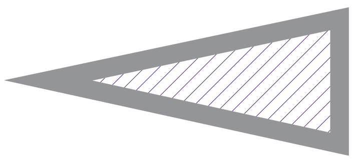
- **Equiláteros**: las medidas de sus tres lados son iguales.
- **Isóseles**: las medidas de dos de sus lados son iguales.
- **Escaleno**: las medidas de sus tres lados son diferentes.

En el plano de la zona podemos observar un ejemplo de cada uno de ellos. Por ejemplo, el terreno que se encuentra en la manzana lateral al hospital, tiene sus tres lados iguales (verifíquelo con regla o compás). La plazoleta del Sol tiene dos lados iguales y en el triángulo correspondiente al predio de la fábrica los tres lados tienen diferentes medidas.

A continuación reproducimos cada uno de ellos:



Terreno

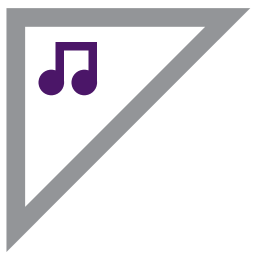


Plaza del Sol

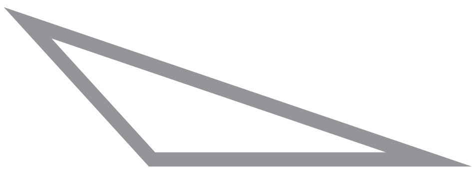
Fábrica

Según sus ángulos, los triángulos se clasifican en:

- **Acutángulos**: tienen los tres ángulos interiores agudos. Cualquiera de los tres triángulos anteriores es un ejemplo de triángulo acutángulo.
- **Rectángulos**: tienen un ángulo recto. Por ejemplo el triángulo correspondiente al terreno del conservatorio de música:



- **Obtusángulos:** tienen un ángulo interior obtuso. No aparece ninguno en el plano. Un ejemplo:

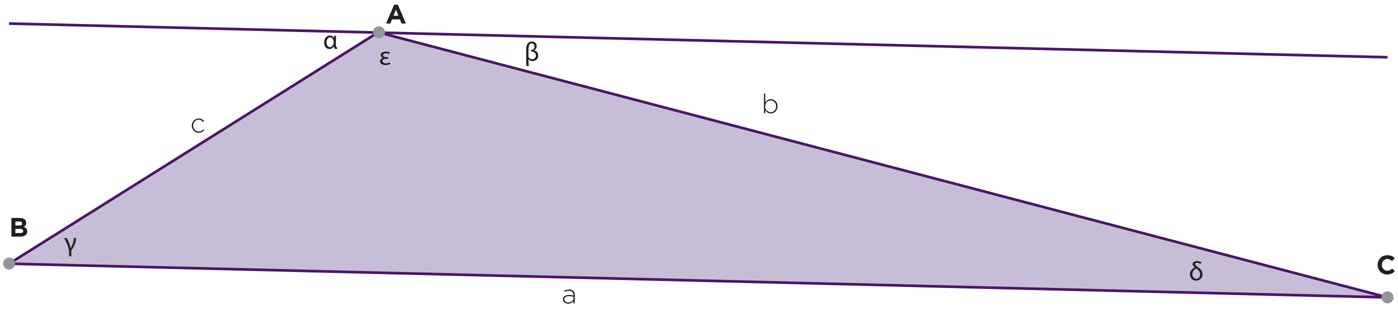


Retomando la pregunta sobre cuál sería el camino más corto para dirigirse desde el punto de encuentro hasta la esquina de calle 6 y diagonal 2, podemos decir que es el que se recorre caminando por la diagonal 2. Si camina por la diagonal 1 y luego por la calle 6, el recorrido resultaría más largo. Podríamos pensar lo mismo para cualquiera de los lados del triángulo. Generalizando lo observado decimos que:

En todo triángulo la medida de un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. Esta propiedad se llama propiedad triangular.

Además de la propiedad de los lados de un triángulo, que acabamos de enunciar, existen otras propiedades que involucran a sus ángulos.

Dado el triángulo de vértices A, B y C, trazamos la recta *d*, por el punto A y paralela al lado *a*.



$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son ángulos consecutivos que determinan un ángulo llano, entonces la suma de sus medidas es igual a 180º: $\hat{\boldsymbol{\alpha}} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \hat{\boldsymbol{\beta}} = 180º$ (1)

Por otro lado $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\gamma}$ son ángulos alternos internos entre paralelas y entonces sus medidas son iguales, entonces: $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}$ (2).

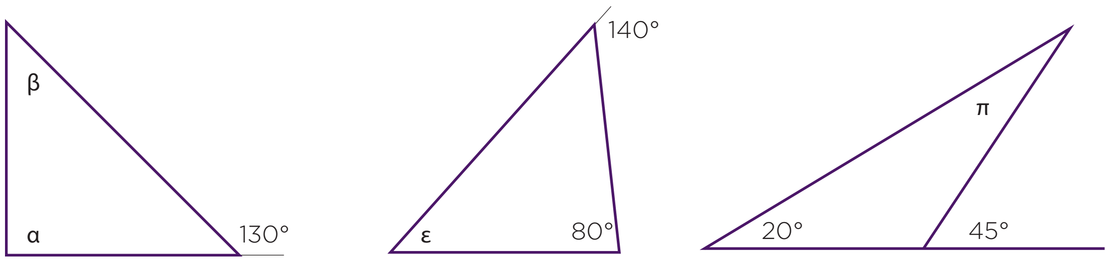
También son ángulos alternos internos entre paralelas $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\delta}$, entonces: $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\delta}}$ (3).

De las igualdades (2) y (3) se desprende que podemos reemplazar en la igualdad (1) $\boldsymbol{\alpha}$ por $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\beta}$ por $\boldsymbol{\delta}$ y nos queda la igualdad $\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\delta} = 180º$, que podemos enunciar de la siguiente manera:

En todo triángulo la suma de las medidas de sus ángulos interiores es igual a 180º.

Actividad 3

Utilizando la información sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo y todo lo que sabe sobre ángulos y triángulos, calcule la medida de los ángulos indicados en cada uno de los triángulos dibujados a continuación. Complete también el resultado de la suma indicada debajo de cada uno de ellos:



$\alpha + \beta =$ ______ $\varepsilon + 80° =$ ______ $20° + \pi =$ ______

2.1. Ángulos exteriores de un triángulo

En cada uno de los triángulos anteriores, hemos dibujado un ángulo adyacente a alguno de los ángulos interiores. Llamamos ángulo exterior a cualquiera de ellos. Es decir que, un ángulo exterior a una figura, es un ángulo adyacente a cualquiera de sus ángulos interiores. En cada vértice es posible determinar dos ángulos exteriores congruentes entre sí. ¿Por qué podemos afirmar que son congruentes?

Al calcular las sumas pedidas debajo de cada triángulo, usted habrá observado que el resultado de cada una de ellas coincide con la medida del ángulo exterior señalado.

Podemos enunciar la siguiente propiedad relativa a los ángulos exteriores e interiores de un triángulo:

En todo triángulo la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes con él.

Actividad 4

1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Un triángulo puede tener dos ángulos rectos.

b) Si un triángulo tiene un ángulo obtuso, los otros dos son agudos.

c) Los ángulos exteriores a un triángulo son siempre obtusos.

d) Un ángulo exterior puede ser igual al ángulo interior correspondiente.

e) Los dos ángulos exteriores correspondientes a un mismo ángulo interior son opuestos por el vértice.

f) Un triángulo rectángulo puede ser isósceles.

g) En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos son complementarios.

2. Se quiere construir un triángulo con tres varillas de madera de las siguientes longitudes: 10 cm; 15 cm; 25 cm. ¿Es posible hacerlo?

3. Se quiere construir un triángulo cuyos ángulos interiores midan: 45º, 39º y 67º, ¿es posible hacerlo?

4. En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos interiores mide 56º, ¿cuánto mide el otro?

5. Calcule la medida de todos los ángulos interiores y exteriores de un triángulo ABC sabiendo que el ángulo A mide 67º 34' y que el ángulo C mide 23º 14'.

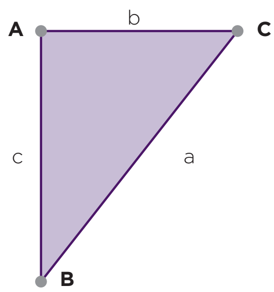
6. En un triángulo ABC el ángulo B mide el doble que el ángulo A y el ángulo C mide el triple que el ángulo A.

a) Determine la medida de los tres ángulos interiores del triángulo.

b) Clasifique al triángulo ABC según la medida de sus ángulos.

2.2. Teorema de Pitágoras

El siguiente es un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos interiores, el del vértice es un ángulo recto.



En un triángulo rectángulo al lado opuesto al ángulo recto lo denominaremos hipotenusa y a los otros dos lados, catetos.

En todo triángulo rectángulo se verifica que el cuadrado de la medida de la hipitenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

Para el triángulo dibujado vale: $a^2 = b^2 + c^2$.

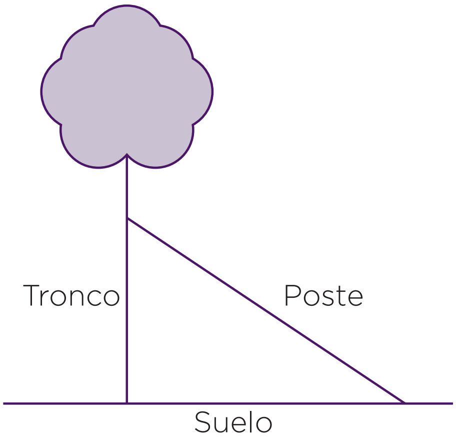
Videos relacionados	Teorema de Pitágoras - Trigonometría - Educatina *https://youtu.be/HPjn-TLBIWM*

Actividad 5

1. Se quiere sostener un árbol debilitado por una tormenta. Para eso, se apoya un poste en el tronco del árbol a una altura de 2 m. Dicho poste se apoya en el suelo a 3 m de la base del tronco y se logra que el mismo quede perpendicular al suelo.

a) Complete el siguiente diagrama con las longitudes dadas.

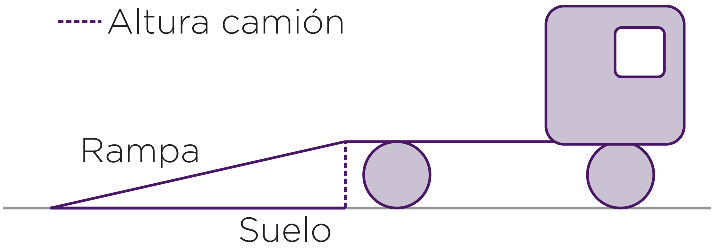
b) Calcule la longitud del poste que sostiene al árbol.



2. Para cargar y descargar un camión de transporte de automóviles se usa una rampa que mide 4 m de largo. Sobre el suelo (horizontal) la distancia que hay entre el punto de apoyo de la rampa y la proyección vertical del extremo del camión es de 3,9 metros.

a) Ubique las longitudes dadas en el siguiente diagrama.

b) Calcule la altura del camión.



3. Cuadriláteros

Diremos que un **polígono** es una figura plana encerrada por una sucesión finita de segmentos consecutivos. A cada uno de dichos los llamamos lados. El triángulo es un polígono de tres lados

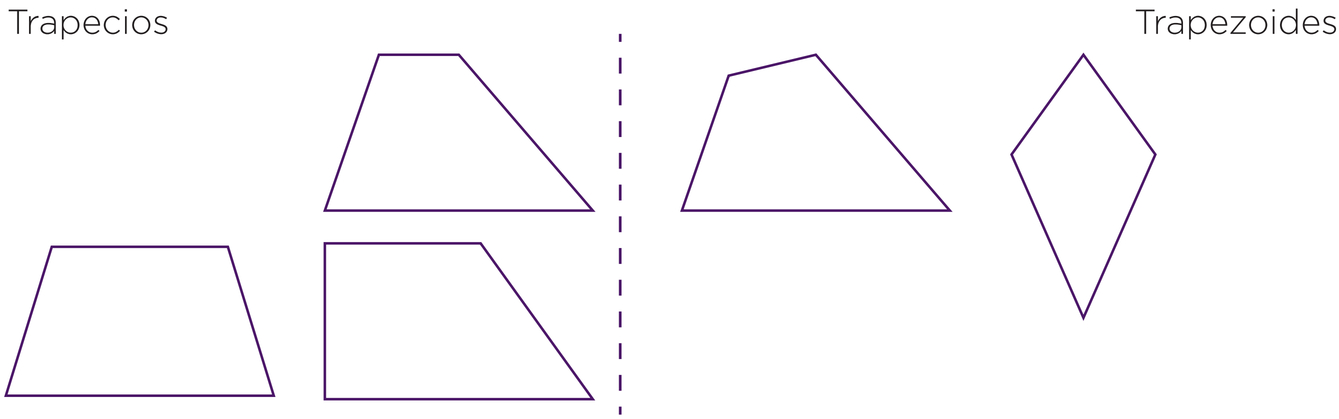
Observe las figuras representadas a continuación. Todas tienen cuatro lados. Por esa razón se llaman **cuadriláteros**. Entre ellos hay tres grupos:

Los cuadriláteros que tienen dos pares de lados opuestos paralelos, llamados **paralelogramos.**

Paralelogramos

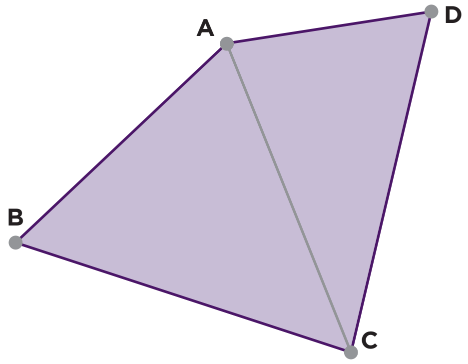
Los cuadriláteros que tienen un solo par de lados opuestos paralelos, llamados **trapecios.**

Los cuadriláteros que no tienen ningún par de lados opuestos paralelos, llamados **trapezoides**.



- Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes (de igual medida) y los ángulos opuestos son congruentes.
- Los paralelogramos que tienen todos sus ángulos congruentes se llaman **rectángulos**.
- Los paralelogramos que tienen todos sus lados congruentes se llaman **rombos**.
- Los paralelogramos que tienen todos sus ángulos congruentes y todos sus lados congruentes se llaman **cuadrados**.
- Los trapecios que tienen un par de lados congruentes se llaman **trapecios isósceles**.
- Los trapezoides que tienen dos pares de lados consecutivos congruentes se llaman **romboides**.

3.1. Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero

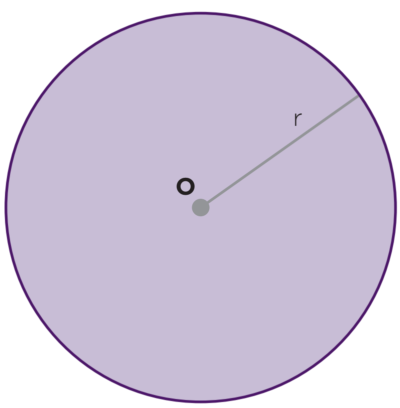


Dado un cuadrilátero cualquiera, tracemos una de sus diagonales. Una diagonal es un segmento que tiene por extremos dos vértices consecutivos.

El cuadrilátero ABCD está constituido por la unión de los triángulos ABC y ACD. La suma de las medidas de los ángulos interiores de cada triángulo es igual a 180º, entonces la suma de las medidas de los ángulos interiores del cuadrilátero es 360º.

4. Circunferencia y círculo

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una misma distancia de un punto que se llama **centro**. El segmento con extremos en el centro y en cualquier punto de la circunferencia se llama **radio**.



La circunferencia de **centro O** y **radio r** es el conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia a O es igual a r.

Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos del plano que están a menor o igual distancia del centro que la medida del radio.

El círculo de centro O y radio r es el conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia a O es menor o igual a r.

Actividad 6

1. En el paralelogramo ABCD, el ángulo D mide 85º. ¿Cuánto miden los demás ángulos del paralelogramo?

2. En el paralelogramo ABCD, el ángulo D = x + 30º y el ángulo B = 2x - 45º. Teniendo en cuenta las propiedades de los ángulos interiores de un paralelogramo, plantee y resuelva una ecuación que le permita determinar la medida de los ángulos interiores del paralelogramo ABCD. Determine la medida de cada uno de ellos.

3. Dibuje un polígono de cinco lados. Determine el resultado de la suma de las medidas de todos los ángulos interiores de un pentágono (polígono de cinco lados). ¿Y para un hexágono (seis lados)?. Escriba una fórmula que permita determinar la suma de las medidas de los ángulos interiores de polígono de ***n*** lados.

4. Dibuje dos circunferencias con el mismo centro y diferentes radios.

5. Dibuje, si es posible, dos circunferencias que se corten en dos puntos.

6. Dibuje, si es posible, dos circunferencias que se corten en un punto.

Actividades de autoevaluación

1. Indique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: «Dada una recta ***r*** y un punto P que no pertenece a la misma, existe infinitas paralela a ***r*** que pasan por ***P***».

a) Verdadera.

b) Falsa.

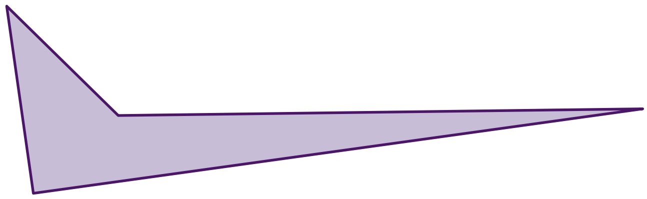
2. En un triángulo dos de sus ángulos interiores miden 40° y 71°, ¿cuánto mide el ángulo restante?

a) 31º b) 80º c) 71º d) 69º

3. En un triángulo rectángulo las medidas de sus catetos son 18 metros y 24 metros, respectivamente. Entonces la medida de la hipotenusa es:

a) 21 metros b) 30 metros c) 42 metros d) 144 metros

4. Se dice que una figura es cóncava si existe un par de puntos interiores que determinan un segmento que no queda completamente incluido en el interior de la figura. Si la figura no es cóncava se dice que es **convexa**.



Indique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: «La figura precedente es cóncava».

5. Indique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: «En un círculo de centro O y radio 7, existen puntos cuya distancia entre ellos es igual a 14».

UNIDAD 7: Las magnitudes y su medición. SIMELA

Si presta atención a un día cualquiera de su vida notará que usted utiliza varias magnitudes permanentemente: tiempo, temperatura, peso, capacidad, longitud, superficie, volumen, velocidad, etc. Al levantarse, generalmente escucha la hora y la temperatura en la radio o en la televisión. El recorrido que debe hacer para llegar a su trabajo o la cantidad de soga necesaria para tender la ropa son ejemplos de cantidades de la magnitud longitud. Si va al mercado tiene que considerar el peso de la mercadería o la cantidad de líquido que tiene una botella. Al evaluar un terreno para construir una casa o al considerar la superficie de pared a empapelar, por ejemplo, entra en contacto con la magnitud superficie.

Usted se maneja con cantidades de estas magnitudes medidas en diferentes unidades. Muchas de las unidades le son muy conocidas y usted las utiliza cotidianamente. Por ejemplo, mide el tiempo en horas, minutos y segundos; la temperatura en grados centígrados; la longitud de la soga en metros o centímetros; la distancia al trabajo en cuadras o kilómetros; el peso de la mercadería en gramos o kilogramos; la capacidad de la botella en litros o mililitros la superficie del terreno o de la pared en metros cuadrados. Si bien las nombradas no son las únicas unidades de medición existentes, ni tampoco son universales, son las que se usan más habitualmente en nuestro país.

En esta unidad entraremos en contacto con las magnitudes a través de la estimación, la comparación y la medición de cantidades de algunas de ellas. Trabajaremos con las formas de medir, con las unidades utilizadas para hacerlo y las equivalencias entre unas y otras.

Actividad 1

Le proponemos comenzar a hacer algunos acuerdos resolviendo la siguiente situación:

Parte A

Guillermo y Ricardo están acampando. Necesitan saber cuánta soga deben conseguir para colgarla entre dos árboles que están cerca de donde ubicaron sus carpas. No disponen de instrumentos de medición como podría ser una cinta métrica, una regla u otro elemento de los que usted conoce.

¿Cómo podrían hacer Guillermo y Ricardo para saber cuál es la distancia entre los dos árboles? Imagínese en esa situación y piense cómo intentaría resolverla antes de continuar con su lectura.

Parte B

Como posible solución al problema que se les plantea, Guillermo decide contar cuántos pasos hay entre los 2 árboles. Camina desde un árbol al otro y cuenta 15 pasos. Para estar más seguro, vuelve a caminar entre los 2 árboles y cuenta 16 pasos.

¿Qué pudo haber provocado que la cantidad de pasos que cuenta Guillermo en cada ocasión sea diferente?

Para evitar el inconveniente, Guillermo decide caminar entre los dos árboles poniendo un pie a continuación del otro (como haciendo «pan y queso»). Así cuenta 55 pies.
Para no correr el riesgo de quedarse corto con la soga le pidió a Ricardo que hiciera lo mismo: que midiera la longitud entre un árbol y otro poniendo un pie a continuación de otro. Su amigo lo hace y cuenta 56 pies.

¿Qué pudo haber provocado la diferencia en la cantidad de pies contada por cada amigo?

Teniendo en cuenta las dificultades que han tenido los dos acampantes, si usted estuviera en esa situación, ¿cómo haría para saber cuál es la distancia entre los dos árboles? (recuerde que no tiene instrumentos de medición).

Orientaciones

Los dos amigos necesitan hacer la medición de una longitud. Al hacerlo están comparando esa longitud con una unidad. Las unidades utilizadas por Guillermo y Ricardo son sus «pasos» o sus «pies».

En la primera medición, Guillermo compara la distancia entre los dos árboles con la unidad «paso de Guillermo». Pero esta unidad no es confiable porque en la segunda medición, la unidad «paso de Guillermo» resulta distinta a la primera oportunidad porque la cantidad de pasos es mayor. Seguramente los pasos resultaron más cortos. Es difícil controlar la medida de nuestros pasos de modo que no se produzca ninguna variación de uno a otro.

En las otras mediciones, las unidades son el «pie de Guillermo» o el «pie de Ricardo». Pero estas unidades dependen del tamaño del pie de cada uno, la unidad no es universal. Además, para comprar la soga, necesariamente debería ir la persona que realizó la medición (o mandar su zapato) para que el ferretero pudiera saber el tamaño de la unidad considerada en la medición. Es decir, se trata de una unidad que no puede ser utilizada por cualquier persona. A esta altura ya se habrá dado cuenta de la poca practicidad de las unidades «paso de Guillermo» o «pie de Guillermo».

Para poder efectuar una medición confiable y que pueda ser utilizada por cualquier persona, debe elegirse una unidad que no dependa de quién mida y que pueda utilizarse en forma independiente de la persona que efectúa la medición. En otras palabras, la unidad de medición debe poder ser utilizada y entendida por cualquier persona de la misma manera.

Por ejemplo, en el caso de los acampantes, la unidad de medición podría ser un palo que se encuentre en el campo. Así medirían cuántas unidades palo hay entre los árboles. Sabiendo esa medida, alguno de ellos u otra persona podría ir con el palo a la ferretería y comprar tantos palos de soga como hayan contado entre los dos árboles.

1. Primeras unidades de medición

Algo similar a lo pensado con esta situación ocurrió con las mediciones en la historia de la humanidad. Inicialmente, el hombre utilizó su propio cuerpo para medir longitudes. Su pie, su mano, su pulgar, dieron origen a unidades como pie, palmo y la pulgada, respectivamente. En un principio las utilizó de la misma forma que lo hicieron Guillermo y Ricardo. Es decir, cada persona tenía su propia unidad de medición que dependía del tamaño de su pie, de su mano o de su pulgar. Las unidades eran arbitrarias y eso generó más de un problema a la hora de resolver cuestiones vinculadas a la economía o la división de tierras. A través del tiempo este tipo de unidades se fueron unificando y generalizando, creándose así los primeros sistemas de medición para las diferentes magnitudes.

En los primeros sistemas de medición de longitudes, las medidas básicas estaban referidas al cuerpo humano. En algunos países todavía se siguen utilizando estas unidades. Usted, posiblemente, habrá escuchado alguna vez una longitud expresada en pies o en pulgadas. Si bien en nuestro país el sistema de medición de longitudes adoptado no utiliza unidades referidas al cuerpo humano, en algunas ocasiones nos encontramos con longitudes expresadas en estas unidades. Por ejemplo, los televisores y los monitores de computadoras indican su medida en pulgadas, también los caños y los tornillos se miden en esta unidad. En nuestro país las unidades de medición de longitudes más habituales son el kilómetro, el metro, el centímetro y el milímetro. Para que pueda hacer una traducción de un sistema de medición a otro le mostramos su equivalencia:

1 pie es equivalente a 30,48 cm aproximadamente.

1 pulgada (1'') es equivalente a 2,54 cm aproximadamente.

Actividad 2

Teniendo en cuenta las equivalencias anteriores:

1. ¿De cuántas pulgadas es su televisor?

El televisor se mide en diagonal desde una esquina de la pantalla hasta la esquina opuesta.

a) ¿A qué medida de la pantalla del televisor nos referimos cuando decimos, por ejemplo, que el televisor es de 21''?

b) ¿A cuántos centímetros equivalen las 21'' de la pantalla del televisor?

2. Un tornillo de 3 pulgadas, ¿cuántos centímetros mide?

3. Las heladeras suelen indicar sus medidas en pies:

a) ¿Sabe cuántos pies mide la heladera de su casa?

b) ¿A cuántos centímetros equivale esta medida?

c) ¿No recuerda cuántos pies tiene su heladera? Vamos a calcularlo: a ojo: ¿cuántos centímetros estima que mide su heladera? Convierta la medida estimada a pies.

d) ¿Tiene un metro a mano? Mida la altura de su heladera para cotejar su estimación. ¿Qué tal anduvo?

Actividad 3

Analizaremos algunas otras cuestiones relativas a la medición de magnitudes a través de las siguientes consignas:

1. Suponga que usted tiene una varilla sin graduar, que tiene una longitud aproximada a la de sus piernas. Con ella debe realizar las siguientes mediciones:

- El espesor de un libro.
- La distancia que hay entre su casa y la sede de Adultos 2000.
- La longitud de una curva en una ruta.

a) ¿Cómo haría la medición en cada caso?

b) ¿Le resulta cómoda la varilla para efectuar cualquiera de las tres mediciones?

c) ¿Con qué dificultades se podría encontrar en cada caso?

2. Usted cuenta con una balanza y pesas de 100 gramos. Con ellas debe averiguar:

- El peso de un libro.
- El peso de una píldora.
- El peso de una persona.

a) ¿Cómo haría las mediciones pedidas?

b) ¿Con qué dificultades se podría encontrar en cada caso?

3. Utilizando un vaso usted debe medir:

- La capacidad de un botellón.
- La capacidad de un frasco de jarabe.
- La capacidad del tanque de agua de su casa.

a) ¿Cómo haría las mediciones pedidas?

b) ¿Con qué dificultades se podría encontrar en cada caso?

Orientaciones

En el caso de la varilla, el objeto elegido para medir resulta inapropiado para realizar las tres mediciones pedidas: puede ser muy largo para obtener la medida del espesor del libro, muy corto para medir la distancia desde la sede hasta su casa y rígido para medir una curva. Para medir el espesor del libro resultaría más apropiado utilizar una unidad más pequeña y para medir la distancia de su casa a la sede de Adultos 2000 sería conveniente utilizar una unidad más grande que la varilla. En la medición de la longitud de la curva, el instrumento varilla no resulta apropiado ya que su rigidez no nos permitiría lograr una buena medición. Resultaría más adecuado utilizar una cuerda como intermediaria para la medición. Es decir, medir la curva con la cuerda y luego medir la cuerda con la varilla para indicar cuántas unidades varilla mide la curva. El manejo incorrecto de los instrumentos o la elección inadecuada de las unidades de medición provoca errores de medición que, según el caso, pueden ser graves.

En el caso de la balanza y las pesas de 100g también nos encontramos con algunas complicaciones. Si el peso del libro fuera un múltiplo de 100, no tendríamos inconvenientes en hallar su peso exacto. Como esto difícilmente ocurra, contando solo con pesas de 100g, estaríamos realizando una medición poco precisa que podría involucrar un error de medición importante. Si bien en el caso del peso del libro, un error de casi 100g posiblemente no provocaría serios inconvenientes, hay situaciones en las que un error como este podría ser realmente grave. Por ejemplo: un error de casi 100g al calcular la dosis de una droga para un enfermo puede ser fatal.

Algo similar ocurre para la medición del peso de la píldora. Seguramente su peso es inferior a 100g, con lo cual no podremos realizar la medición deseada en forma directa. Pesar a una persona utilizando solo pesas de 100g resulta engorroso. Nos convendría tener pesas más grandes de modo que se agilice la medición. Nuevamente, en estos tres casos se reitera la importancia de la elección adecuada del instrumento y de la unidad de medición.

Lo que hemos pensado para las magnitudes longitud y peso también es válido para las tres mediciones de capacidad pedidas y para el resto de las magnitudes que usted maneja cotidianamente.

2. Sistemas de medición. SIMELA

De acuerdo con lo trabajado hasta este momento, podemos decir que **medir** es realizar una comparación con un objeto que se toma como unidad, asignando un número a una cantidad de magnitud.

Si bien la elección de la unidad es arbitraria, para que la misma sea apropiada debe haber una adecuación entre lo que se desea medir y el objeto elegido como unidad. Si esta unidad fuera única, como en el caso de la varilla o de la pesa de 100g, resultaría complejo medir cualquier objeto con ella. Por eso resulta necesario utilizar varias unidades de medida para cada magnitud. Esto es lo que llamamos un sistema de medición. Los primeros sistemas de medición fueron irregulares porque la relación entre una unidad y las otras del sistema no era siempre la misma. La necesidad de facilitar y agilizar los cálculos hizo que a lo largo de la historia de la humanidad se fueran construyendo sistemas de medición regulares. Es decir, sistemas en los que cada unidad resultara un múltiplo o submúltiplo de la unidad elegida como unidad fundamental. Las comunicaciones y el comercio entre distintas poblaciones hicieron que, además de un sistema regular, fuera necesario organizar sistemas de medidas previamente acordados y comunes a los diferentes países. Estos sistemas de medida reciben el nombre de legales ya que su uso se ha proclamado a través de leyes. Nuestro sistema legal es el llamado **Sistema Métrico Legal Argentino (SIMELA)** y es común al de la mayoría de los países del mundo a excepción de los países anglosajones. Dado que nuestro sistema de numeración es de base diez, para facilitar los cálculos se eligió un sistema de medición en el que las unidades son múltiplos y submúltiplos de 10. Por esa razón también recibe el nombre de **sistema de medición decimal.**

Para la **medición de longitudes** el SIMELA adoptó como unidad fundamental el metro (m). Otras unidades de medición de longitudes, que seguramente usted conoce y maneja, son el kilómetro (km), el centímetro (cm), el milímetro (mm), aunque no son las únicas unidades del sistema. Como ya vimos en la actividad anterior, muchas veces la unidad fundamental no es la más conveniente para realizar determinadas mediciones. Por ejemplo, para medir el espesor del libro convendría usar algún submúltiplo del metro, como podrían ser el centímetro o el milímetro (unidades más pequeñas que el metro) en lugar de la unidad fundamental. Para medir la distancia entre su casa y la sede de Adultos 2000 sería conveniente usar un múltiplo del metro, como por ejemplo, el kilómetro.

Para la **medición del área de superficies** se adoptó como unidad fundamental el metro cuadrado (m^2). Otras unidades de medición de superficies son el kilómetro cuadrado (km^2) y el centímetro cuadrado (cm^2).

Para la **medición de volúmenes** se adoptó como unidad fundamental el metro cúbico (m^3). Algunas otras unidades de medición de volúmenes son el centímetro cúbico (cm^3) y el milímetro cúbico (mm^3).

Para la **medición de pesos** la unidad fundamental es el gramo (g), y usted seguramente también conoce la tonelada (t), el kilogramo (kg) y el miligramo (mg).

Para la **medición de capacidades** la unidad fundamental es el litro (l).

Otras unidades que posiblemente haya escuchado alguna vez pero que no pertenecen al SIMELA son, por ejemplo, las millas o las yardas (para medir longitudes); el acre (para medir superficies); onzas o libras (para medir pesos); galones y pinta (para medir capacidades); grados Fahrenheit (para medir temperaturas). En el campo también se suele escuchar la utilización de unidades como la legua para medir longitudes y la hectárea para medir superficies (una superficie equivalente a la que ocupa un cuadrado de 100m x 100m).

Actividad 4

1. Indique, en cada uno de los siguientes casos, qué unidad del SIMELA le resulta más conveniente para medir:

- La distancia entre la ciudad de La Plata y la ciudad de Córdoba. ____________
- El ancho de un aula de la sede de Adultos 2000. ____________
- Una cuadra. ____________
- El largo del cuerpo de un insecto. ____________
- La distancia de la Tierra a la Luna. ____________
- La superficie de una provincia. ____________
- La superficie de un terreno para construir una casa. ____________
- La superficie de un campo. ____________
- La superficie de un aula de la sede de Adultos 2000. ____________
- La superficie de una hoja de esta guía de estudio. ____________
- La superficie de un cuadradito de una hoja cuadriculada. ____________
- El volumen de una caja. ____________
- El volumen de un frasco de remedio. ____________
- El volumen de un pozo cavado para hacer una pileta de natación. ____________
- La capacidad de una botella de vino. ____________
- La capacidad de un frasco de remedio. ____________
- La cantidad de agua en una pileta de natación. ____________
- El peso de una persona. ____________
- El peso de un camión.____________
- El peso de una lata de picadillo de carne. ____________
- El peso de un insecto. ____________

2. Teniendo en cuenta que: si dividimos al metro en 100 partes iguales, cada una de esas partes es un centímetro y que si dividimos al centímetro en 10 partes iguales, cada una de esas partes es un milímetro, responda:

a) ¿Se puede colocar una puerta de 105cm de ancho en una abertura de 1m de ancho?

b) Dos cuadernos tienen 8mm y 1cm de grosor, respectivamente. ¿Cuál de los dos es más grueso?

c) ¿Cuántos milímetros hay en un metro?

d) ¿Qué fracción de 1m es 1cm?

e) ¿Qué fracción de 1cm es 1mm?

f) ¿Qué fracción de 1m es 1mm?

Orientaciones

Para poder establecer las comparaciones solicitadas en el ítem 2 es necesario que unifiquemos las unidades: si la puerta mide 105cm de ancho, esta medida es equivalente a 1,05m y entonces la puerta es más grande que la abertura. En el caso de los cuadernos, como 1cm es equivalente a 10mm, el cuaderno de 1cm es más grueso que el otro.

Para averiguar cuántos milímetros hay en un metro podemos pensar que si en un metro hay 100cm y en un centímetro hay 10mm, entonces en un metro hay 100 x 10mm, 1000mm. Para expresar lo anterior decimos que un metro es equivalente a 100cm o que un metro es equivalente a 1000mm. Utilizando las equivalencias dadas resulta:

$1cm = \frac{1}{100}m$; $1cm = 0{,}01m$

$1mm = \frac{1}{10}cm$; $1mm = 0{,}1cm$

$1mm = \frac{1}{1000}m$; $1mm = 0{,}001m$

2.1 Unidades de longitud. Múltiplos y submúltiplos del metro

Para la medición de longitudes, la unidad fundamental adoptada es el metro pero en algunas ocasiones resulta necesario utilizar unidades más pequeñas que el metro. Estas unidades son submúltiplos del metro. El milímetro y el centímetro son submúltiplos del metro. Otro submúltiplo del metro es el decímetro (dm). Un metro es equivalente a 10dm, por lo tanto, 1dm es la décima parte del metro.

Otras unidades del sistema de medición decimal de longitudes son el decámetro, el hectómetro y el kilómetro. Estas unidades son múltiplos del metro. Un decámetro (dam) es equivalente a 10m, 1 hectómetro (hm) es equivalente a 100m y 1 kilómetro (km) es equivalente a 1000m.

La siguiente tabla describe las equivalencias de las distintas unidades de longitud con el metro:

Múltiplos			Unidad Principal	Submúltiplos		
1 km	1hm	1 dam	**1m**	1dm	1cm	1mm
1000m	100m	10m		0,1m	0,01m	0,001m

Actividad 5

Responda las siguientes preguntas teniendo en cuenta las equivalencias anteriores:

1. ¿Cuántos centímetros hay en un decímetro?

2. ¿Cuántos decímetros hay en un hectómetro? ¿Qué cuenta tiene que hacer para obtener lo pedido?

3. ¿Cuántos centímetros hay en un kilómetro? ¿Qué cuenta tiene que hacer para obtener esta equivalencia?

4. ¿Cuántos decámetros hay en un kilómetro? ¿Qué cuenta tiene que hacer para obtener esta equivalencia?

5. En general, cuando queremos expresar una longitud en una unidad más pequeña que aquella en la que está expresada, ¿qué debemos hacer para realizar la conversión?

Orientaciones

Veamos qué cuentas realizamos para encontrar algunas de las equivalencias pedidas: para obtener la cantidad de decímetros que hay en un hectómetro multiplicamos a la cantidad de hectómetros por 1000 ya que en un hectómetro hay 100m y en 1m hay 10dm.

1 hm = 1000 dm

Si queremos saber a cuántos decímetros son equivalentes 5 hm, multiplicamos por 1000 a la cantidad de hectómetros:

5 hm = 5 x 1000 dm = 5000 dm

Para calcular la cantidad de centímetros que hay en 1km multiplicamos a la cantidad de kilómetros por 100000 ya que en 1km hay 1000m y en 1m hay 100cm:

1km = 100000cm

Actividad 6

1. ¿Qué fracción de un hectómetro es un metro? ¿Qué cuenta hace para obtener la cantidad de hectómetros que equivalen a un metro?

2. ¿Cuántos metros hay en un centímetro? ¿Qué cuenta tiene que hacer para obtener el equivalente de un centímetro en metros?

3. ¿Qué fracción de un hectómetro es un centímetro? ¿Qué cuenta hace para obtener la cantidad de hectómetros que equivalen a un centímetro?

4. Si ahora le pedimos, por ejemplo, que indique qué fracción de un kilómetro es un centímetro, ¿qué cuenta hace para calcular a cuántos kilómetros equivale un centímetro?

Orientaciones

En los cuatro casos anteriores usted buscó equivalencias de cantidades de longitud expresando la cantidad en una unidad más grande que la unidad primitiva. Ya vimos anteriormente que para saber cuántos hectómetros hay en un metro dividimos al metro por 100. A su vez, para saber cuántos metros hay en un centímetro dividimos al centímetro por 100. Por lo tanto para saber cuántos hectómetros hay en un centímetro dividimos al centímetro por 10000.

1cm = 0,0001 hm

Para obtener cuántos kilómetros hay en un centímetro, dividimos por 100000.

1cm = 0,00001km

Actividad 7

1. Responda:

a) ¿Cuántos metros hay en 8km?

b) ¿Cuántos decámetros hay en 3,2m?

c) ¿Cuántos milímetros hay en 8,25cm?

d) ¿A cuántos metros equivalen 8,25cm?

2. Identifique algún objeto que mida aproximadamente 2dam y otro que mida 1dm.

3. Una mesa rectangular mide 60cm de ancho y 140cm de largo. ¿Cuáles son las dimensiones de la mesa expresadas en metros?

4. Para cercar un terreno se necesitan 190m de alambrado. En una ferretería venden rollos de alambre de un decámetro cada uno, ¿cuántos rollos se necesitan?

5. Se necesita enmarcar una lámina cuadrada de 32,5cm de lado. ¿Cuánto cobran por el trabajo si el metro de marco elegido cuesta $15 colocado?

6. Una habitación mide 3,4m de largo por 2,8m de ancho. Se necesita colocar un zócalo en todo su perímetro que solo está interrumpido por una puerta que tiene 0,75m de ancho.

a) ¿Cuántos metros de zócalo se necesitan comprar?

b) Si el zócalo viene en listones de 50cm de longitud, ¿cuántos listones son necesarios para realizar el trabajo?

Orientaciones

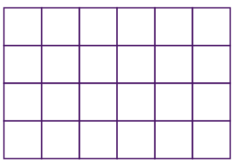
Para resolver situaciones como las planteadas es necesario unificar las unidades que se dan como datos. Por ejemplo, en el caso del terreno, la longitud a alambrar está expresada en metros, pero los rollos de alambre se venden por decámetros. Para poder calcular cuántos rollos se necesitan tenemos que calcular a cuántos decámetros equivalen los 190m del borde del terreno, o bien, a cuántos metros equivale el decámetro que trae cada rollo de alambre.

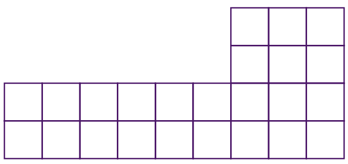
La longitud a alambrar es la longitud del contorno del terreno. Llamamos perímetro a esta longitud. En ocasiones habrá escuchado hablar del alambrado perimetral o del cerco perimetral.

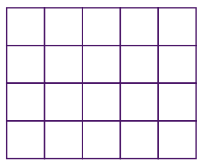
Actividad 8

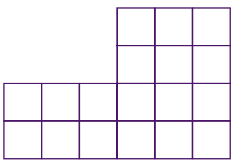
Le proponemos analizar una nueva situación en la que continuaremos trabajando con la noción de perímetro y entraremos en contacto con una nueva magnitud: **el área de una superficie (o superficie).**

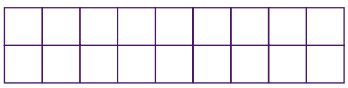
Una inmobiliaria pone a la venta una serie de terrenos. Para promocionar las ventas, la inmobiliaria edita un folleto en el que muestra la forma y dimensiones de cada uno de los terrenos. A continuación le mostramos los dibujos que aparecen en el folleto:

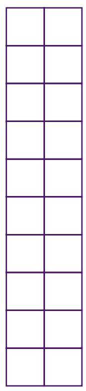

Terreno 1


Terreno 2


Terreno 3


Terreno 4


Terreno 5


Terreno 6

Cada uno de los terrenos representados son superficies distintas y a cada uno de ellos le asignaremos una medida que llamaremos área.

1. Identifique los terrenos que tienen la misma medida.

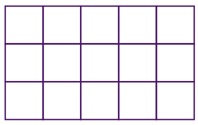
2. Identifique los terrenos que tienen el mismo perímetro.

3. Si utilizamos la longitud de un lado de un cuadradito como unidad de longitud y la superficie de un cuadradito como unidad de superficie, ¿cuáles son los perímetros y las áreas de cada uno de los terrenos?

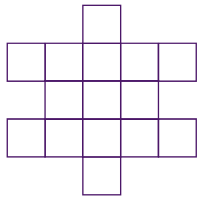
4. Si utilizamos como unidad de longitud, la longitud de dos lados de un cuadradito y la superficie de cuatro cuadraditos, ¿cuáles son los perímetros y las áreas de cada uno de los terrenos? En estas condiciones, dibuje un terreno de perímetro 4 y otro de área 3,5.

Actividad 9

1. Compare la superficie y el perímetro de los siguientes terrenos:



Terreno 1



Terreno 2

2. Dibuje un terreno distinto a los que vende la inmobiliaria que ocupe la misma superficie que el terreno 1 y que tenga mayor perímetro.

3. Dibuje un terreno distinto a los que vende la inmobiliaria que ocupe menor superficie que el terreno 1 y que tenga el mismo perímetro.

4. Dibuje un terreno distinto a los que vende la inmobiliaria que ocupe una superficie menor a la del terreno 1 y que tenga un perímetro mayor.

5. Dibuje un terreno distinto a los que vende la inmobiliaria que ocupe la misma superficie que el terreno 2 y que tenga menor perímetro.

6. Dos terrenos cuadrados contiguos de lados iguales se pueden comprar juntos o en forma individual. El rectángulo que resulta de comprarlos juntos, ¿ocupa el doble de la superficie que cada uno de los cuadrados? Para cercar al terreno rectangular, ¿se necesita el doble de alambre que para cercar cada uno de los terrenos cuadrados?

7.

a) Represente, en una hoja cuadriculada, tres terrenos rectangulares de diferentes dimensiones que tengan 80 metros de perímetro. Calcule la superficie de cada uno de los terrenos dibujados.

b) Represente, también, un terreno cuadrado de 80m de perímetro. Calcule su superficie.

c) ¿Cuál de los cuatro terrenos es el de mayor superficie?

Actividad 10

Durante la construcción de una casa se discuten distintas alternativas sobre cómo recubrir el piso. Una de las alternativas propuestas por el arquitecto es usar baldosones cuadrados de 1m de lado.

Responda las siguientes preguntas teniendo en cuenta la información anterior:

1. En una habitación cuadrada de 5m de lado, ¿cuántos baldosones de los propuestos por el arquitecto serán necesarios para cubrir toda la superficie del piso de la habitación? Si le resulta necesario realice una representación gráfica en hoja cuadriculada que le permita contarlos.

2. ¿Qué cuenta le permitiría obtener la cantidad de baldosones necesarios sin contarlos?

3. ¿Cuántos baldosones hacen falta para cubrir el piso de una habitación rectangular de 5m · 4m? Escriba la cuenta que le permite calcularlo.

Si se nos ocurriera embaldosar la habitación con cuadraditos de 1cm de lado:

4. ¿Cuántos de esos cuadraditos serían necesarios para embaldosar la habitación cuadrada? Escriba la cuenta que permite calcular esta cantidad.

5.¿Cuántos de esos cuadraditos serían necesarios para embaldosar la habitación rectangular? Escriba la cuenta que le permite calcular esa cantidad.

Orientaciones

Para cubrir la superficie del piso de la habitación cuadrada de 5m de lado con baldosones de 1m de lado son necesarios 25 baldosones. El baldosón de 1m de lado es la unidad utilizada para medir la superficie del piso de la habitación. Llamamos **área** a la medida de la superficie. Podemos decir, entonces, que la habitación tiene un área de 25 baldosones de 1m de lado.

La cuenta que nos permite calcular el área del piso sin contar los baldosones uno por uno es 5 x 5 = 25 baldosones ya que podemos colocar 5 baldosones por lado.

Para cubrir el piso de la habitación rectangular de 5m x 4m son necesarios 20 baldosones de 1m de lado.

Si en lugar de usar el baldosón como unidad de medida de la superficie queremos usar unidades del SIMELA, tenemos que calcular el área del baldosón utilizando estas unidades. El baldosón es un cuadrado de un metro de lado, por lo tanto tiene un área de 1m x 1m = 1m^2. Si en la habitación cuadrada de 5m de lado entran 25 de estos baldosones, entonces el área de la habitación expresada en unidades del SIMELA es de 25m^2. Pensando de la misma forma podemos calcular el área de la habitación rectangular que resulta de 20m^2.

Supongamos que utilizamos baldosas muy pequeñas, de 1cm de lado. El área de la habitación cuadrada utilizando como unidad el cuadradito de 1cm de lado es de 250.000 cuadraditos de 1cm de lado ya que los 5m de lado equivalen a 500cm, por lo tanto podemos poner 500 cuadraditos de 1cm de lado por cada lado, 500 x 500 = 250.000 cuadraditos de 1cm de lado. El área del piso de la habitación rectangular es de 200.000 cuadraditos de 1cm de lado.

Del mismo modo que hicimos con el baldosón, si calculamos el área de un cuadradito en unidades del sistema métrico decimal, resulta que esta es de 1cm x 1cm = 1cm^2. Por lo tanto el área del piso de las habitaciones cuadrada y rectangular resulta de 250000 cm^2 y 200000 cm^2, respectivamente.

Por lo tanto, 25m^2 es equivalente a 250000 cm^2 y 20m^2 es equivalente a 200.000 cm^2.

De estas dos equivalencias podemos deducir que 1m^2 cuadrado equivale a 10.000cm^2. A su vez cada centímetro cuadrado es equivalente a 1 : 10.000m^2 = 0,0001m^2.

Podríamos pensar del mismo modo considerando baldosas de 1dm de lado y obtendríamos la equivalencia del metro cuadrado con el decímetro cuadrado. Y así con el resto de las unidades del sistema.

2.2 Unidades de superficie

La siguiente tabla describe las equivalencias entre las distintas unidades de superficie con el metro cuadrado:

Múltiplos			Unidad Principal	Submúltiplos		
1 km^2	1hm^2	1 dam^2	**1m^2**	1dm^2	1cm^2	1mm^2
1000000m^2	10000m^2	100m^2		0,01m^2	0,0001m^2	0,000001m^2

Por ejemplo, si queremos expresar en metros cuadrados un área medida en decímetros cuadrados, tenemos que dividir a la cantidad de decímetros cuadrados por 100:

$$\mathbf{2}dm^2 = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{100}}\, m^2 = \mathbf{0{,}02}m^2$$

Si queremos expresar en metros cuadrados un área medida en hectómetros cuadrados, tenemos que multiplicar a la cantidad de hectómetros cuadrados por 100 para pasarlo a decámetros cuadrados y al resultado multiplicarlo por 100 para pasarlo a metros cuadrados:

$$\mathbf{3}hm^2 = \mathbf{(3 \cdot 100)}dam^2 = \mathbf{(3 \cdot 100 \cdot 100)}m^2 = \mathbf{(3 \cdot 10000)}m^2 = \mathbf{30000}m^2$$

Actividad 11

1. En una ciudad llamamos manzana a un cuadrado rodeado por cuatro calles. Si cada lado de ese cuadrado es una cuadra de 100m, ¿cuál es el área de una manzana en metros cuadrados?

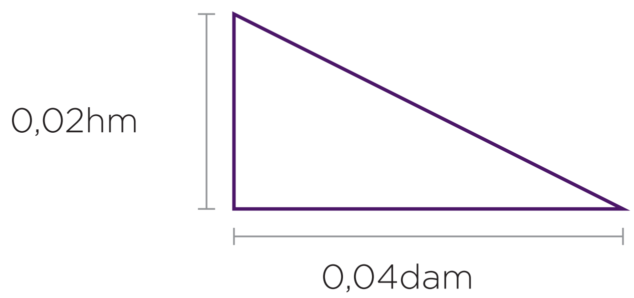
2. Una chacra rectangular tiene un ancho de 1350m y un largo de 2400m.

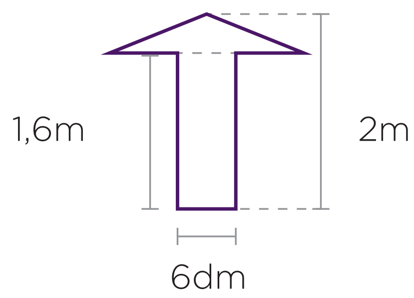
a) ¿Cuál es el área de la chacra en m^2? ¿Y en hm^2?

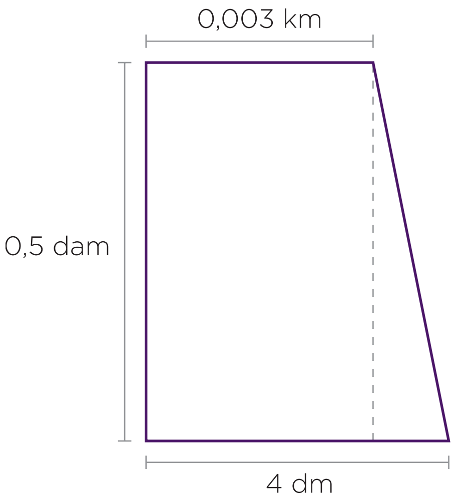
b) ¿Cuál es el área de la chacra en hectáreas? (Recuerde que 1ha ocupa una superficie equivalente a la de un cuadrado de 100m de lado).

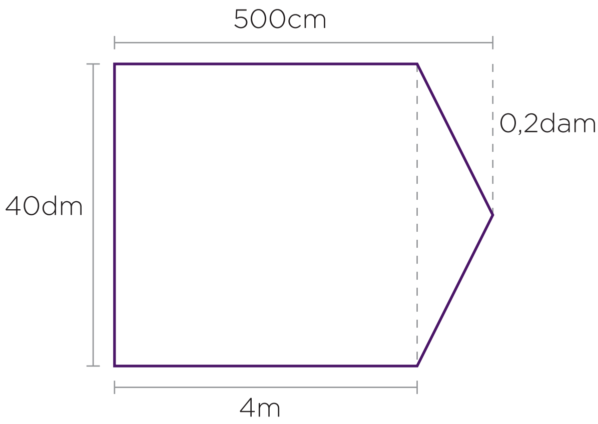
c) Se divide la chacra en dos parcelas poniendo un alambrado por una de las diagonales del rectángulo. ¿Cuál es el área de cada una de las parcelas?

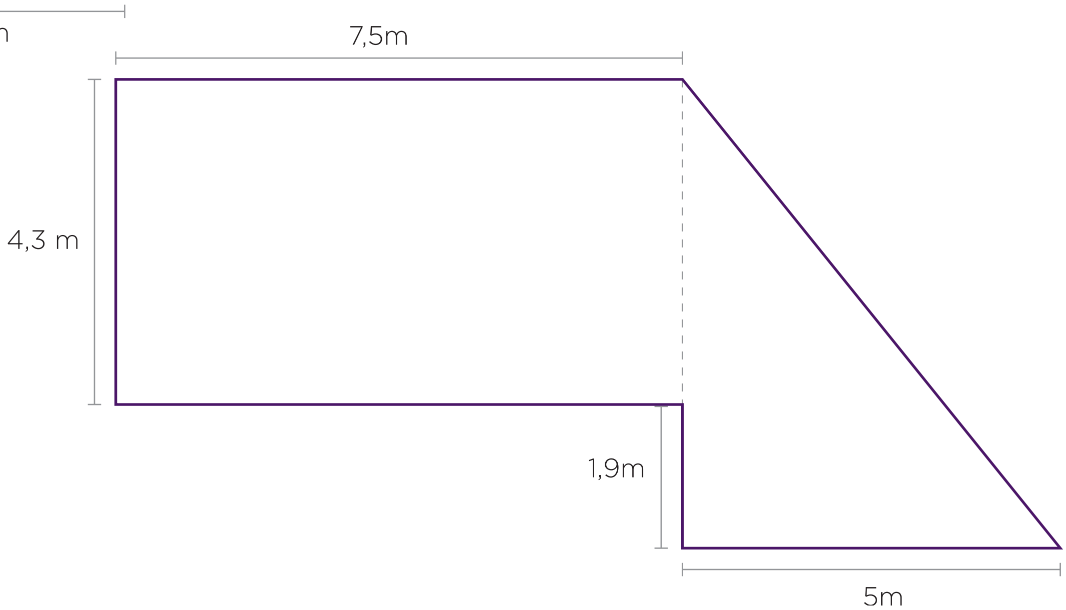
3. Calcule el área de cada una de las siguientes figuras teniendo en cuenta las dimensiones indicadas en cada una de ellas:











4. En un diario se lee la siguiente información: «El temporal continúa haciendo estragos en varias provincias: 550 mil hectáreas del sudeste cordobés están bajo las aguas».
La ciudad de Buenos Aires tiene un área de 200 km^2 aproximadamente. ¿Cuántas «ciudades de Buenos Aires» estarían inundadas en el sudeste de Córdoba?

5. Un baño mide 4m de largo, 3m de ancho y 2,6m de alto. Tiene una puerta que mide 1m de ancho y 2m de alto. Se cubrirán las paredes hasta una altura de 1,80m con azulejos cuadrados de 20cm de lado. Las cinco sextas partes del piso se cubrirán con baldosas rectangulares de 10cm de ancho y 20cm de largo. También se colocará una guarda por encima de los azulejos.

a) ¿Cuántos azulejos se necesitarán?

b) ¿Cuántas baldosas se necesitarán?

c) ¿Cuántos metros de guarda se necesitan?

6. Una inmobiliaria dispone de un terreno de 750dam^2. Desea lotearlo en parcelas de 1250m^2 cada una. ¿Qué cantidad de parcelas puede obtener en el loteo?

7. Un campo rectangular tiene 1,5km de ancho y 5km de largo. Calcule la superficie del campo en km^2.

8. Un salón cuadrado tiene un área de 64m^2. Si hay una puerta de 1,2m de ancho, ¿cuántos metros de zócalo se necesitan para proteger la base de las paredes?

3. Volumen y capacidad

Al iniciar la unidad también mencionamos las magnitudes **volumen y capacidad.** El volumen de un cuerpo es la medida del espacio que ocupa y la capacidad es la medida de la cantidad que puede contener.

Imagine una caja fuerte cuyas medidas exteriores son: 1m de ancho, 1m de profundidad y 1m de alto. Por lo tanto su volumen es 1m x 1m x 1m = $1m^3$ (un metro cúbico).

Para que la caja pueda cumplir su función debe tener paredes gruesas y resistentes. Así es que el lugar interno, donde se guardan los valores, es más reducido que el espacio que ocupa una caja de igual volumen pero con paredes finas.

Si el cuerpo tiene paredes finas, el volumen y la capacidad son casi coincidentes. En esos casos puede despreciarse el grosor de las paredes y considerar que el cuerpo tiene tanta capacidad como volumen y suele hablarse indistintamente de uno u otro. Esto ocurre con las cajas, las botellas, las latas, los baldes, las ollas y la mayoría de los cuerpos que usted utiliza en su vida cotidiana.

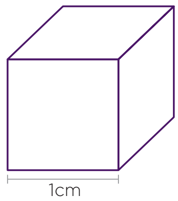
Para medir el volumen utilizando unidades del sistema métrico decimal se usa el metro cúbico (m^3) como unidad principal. Un metro cúbico es el volumen de un cubo de 1m de arista. Una unidad menor que la unidad principal es el cm^3. Un centímetro cúbico es el volumen de un cubo de 1cm de arista, 1cm x 1cm x 1cm = $1cm^3$.

Si consideramos una caja de cartón con forma de cubo de 1m de arista y paredes de grosor despreciable y queremos guardar en su interior dados de 1cm de arista:

a) ¿Cuántos dados es posible guardar en la caja?

b) ¿Cuál es el volumen de la caja utilizando como unidad de medición el dado?

c) ¿Cuál es el volumen de la caja en cm^3?



Orientaciones

Cada dado tiene 1cm de arista y la caja tiene 1m de arista, es decir, 100cm. Por lo tanto, en la caja entran 100 x 100 x 100 dados = 1000000 dados. Como la caja tiene un volumen de $1m^3$ y cada dado tiene un volumen de $1cm^3$, podemos afirmar que $1m^3$ es equivalente a $1000000cm^3$. También que $1cm^3$= (1:1000000)m^3 = $0,00001m^3$.

3.1 Unidades de volumen y capacidad.

La siguiente tabla describe las equivalencias de las distintas unidades de volumen con el metro cúbico:

Múltiplos			Unidad Principal	Submúltiplos		
$1\ km^3$	$1hm^3$	$1\ dam^3$		$1dm^3$	$1cm^3$	$1mm^3$
$1000000000m^3$	$1000000m^3$	$1000m^3$	**$1m^3$**	$0,001m^3$	$0,000001m^3$	$0,000000001m^3$

Para medir **capacidades** se usa como unidad principal al litro (l). Sus múltiplos son: el decalitro (dal), el hectolitro (hl) y el kilolitro (kl). Sus submúltiplos son: el decilitro (dl), el centilitro (cl) y el mililitro (ml).

Le mostramos sus equivalencias con la unidad principal en la siguiente tabla:

Múltiplos			Unidad Principal	Submúltiplos		
1 kl	1hl	1 dal		1dl	1cl	1ml
1000 l	100 l	10 l	**1 l**	0,1 l	0,01 l	0,001 l

Existe la siguiente equivalencia entre las medidas de capacidad y de volumen:

1litro = $1dm^3$= $1000cm^3$

Actividad 12

1. Se cava un pozo para hacer una piscina. El volumen de tierra que se saca para hacer el pozo es de $56m^3$. La tierra se retira con carretillas que en cada viaje pueden cargar $400dm^3$.

a) ¿Cuántos viajes de la carretilla son necesarios para retirar toda la tierra del pozo?

b) Suponiendo despreciable el grosor de las paredes, ¿cuántos litros de agua serán necesarios para llenar la pileta de natación?

c) ¿A cuántos kilolitros de agua es equivalente la cantidad anterior?

2. El volumen de un bidón es de 7500 cm^3.

a) ¿Con cuántos litros de agua se puede llenar ese bidón?

b) Si el contenido del bidón se quiere repartir en botellas de 0,5 dm^3 , ¿cuántas de estas botellas serán necesarias?

3. Una caja de zapatos tiene 20cm de ancho, 35cm de largo y 10cm de alto. Se quiere llenar con dados que tienen 1cm de arista.

a) ¿Cuántos dados caben en la caja?

b) ¿Cuál es el volumen de la caja en cm^3?

c) ¿Cuál es la superficie, en cm^2, de la base de la caja?

d) Si multiplica la superficie de la base por la altura de la caja, ¿qué obtiene?

e) ¿Cuántos cm^2 de cartón se necesitan para armar la caja?

Orientaciones

Una caja de zapatos es un ejemplo de un cuerpo geométrico llamado **prisma recto** porque sus paredes son perpendiculares a la base. Observe el siguiente gráfico:

La caja de zapatos es un prisma recto rectangular (porque su base es un rectángulo). También hay prismas rectos cuadrangulares (con base cuadrada), triangulares (con base triangular), pentagonales (su base es un pentágono), etc.

Para obtener el volumen de un prisma recto, como habrá calculado para la caja de zapatos, se multiplica la superficie de la base por la altura del prisma. Es decir que:

Volumen prisma recto = Superficie de la base · altura

Para calcular la cantidad de cartón a utilizar para construir la caja, sumamos las superficies de sus caras (que, en este caso, son 6 rectángulos).

5. En un envase de salsa de tomate con forma de prisma recto rectangular, los lados de la base miden 6cm y 8cm y la altura mide 5cm.

a) ¿Cuál es el volumen del envase en cm^3?

b) ¿Cuál es la capacidad de ese envase en litros?

6. Se quiere construir un depósito con forma de prisma recto rectangular para contener 200hl de agua. La altura del depósito es de 2m.

a) ¿Cuál es la superficie de la base del depósito?

b) Si el largo de la base del depósito mide el triple del ancho, ¿cuáles son las dimensiones del mismo?

7. Un aire acondicionado de 2500 frigorías es apropiado para ambientes de hasta $50m^3$. Será instalado en una habitación de 2,80m de altura, 3,5m de ancho y 5m de largo, ¿resultará suficiente la cantidad de frigorías para este ambiente?

3.2 Unidades de peso

Para medir el peso de un objeto se utiliza como unidad principal o fundamental el gramo (g). Sus múltiplos son: el decagramo (dag), el hectogramo (hg) y el kilogramo (kg).

Sus submúltiplos son: el decigramo (dg), el centigramo (cg) y el miligramo (mg). Le mostramos sus equivalencias con la unidad principal en la siguiente tabla:

Múltiplos			Unidad Principal	Submúltiplos		
1 kg	1hg	1 dag	**1 g**	1dg	1cg	1mg
1000g	100g	10g		0,1g	0,01g	0,001g

Otra unidad de medida de peso que posiblemente usted haya escuchado es la tonelada. Una tonelada es equivalente a 1000kg.

Actividad 13

Una caja contiene 120 pastillas de vitamina C de 200mg cada una. ¿Cuántos gramos de vitamina C hay en la caja?

Actividad 14

Claudio y Estela van a instalar un buffet dentro del club del barrio al que van sus hijos. El club les alquila un pequeño espacio que no se encuentra en muy buenas condiciones y necesita algunos arreglos. Como no pueden enfrentar demasiados gastos antes de la apertura del buffet, deciden hacerle solo un «lavado de cara» pintando las paredes, techo y aberturas y acondicionando el piso del local.

Se trata de un local rectangular de 15 m de largo, 8 m de ancho y 4 m de altura. El mismo presenta una puerta de acceso de 1,2 m de base y 2 m de altura y una ventana de atención al público de 4 m de base y 1 m de altura. Tanto la puerta como la ventana, tienen un marco de 4 cm.

Pintarán con pintura al agua las paredes y el techo del local y con pintura al aceite la puerta y la ventana de atención al público. Van a revestir el piso con placas vinílicas que consiguen en rollos de 10 m^2.

Calculan que con 4 litros de pintura al agua pueden cubrir, con dos manos de pintura, una superficie de 40 metros cuadrados aproximadamente.

Responda las siguientes preguntas a partir de la información que le damos en el enunciado.

1. ¿Cuál es la superficie total a pintar con pintura al agua?

2. ¿Les alcanza una lata de 4 litros de pintura al agua para cubrir con dos manos de pintura las paredes y el techo del local? ¿Por qué? Explique con sus palabras.

3. ¿Cuánto mide la superficie que será pintada con pintura al aceite?

4. ¿Cuántos rollos de vinílico deberán comprar para que les alcance para cubrir todo el piso del local?

Actividades de autoevaluación

1. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado de 8 centímetros de lado?

a) 32mm b) 3200hm c) 3,2dm d) 3,2dam

2. Se quieren fraccionar 500 kilogramos de harina en bolsas de 200 gramos. ¿Cuántas bolsas se necesitarán?

a) 2.500 bolsas. b) 25.000 bolsas. c) 250 bolsas. d) 200 bolsas.

3. El perímetro de un rectángulo es de 48 metros y uno de sus lados mide 11 metros. ¿Cuáles son las medidas de los otros tres lados en metros?

a) 11, 12 y 13. b) 4, 11 y 11. c) 11, 13 y 13. d) 12, 12 y 12.

4. Entre las siguientes hay solo tres magnitudes que son equivalentes a 5,2hm. Indique cuáles son:

a) 520m. b) 0,52dam. c) 52dam. d) 5200cm. e) 0,52km.

5. ¿Cuál es el volumen de un cubo cuyas aristas miden 7 metros?

a) 28 metros cúbicos. b) 21 metros cúbicos. c) 343 metros cúbicos. d) 2.401 metros cúbicos.

Respuestas a actividades de la autoevaluación

Unidad 1
1. a)
2. c)
3. c)
4. b)
5. d)

Unidad 2
1. c)
2. Falsa.
3. Verdadera
4. Verdadera
5. b)

Unidad 3
1. c)
2. Verdadera
3. b)
4. d)
5. b)

Unidad 4
1. b)
2. a)
3. d)
4. d)
5. a)

Unidad 5
1. c)
2. b)
3. Veradera
4. a)
5. c)

Unidad 6
1. Falsa
2. d)
3. b)
4. Verdadera
5. Verdadera

Unidad 7
1. c)
2. a)
3. c)
4. a), c) y e)
5. c)

Vamos Buenos Aires

adultos2000@bue.edu.ar 0800 444 2400