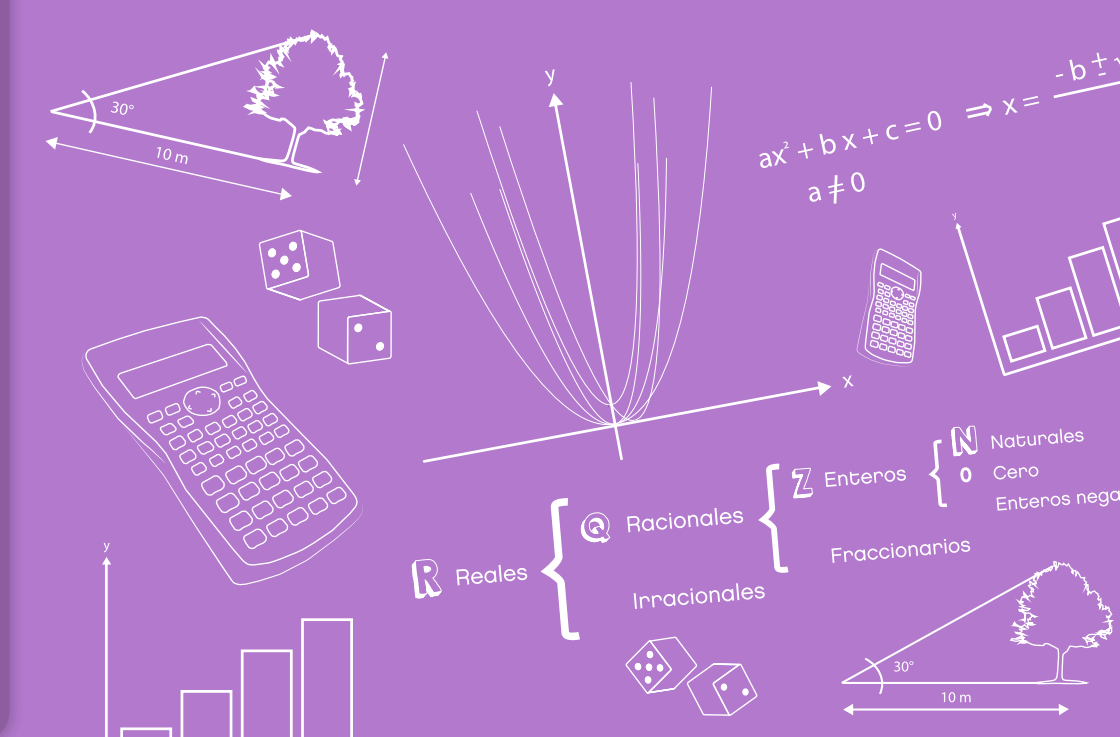


Matemática



Segundo año

Ecuación de la recta y resolución de ecuaciones con GeoGebra. Parte 2

Serie PROFUNDIZACIÓN • NES



Buenos Aires Ciudad



Vamos Buenos Aires

JEFE DE GOBIERNO

Horacio Rodríguez Larreta

MINISTRA DE EDUCACIÓN E INNOVACIÓN

María Soledad Acuña

SUBSECRETARIO DE PLANEAMIENTO E INNOVACIÓN EDUCATIVA

Diego Javier Meiriño

DIRECTORA GENERAL DE PLANEAMIENTO EDUCATIVO

María Constanza Ortiz

GERENTE OPERATIVO DE CURRÍCULUM

Javier Simón

SUBSECRETARIA DE COORDINACIÓN PEDAGÓGICA Y EQUIDAD EDUCATIVA

Andrea Fernanda Bruzos Bouchet

SUBSECRETARIO DE CARRERA DOCENTE Y FORMACIÓN TÉCNICA PROFESIONAL

Jorge Javier Tarulla

SUBSECRETARIO DE GESTIÓN ECONÓMICO FINANCIERA

Y ADMINISTRACIÓN DE RECURSOS

Sebastián Tomaghelli

SUBSECRETARÍA DE PLANEAMIENTO E INNOVACIÓN EDUCATIVA (SSPLINED)

DIRECCIÓN GENERAL DE PLANEAMIENTO EDUCATIVO (DGPLEDU)

GERENCIA OPERATIVA DE CURRÍCULUM (GOC)

Javier Simón

EQUIPO DE GENERALISTAS DE NIVEL SECUNDARIO: Isabel Malamud (coordinación), Cecilia Bernardi, Bettina Bregman, Ana Campelo, Julieta Jakubowicz, Marta Libedinsky, Carolina Lifschitz, Julieta Santos

ESPECIALISTAS: Carla Cabalcabué, Rosa María Escayola, Valeria Ricci, Ruth Schaposchnik, Inés Zuccarelli

COORDINACIÓN DE MATERIALES Y CONTENIDOS DIGITALES (DGPLEDU): Mariana Rodríguez

COLABORACIÓN Y GESTIÓN: Manuela Luzzani Ovide

CORRECCIÓN DE ESTILO (GOC): Vanina Barbeito

EDICIÓN Y DISEÑO (GOC)

COORDINACIÓN DE SERIES PROFUNDIZACIÓN NES Y

PROPUESTAS DIDÁCTICAS PRIMARIA: Silvia Saucedo

EDICIÓN: María Laura Cianciolo, Bárbara Gomila, Marta Lacour

DISEÑO GRÁFICO: Octavio Bally, Ignacio Cismondi, Alejandra Mosconi, Patricia Peralta

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires

Matemática : ecuación de la recta y resolución de ecuaciones con GeoGebra : parte 2. -
1a edición para el profesor. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Gobierno de la Ciudad
de Buenos Aires. Ministerio de Educación e Innovación, 2018.

Libro digital, PDF - (Profundización NES)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-673-423-3

1. Matemática. 2. Educación Secundaria. 3. Guía del Docente. CDD 371.1

ISBN: 978-987-673-423-3

Se autoriza la reproducción y difusión de este material para fines educativos u otros fines no comerciales, siempre que se especifique claramente la fuente.
Se prohíbe la reproducción de este material para reventa u otros fines comerciales.

Las denominaciones empleadas en este material y la forma en que aparecen presentados los datos que contiene no implica, de parte del Ministerio de Educación e Innovación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, juicio alguno sobre la condición jurídica o nivel de desarrollo de los países, territorios, ciudades o zonas, o de sus autoridades, ni respecto de la delimitación de sus fronteras o límites.

En este material se evitó el uso explícito del género femenino y masculino en simultáneo y se ha optado por emplear el género masculino, a efectos de facilitar la lectura y evitar las duplicaciones. No obstante, se entiende que todas las menciones en el género masculino representan siempre a varones y mujeres, salvo cuando se especifique lo contrario.

Fecha de consulta de imágenes, videos, textos y otros recursos digitales disponibles en internet: 15 de noviembre

© Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires / Ministerio de Educación e Innovación / Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.
Dirección General de Planeamiento Educativo / Gerencia Operativa de Currículum, 2018.

Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa / Dirección General de Planeamiento Educativo / Gerencia Operativa de Currículum.
Holmberg 2548/96, 2° piso - C1430DOV - Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

© Copyright © 2018 Adobe Systems Software. Todos los derechos reservados.
Adobe, el logo de Adobe, Acrobat y el logo de Acrobat son marcas registradas de Adobe Systems Incorporated.

Presentación

La serie de materiales Profundización de la NES presenta distintas propuestas de enseñanza en las que se ponen en juego tanto los contenidos –conceptos, habilidades, capacidades, prácticas, valores y actitudes– definidos en el *Diseño Curricular de la Nueva Escuela Secundaria* de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Resolución N.º 321/MEGC/2015, como nuevas formas de organizar los espacios, los tiempos y las modalidades de enseñanza.

El tipo de propuestas que se presentan en esta serie se corresponde con las características y las modalidades de trabajo pedagógico señaladas en la Resolución CFE N.º 93/09 para fortalecer la organización y la propuesta educativa de las escuelas de nivel secundario de todo el país. Esta norma –actualmente vigente y retomada a nivel federal por la propuesta “Secundaria 2030”, Resolución CFE N.º 330/17– plantea la necesidad de instalar “distintos modos de apropiación de los saberes que den lugar a: nuevas formas de enseñanza, de organización del trabajo de los profesores y del uso de los recursos y los ambientes de aprendizaje”. Se promueven también nuevas formas de agrupamiento de los estudiantes, diversas modalidades de organización institucional y un uso flexible de los espacios y los tiempos que se traduzcan en propuestas de talleres, proyectos, articulación entre materias, debates y organización de actividades en las que participen estudiantes de diferentes años. En el ámbito de la Ciudad, el *Diseño Curricular de la Nueva Escuela Secundaria* incorpora temáticas nuevas y emergentes y abre la puerta para que en la escuela se traten problemáticas actuales de significatividad social y personal para los estudiantes.

Existe acuerdo sobre la magnitud de los cambios que demanda la escuela secundaria para lograr convocar e incluir a todos los estudiantes y promover efectivamente los aprendizajes necesarios para el ejercicio de una ciudadanía responsable y la participación activa en ámbitos laborales y de formación. Es importante resaltar que, en la coyuntura actual, tanto los marcos normativos como el *Diseño Curricular* jurisdiccional en vigencia habilitan e invitan a motorizar innovaciones imprescindibles.

Si bien ya se ha recorrido un importante camino en este sentido, es necesario profundizar, extender e instalar propuestas que efectivamente hagan de la escuela un lugar convocante para los estudiantes y que, además, ofrezcan reales oportunidades de aprendizaje. Por lo tanto, sigue siendo un desafío:

- El trabajo entre docentes de una o diferentes áreas que promueva la integración de contenidos.
- Planificar y ofrecer experiencias de aprendizaje en formatos diversos.
- Elaborar propuestas que incorporen oportunidades para el aprendizaje y el ejercicio de capacidades.

Los materiales elaborados están destinados a los docentes y presentan sugerencias, criterios y aportes para la planificación y el despliegue de las tareas de enseñanza, desde estos lineamientos. Se incluyen también propuestas de actividades y experiencias de aprendizaje para los estudiantes y orientaciones para su evaluación. Las secuencias han sido diseñadas para admitir un uso flexible y versátil de acuerdo con las diferentes realidades y situaciones institucionales.

La serie reúne dos líneas de materiales: una se basa en una lógica disciplinar y otra presenta distintos niveles de articulación entre disciplinas (ya sean areales o interareales). Se introducen también materiales que aportan a la tarea docente desde un marco didáctico con distintos enfoques de planificación y de evaluación para acompañar las diferentes propuestas.

El lugar otorgado al abordaje de problemas interdisciplinarios y complejos procura contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y de la argumentación desde perspectivas provenientes de distintas disciplinas. Se trata de propuestas alineadas con la formación de actores sociales conscientes de que las conductas individuales y colectivas tienen efectos en un mundo interdependiente.

El énfasis puesto en el aprendizaje de capacidades responde a la necesidad de brindar a los estudiantes experiencias y herramientas que permitan comprender, dar sentido y hacer uso de la gran cantidad de información que, a diferencia de otras épocas, está disponible y fácilmente accesible para todos. Las capacidades son un tipo de contenidos que debe ser objeto de enseñanza sistemática. Para ello, la escuela tiene que ofrecer múltiples y variadas oportunidades para que los estudiantes las desarrollen y consoliden.

Las propuestas para los estudiantes combinan instancias de investigación y de producción, de resolución individual y grupal, que exigen resoluciones divergentes o convergentes, centradas en el uso de distintos recursos. También, convocan a la participación activa de los estudiantes en la apropiación y el uso del conocimiento, integrando la cultura digital. Las secuencias involucran diversos niveles de acompañamiento y autonomía e instancias de reflexión sobre el propio aprendizaje, a fin de habilitar y favorecer distintas modalidades de acceso a los saberes y los conocimientos y una mayor inclusión de los estudiantes.

En este marco, los materiales pueden asumir distintas funciones dentro de una propuesta de enseñanza: explicar, narrar, ilustrar, desarrollar, interrogar, ampliar y sistematizar los contenidos. Pueden ofrecer una primera aproximación a una temática formulando dudas

e interrogantes, plantear un esquema conceptual a partir del cual profundizar, proponer actividades de exploración e indagación, facilitar oportunidades de revisión, contribuir a la integración y a la comprensión, habilitar oportunidades de aplicación en contextos novedosos e invitar a imaginar nuevos escenarios y desafíos. Esto supone que en algunos casos se podrá adoptar la secuencia completa o seleccionar las partes que se consideren más convenientes; también se podrá plantear un trabajo de mayor articulación entre docentes o un trabajo que exija acuerdos entre los mismos. Serán los equipos docentes quienes elaborarán propuestas didácticas en las que el uso de estos materiales cobre sentido.

Iniciamos el recorrido confiando en que constituirá un aporte para el trabajo cotidiano. Como toda serie en construcción, seguirá incorporando y poniendo a disposición de las escuelas de la Ciudad nuevas propuestas, dando lugar a nuevas experiencias y aprendizajes.

Diego Javier Meiriño
Subsecretario de Planeamiento
e Innovación Educativa

Gabriela Laura Gürtner
Jefa de Gabinete de la Subsecretaría de
Planeamiento e Innovación Educativa

¿Cómo se navegan los textos de esta serie?

Los materiales de Profundización de la NES cuentan con elementos interactivos que permiten la lectura hipertextual y optimizan la navegación.

Para visualizar correctamente la interactividad se sugiere bajar el programa [Adobe Acrobat Reader](#) que constituye el estándar gratuito para ver e imprimir documentos PDF.



Portada



Flecha interactiva que lleva a la página posterior.

Índice interactivo

Introducción

Plaquetas que indican los apartados principales de la propuesta.

Actividades

Análisis de las pendientes de las rectas a partir de sus gráficos

Actividad 1

En GeoGebra se graficaron las rectas: f , g , h , i ; como se muestra en la imagen a continuación:



Pie de página



Volver a vista anterior



Al clicar regresa a la última página vista.



Ícono que permite imprimir.



Folio, con flechas interactivas que llevan a la página anterior y a la página posterior.

Itinerario de actividades

Actividad 1

Análisis de las pendientes de las rectas a partir de sus gráficos

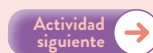
Analizar la relación entre la pendiente de una recta y su gráfico.

1

Organizador interactivo que presenta la secuencia completa de actividades.



Botón que lleva a la actividad anterior.



Botón que lleva a la actividad siguiente.



Sistema que señala la posición de la actividad en la secuencia.

Íconos y enlaces

- 1 Símbolo que indica una cita o nota aclaratoria. Al clicar se abre un *pop-up* con el texto:

Ovidescim repti ipita voluptis audi iducit ut qui adis moluptur? Quia poria dusam serspero voloris quas quid moluptur?Luptat. Upti cumAgnimustrum est ut

Los números indican las referencias de notas al final del documento.

El color azul y el subrayado indican un [vínculo](#) a la web o a un documento externo.



Indica enlace a un texto, una actividad o un anexo.

“Título del texto, de la actividad o del anexo”



Indica apartados con orientaciones para la evaluación.

Índice interactivo



Introducción



Contenidos y objetivos de aprendizaje



Itinerario de actividades



Orientaciones didácticas y actividades



Orientaciones para la evaluación



Bibliografía

Introducción

Esta secuencia didáctica propone el estudio de problemas sobre la ecuación de la recta, mediados por el uso de la tecnología, en particular de GeoGebra. Uno de los objetivos centrales es proponer un trabajo que abone la construcción de sentido de las nociones relacionadas con el planteo y la resolución de ecuaciones.

El programa GeoGebra fue creado con el propósito de enseñar y aprender matemática permitiendo trabajar en forma simultánea con los registros gráfico y algebraico de un mismo objeto matemático. Tiene la característica de ser libre y multiplataforma, por lo que dispone de un sitio web para instalarlo en forma gratuita. Se sugiere utilizar la versión [GeoGebra Clásico 5](#) y se aclara que no es indispensable disponer de conectividad para la implementación de este material.

Para la implementación de esta secuencia, se espera que los estudiantes hayan trabajado previamente con algunas funciones lineales, abordando la lectura y la construcción de gráficos, la producción y la interpretación de fórmulas de estas funciones, incluyendo el análisis de la pendiente, a partir de los distintos registros de representación. Dado que el inicio del trabajo con ecuaciones se plantea a partir del trabajo con las funciones, se sugiere la implementación previa de la secuencia *Función lineal: variación uniforme*. Además, en función de esta idea, se continúa el trabajo iniciado en la secuencia *Ecuación de la recta y resolución de ecuaciones con GeoGebra. Parte 1*. Por eso, se espera que los estudiantes ya hayan tenido un primer acercamiento al uso del programa (se sugiere la lectura del anexo “Funciones y ecuaciones con GeoGebra”) y hayan resuelto las actividades en las que se comienza a trabajar con la ecuación de la recta y el uso de las letras como parámetros mediante deslizadores. A medida que se suceden las actividades, se continúa reflexionando sobre el potencial del programa para resolver los problemas, al mismo tiempo que se ponen en juego los contenidos matemáticos previstos.

La incorporación de un recurso tecnológico implica el aprendizaje de una nueva herramienta, tanto para los estudiantes como para el docente. Desde la perspectiva con la que se elabora esta propuesta, se considera que resolver algunas actividades sencillas permite un acercamiento inicial al funcionamiento y a las posibilidades de GeoGebra. Es decir, es posible aprender a utilizar el programa a medida que se resuelven problemas en este entorno. Estas herramientas serán un insumo valioso para el estudio de otros contenidos en matemática. Es importante destacar que no es necesario conocer todas las herramientas que incluye el programa para comenzar a utilizarlo. La secuencia desarrollada aquí se plantea con este propósito y desde este enfoque. Por otro lado, no se espera que los estudiantes encuentren por sí mismos todas las herramientas que ofrece el programa. De ser preciso, sobre la base



de sus intentos, el docente podrá mostrar el funcionamiento de una herramienta para ponerla en juego y luego habilitar que ellos la reutilicen a fin de resolver otros problemas.

A lo largo del documento se presentarán, de modo orientativo, posibles estrategias y resoluciones de los estudiantes. Es probable que el trabajo con GeoGebra en el aula propicie un despliegue de alternativas de resolución mayor al que se da en otras situaciones de enseñanza, debido a la variedad de herramientas disponibles y a la facilidad de su utilización. Será importante que el docente habilite y estimule la producción de estrategias propias por parte de los estudiantes y dé espacio a sus ideas y a sus propuestas, ya sean ajustadas o incompletas, en los espacios colectivos de discusión. Con estas anticipaciones no se aspira a que el docente pueda prever todo lo que sucederá efectivamente en la clase, sino a contribuir con el repertorio de procedimientos posibles, y con la construcción de ciertos criterios y propósitos que cada uno podrá adecuar a las situaciones de intercambio que se produzcan con sus estudiantes.

A partir de la resolución y el análisis de los problemas que se proponen a lo largo de esta secuencia, se plantea un tipo de trabajo matemático que involucra la exploración y elaboración de conjeturas, apoyado en las posibilidades que brinda GeoGebra. A su vez, algunas limitaciones del programa serán la base para que el docente introduzca la necesidad de validar algebraicamente esas conjeturas. También, se propone el uso del programa como herramienta de control de las producciones. Es decir, se espera que los estudiantes adquieran progresivamente estrategias para el trabajo autónomo con el programa, pudiendo decidir en qué momentos utilizarlo y con qué fin.

A lo largo de la secuencia, se promueve el debate de ideas y la producción colectiva en torno al análisis y la construcción de distintos registros de representación: gráfico y algebraico. Es posible estudiar que las variaciones de una expresión algebraica —ecuación de la recta— se ven plasmadas en el gráfico que la representa. Estas variaciones se justifican a través del trabajo algebraico. En paralelo, la exploración en la *Vista Gráfica* habilita la elaboración de conjeturas que podrán ser validadas o descartadas algebraicamente.

Para facilitar los intercambios colectivos en torno a los problemas, será importante acordar con los estudiantes la denominación de los objetos. Por este motivo, se sugiere designar las ecuaciones de las rectas y los puntos con un nombre determinado (se sugiere la lectura del punto 8 del anexo “Funciones y ecuaciones con GeoGebra”).

En la primera actividad se propone que los estudiantes analicen, a partir de los gráficos, las pendientes de distintas rectas, y se formaliza la definición de *pendiente* como cociente incremental.



En la segunda actividad, se propone un trabajo con parámetros asociados a las pendientes de distintas rectas. A partir de la exploración con GeoGebra, se propicia el planteo y la resolución de ecuaciones.

En la tercera actividad, el estudio se focaliza en la intersección entre rectas, a partir de la variación de la pendiente de una recta, apelando a la resolución de ecuaciones como manera de validación.

En la cuarta actividad, se propone a los estudiantes el análisis y la reflexión sobre el camino recorrido a través de una revisión de los problemas resueltos y la sistematización de los aprendizajes adquiridos

Contenidos y objetivos de aprendizaje

En esta propuesta se seleccionaron los siguientes contenidos y objetivos de aprendizaje del espacio curricular de Matemática para segundo año de la NES:

Ejes/Contenidos	Objetivos de aprendizaje	Capacidades
Funciones y álgebra <i>Ecuación de la recta</i> - Pendiente. Rectas paralelas. - Producción de la representación gráfica y de la ecuación de una recta a partir de ciertos datos: un punto y la pendiente, los puntos donde corta a los ejes. - Resolución de ecuaciones que involucren transformaciones algebraicas.	- Establecer relaciones entre resolución gráfica y algebraica. - Comprender que la elección de un modo de organizar y representar la información pone de relieve ciertos aspectos y oculta otros. - Valorar el intercambio entre pares como promotor del establecimiento de relaciones matemáticas y del establecimiento de la validez de los resultados y propiedades elaboradas.	Resolución de problemas.

La exploración con GeoGebra y el uso —en general— de este programa permiten enriquecer el quehacer matemático a partir de la interacción dinámica entre los marcos gráfico y algebraico. En particular, se busca que los estudiantes:

- Avancen en el uso de las herramientas de GeoGebra para explorar y relacionar los registros gráfico (*Vista Gráfica*) y algebraico (*Vista Algebraica*) de un mismo objeto matemático.
- Adquieran estrategias propias del trabajo con deslizadores como parámetros de las ecuaciones de las rectas que les permitan interpretar de qué forma se modifican sus gráficas en función de la variación de estos parámetros. Se sugiere la lectura del anexo “Funciones y ecuaciones con GeoGebra”.



Anexo.
Funciones y
ecuaciones con
GeoGebra

Itinerario de actividades



Actividad 1

Análisis de las pendientes de las rectas a partir de sus gráficos

Analizar la relación entre la pendiente de una recta y su gráfico.

1



Actividad 2

Exploración de las pendientes de las rectas con GeoGebra

Avanzar en el análisis de la pendiente de la recta y en el trabajo con ecuaciones a partir de la exploración con GeoGebra.

2



Actividad 3

Intersecciones entre rectas con GeoGebra

Explorar con GeoGebra la intersección entre rectas y avanzar con el trabajo con ecuaciones para la validación algebraica.

3



Actividad 4

Integración

Analizar y reflexionar sobre el camino recorrido a través de los problemas realizados y los aprendizajes adquiridos.

4

Orientaciones didácticas y actividades

En la implementación de estas actividades, se propone que los estudiantes trabajen en parejas con un dispositivo digital que tenga instalado el programa. Como alternativa, se podrá descargar una versión portable (no requiere instalación previa), o también trabajar con el [applet de GeoGebra](#), en Internet.

A lo largo de las actividades, las distintas consignas hacen referencia a diferentes comandos del programa. Para facilitar su identificación, se han incorporado en este documento los íconos de esas herramientas. En las actividades que se desarrollan en la secuencia, se utilizarán las siguientes:



Con respecto a la entrega de las consignas de trabajo a los estudiantes, se puede elegir entre diversos formatos: actividad impresa o proyección en el pizarrón. No es necesario disponer de conectividad para la implementación de esta secuencia.

Para una mejor comprensión de este documento, se sugiere explorar las construcciones mencionadas en paralelo a la lectura.

Para quienes utilizan por primera vez GeoGebra, se ofrece un texto orientativo, el anexo “Funciones y ecuaciones con GeoGebra”, como guía para utilizar el programa.



Actividad 1. Análisis de las pendientes de las rectas a partir de sus gráficos

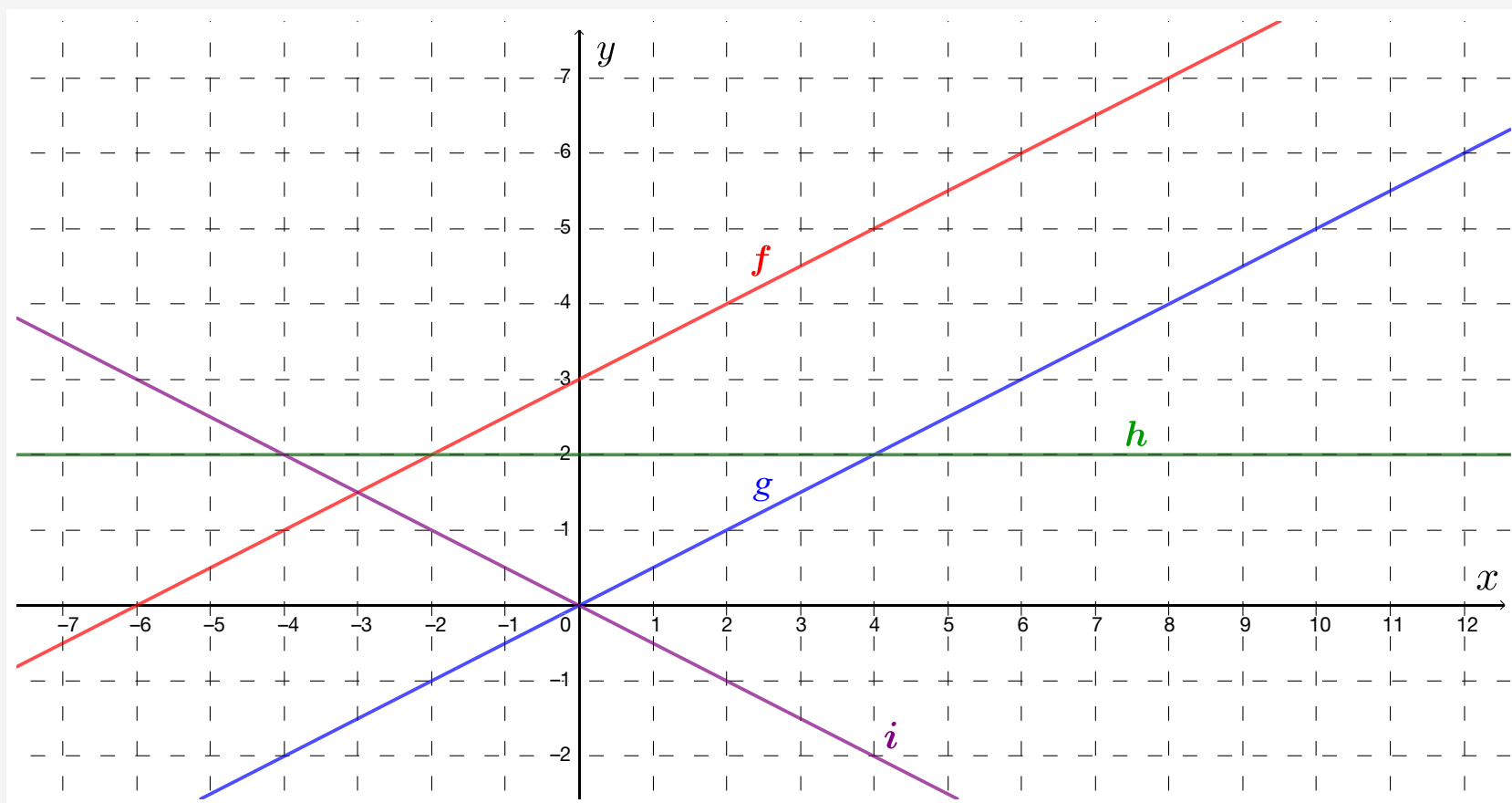
En esta actividad se propone que los estudiantes analicen la relación entre las pendientes de distintas rectas y sus gráficos.

Análisis de las pendientes de las rectas a partir de sus gráficos

Actividad 1

Problema 1

En GeoGebra se graficaron las rectas f, g, h, i ; como se muestra en la imagen a continuación:



A partir del gráfico, realicen las siguientes consignas:

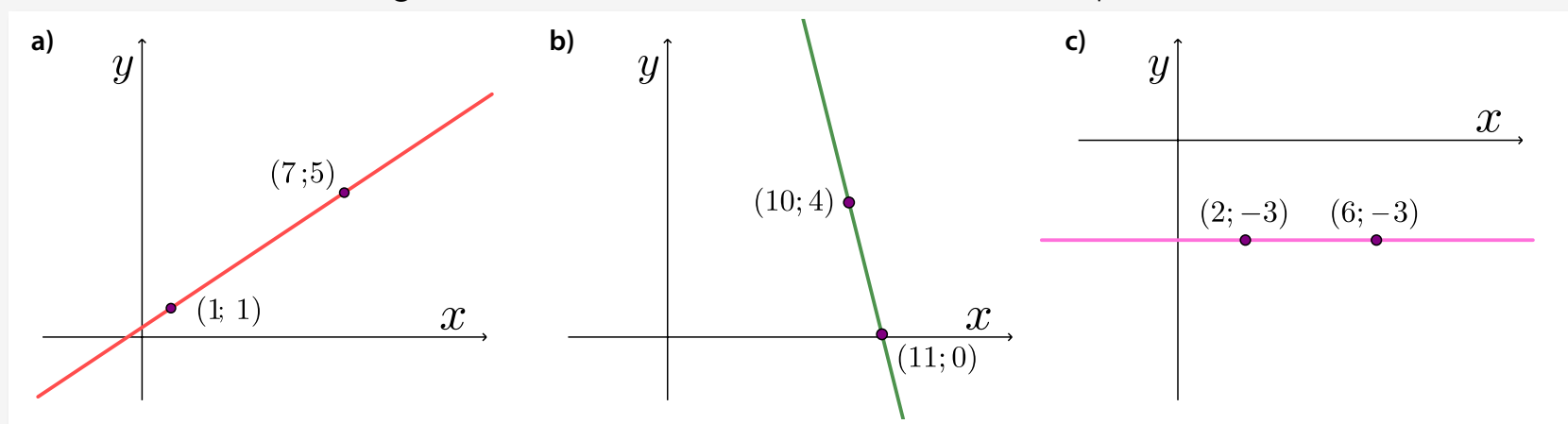
- Completen las coordenadas de estos puntos que pertenecen a la recta g .
 - $M=(0; \dots)$
 - $P=(12; \dots)$
 - $Q=(14; \dots)$
 - $N=(\dots; \dots)$
- ¿Cuál es el valor de y si el punto $R=(12; y)$ pertenece a la recta f ?
- Completen la tabla con las coordenadas de puntos que pertenecen a la recta i .

x	y
	0
-4	
6	
	-4
10	
12	

- Escriban las coordenadas de tres puntos que pertenezcan y tres que no pertenezcan a la recta h .
- Para cada una de las rectas, determinen el valor de la pendiente. Comprueben sus respuestas en GeoGebra ingresando, a través de la barra de *Entrada*, las ecuaciones de las rectas.

Problema 2

Para cada una de las siguientes rectas, determinen el valor de la pendiente.

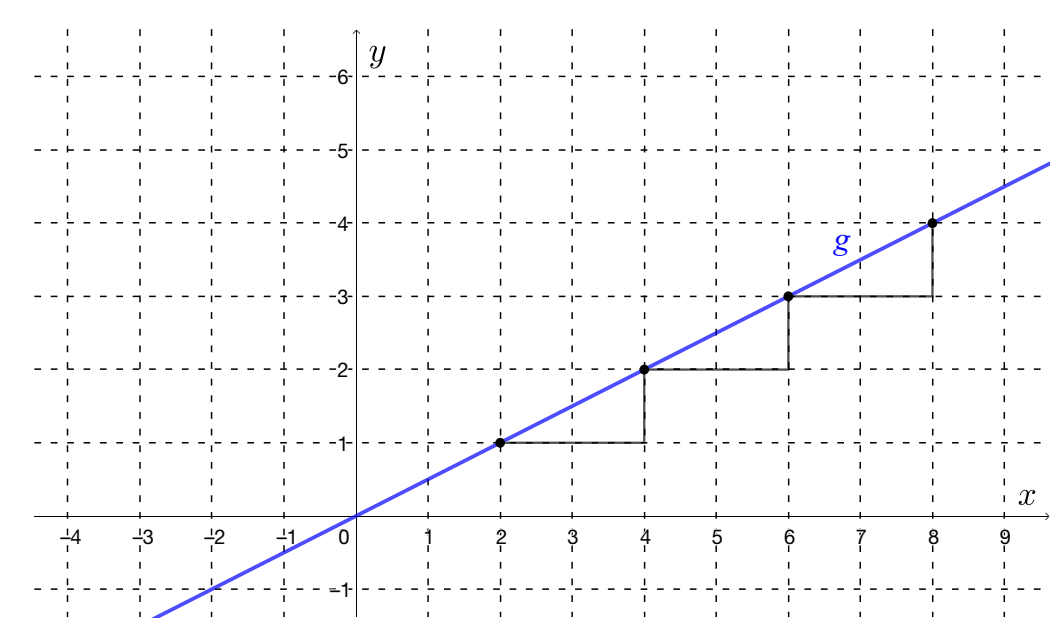


Actividad
siguiente

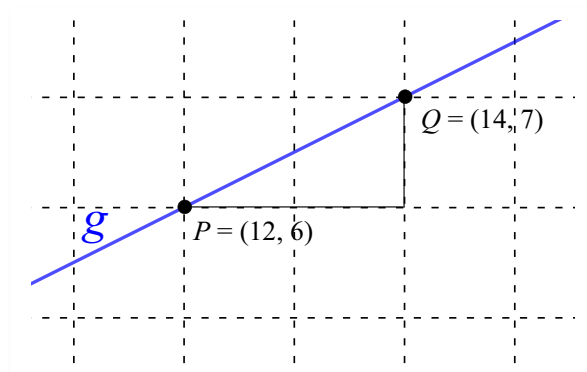


En la consigna **a** del problema 1, la intención es que las coordenadas de los puntos M y P puedan obtenerse de la lectura directa del gráfico, admitiendo como válido el uso de la cuadrícula. Este tipo de lectura requiere ser consensuada con el grupo y su validación puede ser parte de las pautas y los acuerdos que se establezcan, en el espacio del aula, entre cada docente y su grupo de estudiantes.

Para obtener el punto Q , una resolución posible consiste en extender la gráfica de la recta g . Otras opciones serán: extender el gráfico del problema (en caso de que la consigna sea dada en forma impresa) o reproducir el gráfico en la carpeta. A partir de este procedimiento, se espera que los estudiantes comiencen a establecer relaciones entre los puntos: tomando un punto cualquiera perteneciente a la recta, podrán desplazarse dos unidades a la derecha y una unidad hacia arriba y encontrar otro punto de la recta.

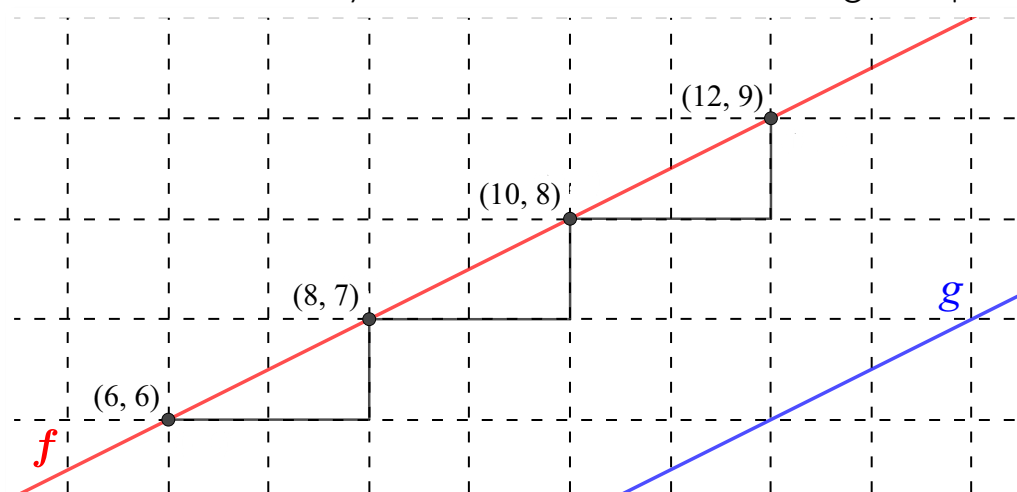


Con estas relaciones analizadas, podrían apoyarse, por ejemplo, en el punto $P=(12; 6)$, para obtener el punto $Q=(14; 7)$.

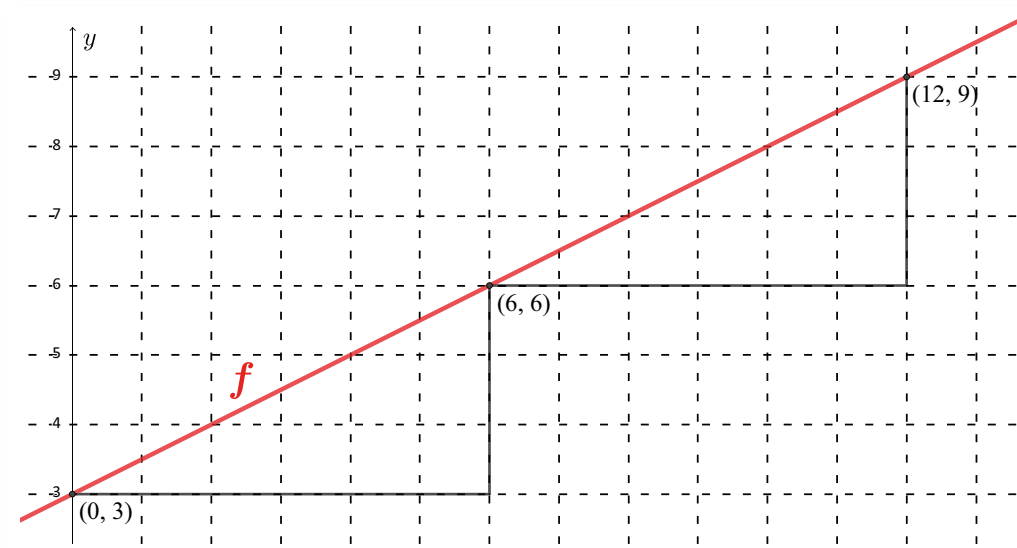


Del mismo modo, en la consigna **b**, podrían apoyarse en diferentes puntos y en la pendiente de la recta, para obtener el punto R . En esta oportunidad, el enunciado del problema no ofrece un punto de apoyo sino que serán los estudiantes quienes deban elegirlo. Esto puede dar lugar a un mayor grado de diversidad en las resoluciones.

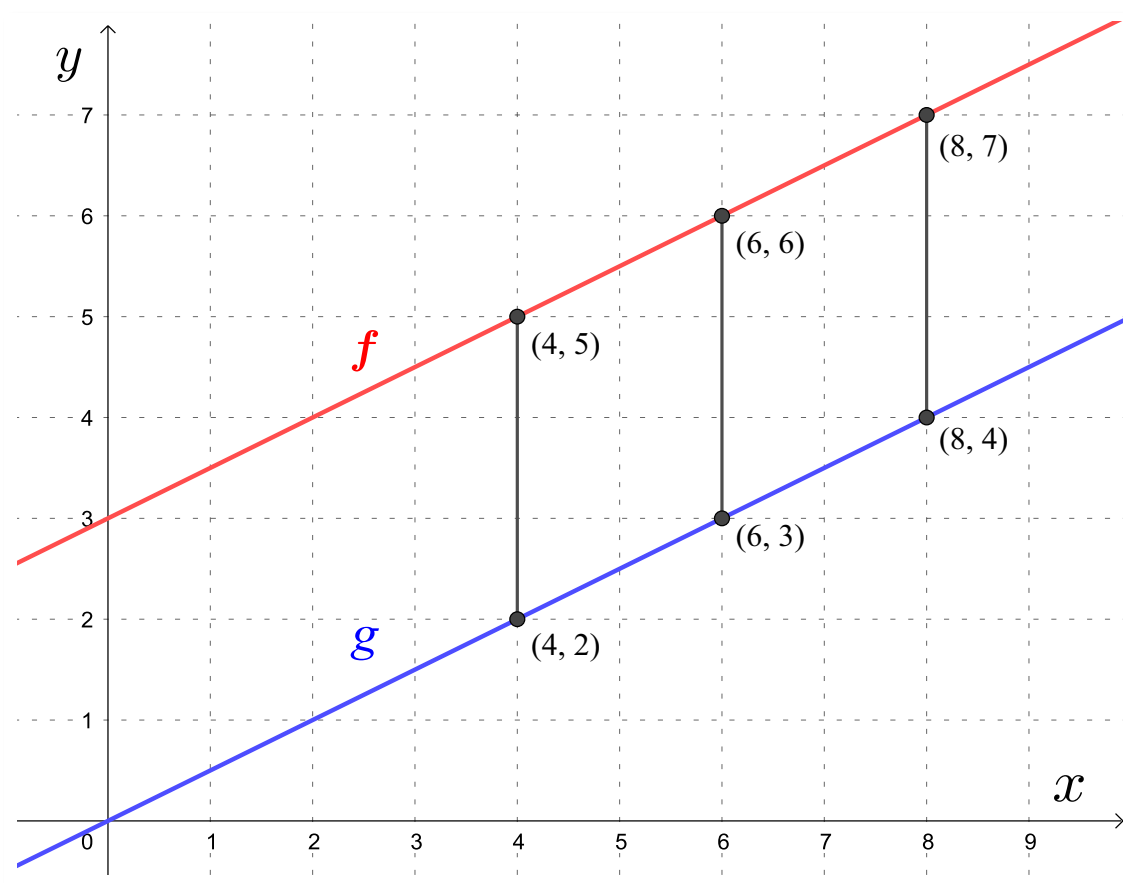
Una forma posible consiste en partir del punto $(6; 6)$ y realizar varias veces el desplazamiento de dos unidades hacia la derecha y una hacia arriba, hasta llegar al punto $R=(12; 9)$.



Otra alternativa posible sería que, a partir de los puntos $(0; 3)$ y $(6; 6)$, observen que, desplazándose **6** unidades a la derecha y **3** hacia arriba, pueden obtener otro punto de la recta f . Por lo tanto, el punto R tendrá las coordenadas $(12; 9)$.



Algunos estudiantes podrían hallar las coordenadas del punto R , a partir de la comparación entre puntos pertenecientes a las rectas f y g —paralelas— que comparten el mismo valor de abscisa. Es posible observar que la distancia entre un punto perteneciente a f y uno perteneciente a g , es siempre 3. De este modo podrían apoyarse en el punto $P=(12; 6)$ para obtener $R=(12; 9)$.



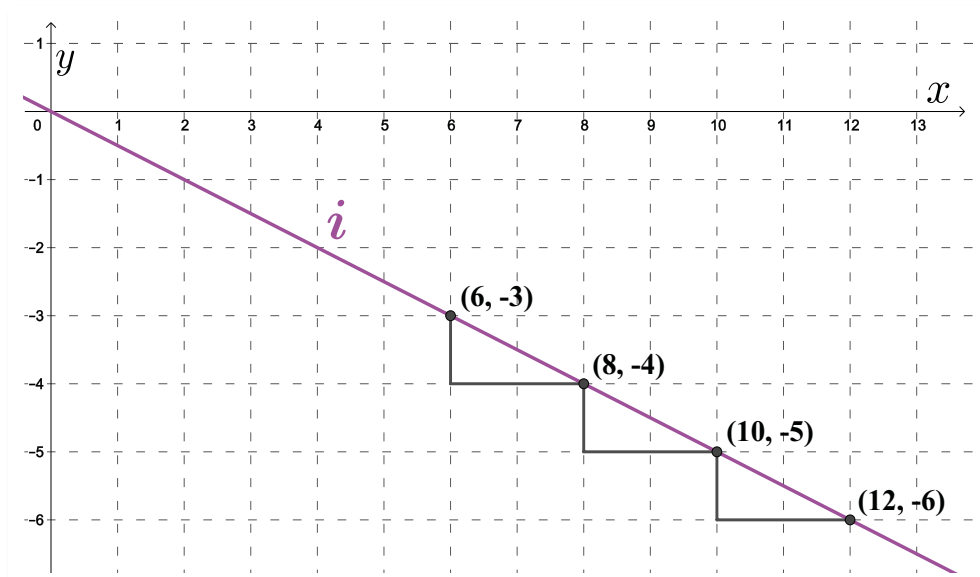
En la consigna **c**, los dos primeros valores de la tabla pueden obtenerse de la lectura directa del gráfico. Para el tercer punto, los estudiantes podrían establecer que cada dos unidades de desplazamiento hacia la derecha, deben desplazarse una unidad hacia abajo y de este modo obtener el punto $(6; -3)$. De manera análoga pueden obtenerse los puntos $(8; -4)$, $(10; -5)$ y $(12; -6)$.

En el espacio colectivo, podrán quedar explícitas las regularidades encontradas en la tabla y en los gráficos y cómo estas se reconocen en cada representación.

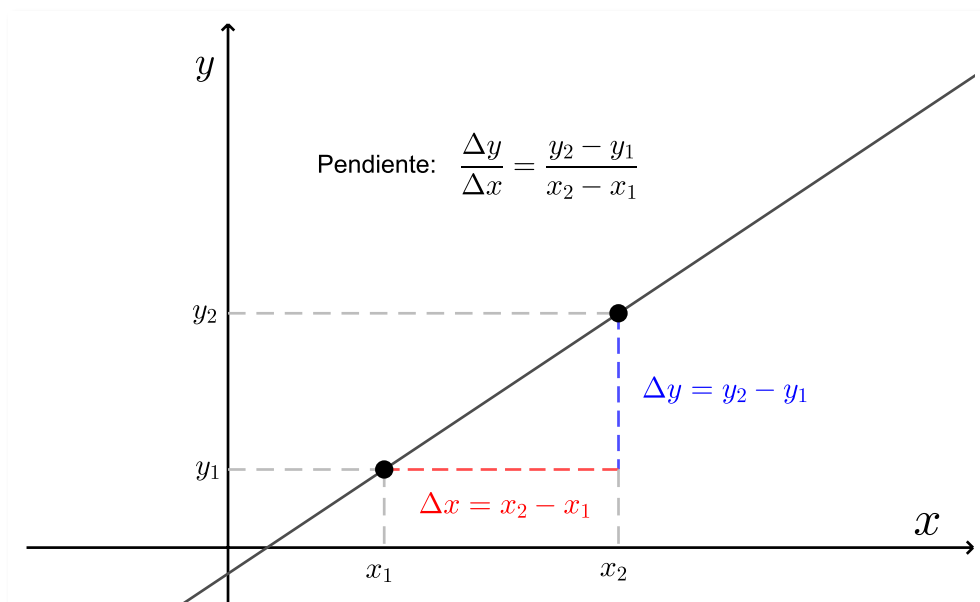
x	y
0	0
-4	2
6	-3
8	-4
10	-5
12	-6

$+2 \left(\begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right) -1$



La consigna **d** apunta a que los estudiantes identifiquen que todos los puntos pertenecientes a la recta **h** tienen el mismo valor de ordenada: **2**. Además, podrán establecer que cualquier punto $(x; y)$ con y distinto de **2** no pertenece a la recta **h** y que todo punto de la forma $(x; 2)$ pertenece a la recta **h**. En el espacio colectivo, el docente podría poner en relación esta característica de los puntos pertenecientes a la recta **h** con el hecho de que su gráfica sea horizontal, a partir del trabajo con diferentes rectas horizontales y de estudiar qué pasa en cada una de ellas.



En la consigna **e**, para el análisis de las pendientes, se podrán recuperar conceptos ya elaborados durante el trabajo con funciones lineales y apoyarse en la noción de “variación por unidad” para obtener el valor de la pendiente correspondiente a cada recta. En los casos de **f** y **g**, podrá establecerse que, como cada dos unidades de x hay un desplazamiento de **1** unidad de y , entonces cada **1** unidad de x el desplazamiento de y será de **0,5** unidades (media unidad). Del mismo modo, se podrá determinar que la pendiente de **i** es **-0,5**. Para el caso de la recta **h**, al tomar cualquier desplazamiento de x , el valor de y es siempre el mismo, es decir, el desplazamiento de y es **0**. Por lo tanto, el valor de la pendiente es **0**. El espacio de discusión colectiva será una oportunidad para introducir o revisar la noción de pendiente, como el cociente entre los incrementos.

Además, se espera que los estudiantes puedan escribir la ecuación de cada recta y revisar todas las respuestas del problema con GeoGebra. Este uso del programa, como una herramienta de control, propiciará que adquieran en forma gradual autonomía para el trabajo en matemática.

En el problema 2 se espera que reutilicen lo trabajado en el problema 1 para encontrar el valor de la pendiente de cada recta. En este caso, se presentan tres rectas graficadas sin el apoyo de la cuadrícula ni la escala en los ejes, para que sea necesario recurrir a la definición de pendiente ya establecida.



Actividad 1.
Problema 2

Actividad 2. Exploración de las pendientes de las rectas con GeoGebra

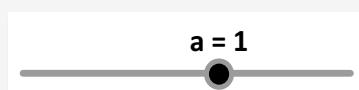
En esta actividad se propone un trabajo con parámetros asociados a las pendientes de distintas rectas. A partir de la exploración con GeoGebra, se propicia el planteo y la resolución de ecuaciones.

Exploración de las pendientes de las rectas con GeoGebra

Actividad 2

Problema 3

Abran el programa GeoGebra y seleccionen la herramienta *Deslizador* , hagan clic sobre la *Vista Gráfica*: se muestra un menú llamado *Deslizador*. Hagan clic en *Ok* y aparecerá definido con el nombre a .



Con la herramienta *Elige y Mueve*  pueden moverlo para obtener diferentes valores del deslizador. Ingresen a la barra de *Entrada* la siguiente ecuación: $y=ax-3$. Cuando mueven el dial del deslizador se obtienen las representaciones de distintas rectas. Guarden el archivo con el nombre *problema3.ggb*.

A continuación, respondan las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto tiene que valer a para que la raíz de la recta obtenida sea -3 ?
- ¿Cuánto tiene que valer a para que la recta obtenida contenga al punto $(2;1)$?
- ¿Cuánto tiene que valer la pendiente para que la recta obtenida corte al eje x en el punto $(2; 0)$?
- Decidan si los siguientes puntos pertenecen a esta recta:
 - $(4;3)$
 - $(3;1,5)$
 - $(8;10)$

- e. Si la recta obtenida tiene raíz 4, ¿cuál es su pendiente?
- f. ¿Cuánto tiene que valer la pendiente para que la recta obtenida contenga al punto (4;-3)?

Problema 4

A partir de la ecuación de la recta $y=mx-2$, respondan:

- a. ¿Cuánto debe valer m para que la recta obtenida contenga al punto (4;3)?
- b. ¿Cuánto debe valer la pendiente para que la recta obtenida contenga al punto (-2;-0,5)?

← Actividad anterior

Actividad siguiente →

Para el problema 3 se decidió nombrar a al deslizador que representa la pendiente porque es el nombre que aparece predeterminado en GeoGebra. Si el docente lo desea, puede ajustarlo a la notación habitual con la que trabajan en el aula. En ambos casos, se sugiere unificar la denominación del deslizador para facilitar los intercambios en las discusiones colectivas.

En la consigna a, para que la raíz sea -3, los estudiantes pueden desplazar el dial del deslizador e identificar que a debe valer -1. En la consigna b, nuevamente a partir del movimiento del deslizador puede establecerse que a debe valer 2. Los dos ítems anteriores ofrecen una oportunidad para plantear las ecuaciones que permiten verificar si los valores encontrados mediante la exploración con el deslizador son exactos. En este caso, las ecuaciones a resolver serán:

$$a \cdot (-3) - 3 = 0 \quad \text{y} \quad a \cdot 2 - 3 = 1$$

Una resolución posible consiste en pensar cuál es el valor de a para que el resultado sea 0 o 1, según corresponda en cada caso. Es decir, no es necesario recurrir a técnicas de despeje para resolver las ecuaciones. Por ejemplo: para que se cumpla que $a \cdot 2 - 3 = 1$, $a \cdot 2$ debe valer 4 por lo que $a=2$.

Si bien es importante que el docente identifique con claridad los diferentes usos de las letras, es esperable que estos sentidos no sean atrapados por los estudiantes como resultado de una sola clase o de un solo debate. La complejidad del contenido en cuestión plantea la necesidad de ofrecer a los estudiantes distintas oportunidades de poner en juego los diferentes usos de las letras —como variables y como parámetros— y también, gradualmente, ir formalizando las relaciones algebraicas que se desprenden de las resoluciones obtenidas con GeoGebra.

En la consigna **c**, al igual que en las anteriores, puede establecerse el valor de a , a partir de mover el dial del deslizador hasta encontrar la recta que contiene al punto $(2; 0)$. Sin embargo, en este caso, el valor que toma el deslizador es un número racional. Este hecho puede invitar a aquellos estudiantes que no apelaron a la ecuación en los casos anteriores a utilizarla en esta oportunidad. Aquí la ecuación planteada será: $a \cdot 2 - 3 = 0$. Nuevamente, para resolverla, es posible obtener —mediante un cálculo mental— el número que multiplicado por 2 da como resultado 3; sin recurrir a ningún mecanismo de despeje.

La segunda parte de este ítem propone identificar si algunos puntos pertenecen, o no, a la recta $y = 1,5x - 3$. En algunos casos, como el punto $(4; 3)$, se podría obtener de la lectura directa del gráfico. En otros, se pueden realizar lecturas aproximadas que podrían validarse a través de la ecuación de la recta.

El punto $(4; 0)$ —de la consigna **e**— fue elegido de manera intencional para que el valor de la pendiente $a = 0,75$ no pueda ser atrapado con un movimiento directo del deslizador (por defecto tiene un incremento de un décimo). El propósito es que los estudiantes recurran a la resolución algebraica. Para encontrar el valor de a , los estudiantes podrían plantear la ecuación $0 = a \cdot 4 - 3$ y resolverla. En la resolución podrían apelar a la utilización de técnicas de despeje o apoyarse en conocimientos sobre los números racionales para obtener el valor de a .

En relación a la consigna **f**, es posible utilizar el deslizador para determinar que el valor de a debe ser 0. Otra opción es que los estudiantes observen que la ordenada del punto $(4; -3)$ coincide con la ordenada al origen de la recta. Por este motivo, la pendiente de la misma debería ser 0 y todos los puntos de esta recta tienen ordenada -3 . En una instancia de trabajo colectivo, podría ser interesante retomar el problema 1 y comparar la ecuación de esta recta con la de la recta h : ambas tienen pendiente cero y sus gráficas son rectas horizontales.

En el problema 4 se espera que los estudiantes puedan poner en juego estrategias desplegadas en los problemas anteriores como, por ejemplo:

- Explorar el valor de la pendiente en GeoGebra.
- Comprobar el valor que obtienen reemplazando en la ecuación.
- Resolver la ecuación y comprobarlo en GeoGebra.

Si bien la resolución algebraica constituye la validación formal desde el punto de vista matemático, desde la perspectiva didáctica, la multiplicidad de abordajes del problema fortalece en los estudiantes la conceptualización porque pone en diálogo lo algebraico con lo gráfico. A su vez,



esta multiplicidad propicia la autonomía en el trabajo matemático de los estudiantes, porque provee instancias de control de las resoluciones algebraicas.

Al finalizar este problema, y como síntesis de toda la actividad, podrán quedar registradas algunas ideas principales como:

- Si se comparan puntos pertenecientes a dos rectas paralelas que comparten el mismo valor de abscisa, la distancia entre dichos puntos es siempre la misma.
- Dados dos puntos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ pertenecientes a una recta, su pendiente puede calcularse como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- La pendiente de una recta puede ser identificada tanto en el gráfico de la recta como en su fórmula.
- Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente.
- Las rectas horizontales tienen pendiente igual a cero. Todos los puntos que pertenecen a una recta horizontal tienen el mismo valor en sus ordenadas.
- Para que un punto pertenezca a una recta, sus coordenadas deben verificar la ecuación de esa recta.

Actividad 3. Intersecciones entre rectas con GeoGebra

En esta actividad se propone trabajar con ecuaciones, a partir de buscar para qué valor de una de las pendientes dos rectas se cortan en un punto determinado. En los primeros problemas, la intersección puede obtenerse a partir de la exploración del gráfico. Sin embargo, a medida que se avanza en la secuencia, será necesario apelar a la resolución de las ecuaciones.

Intersecciones entre rectas con GeoGebra

Actividad 3

Problema 5

Abran el programa GeoGebra. Definan un deslizador a en la *Vista gráfica* e ingresen en la barra de *Entrada* las ecuaciones de las siguientes rectas:

$$\begin{aligned} f: y &= 2x + 1 \\ g: y &= ax - 2 \end{aligned}$$

Guarden el archivo con el nombre *problema5.ggb*. A continuación, respondan a las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto tiene que valer la pendiente a para que la recta g obtenida se corte con la recta f en el punto $(-2;-3)$?
- ¿Existe algún valor de a para el que las dos rectas tengan la misma raíz?
- Determinen, si es posible, cuánto debe valer a para que las rectas g y f se corten en el punto $(-4;-7)$.

Problema 6

A partir de las ecuaciones de la rectas respondan las siguientes preguntas:

$$f: y = 0,75x - 4$$

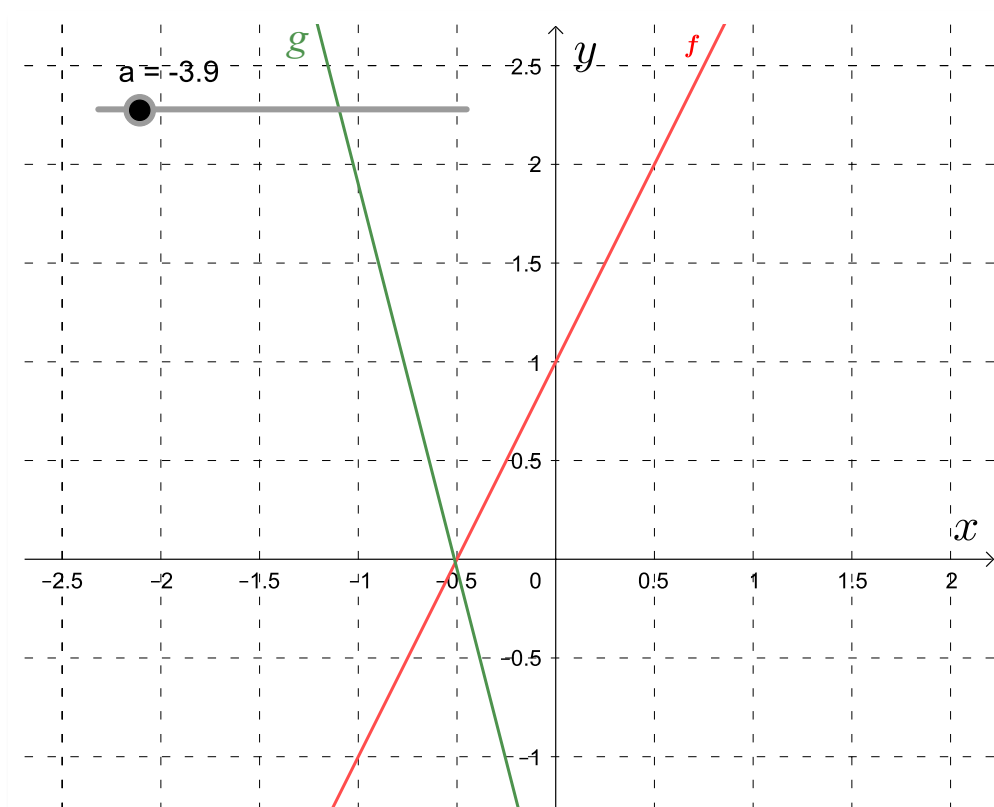
$$g: y = mx + 1$$

- ¿Existe algún valor de m para que las rectas f y g sean paralelas?
- ¿Cuánto debe valer m para que las rectas f y g tengan la misma raíz?

← Actividad anterior

Actividad siguiente →

Para la consigna **a** del problema 5, moviendo el dial del deslizador, los estudiantes pueden observar en la *Vista Gráfica* que para $a=0,5$, las rectas se intersecan en el punto $(-2; -3)$. La discusión acerca de la necesidad de validar algebraicamente puede justificar la necesidad de plantear y resolver la ecuación $a \cdot (-2) - 2 = -3$. Será importante destacar en esta oportunidad que el punto $(-2; -3)$ también pertenece a la recta f dado que verifica su ecuación.



Para la consigna **b**, la raíz no es un valor que los estudiantes puedan observar en la cuadrícula de la *Vista Gráfica*. Al mover el deslizador, para $a=-3,9$ y $a=-4$ las raíces de ambas rectas parecen coincidir. Una posibilidad que brinda GeoGebra es la de hacer zoom con la herramienta *Aproximar*  sobre la *Vista Gráfica* de modo de agrandar la escala de los ejes y poder tener mayor precisión en la lectura. Así, es posible observar que para el caso de $a=-3,9$ las raíces de las rectas no coinciden.

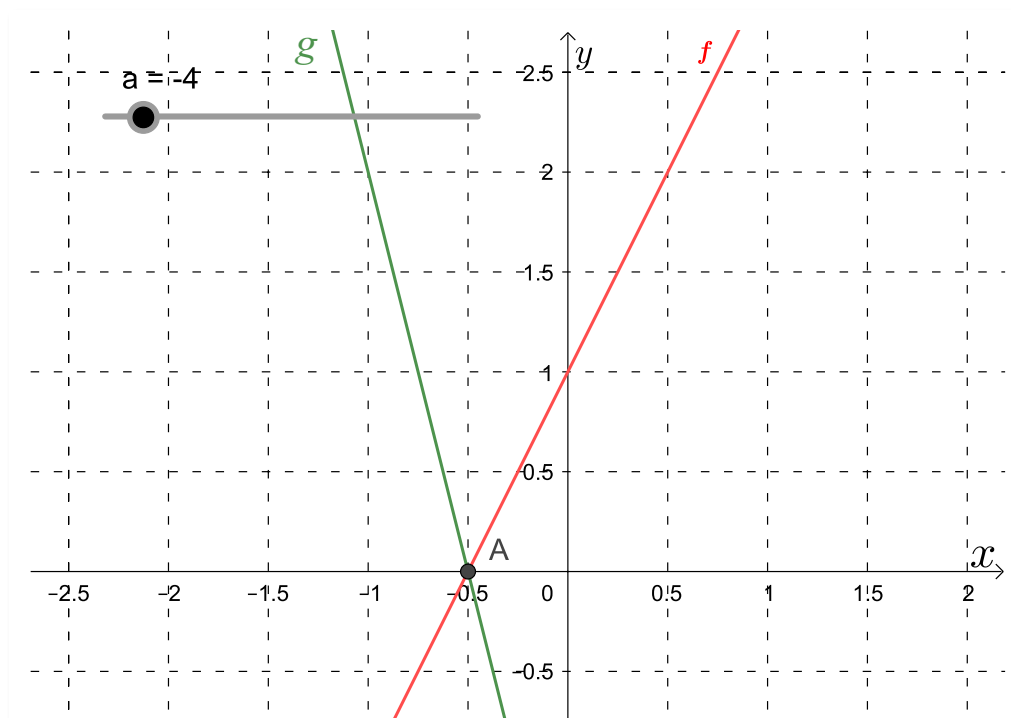
Si bien la herramienta *Aproximar*  permite descartar el valor $3,9$, pueden usarse estos valores para poner en debate “cuántas veces es necesario acercar el zoom” para estar seguros de que el valor observado es el correcto. Nuevamente, esta instancia ofrece una oportunidad para explicitar la necesidad de validar algebraicamente las conjeturas obtenidas a partir de la exploración con GeoGebra.

Para esta validación, en primer lugar, se hace necesario establecer el valor de la raíz de la recta f . A partir de la ecuación $2x+1=0$, los estudiantes podrán determinar que $x=0,5$.

Luego, reemplazando este valor en la ecuación de la recta g , podrán plantear la ecuación $a \cdot 0,5 - 2 = 0$ y determinar que el valor de a debe ser 4.

Otro recorrido posible que ofrece el programa es el uso de la herramienta *Intersección* . Con esta elección, los estudiantes podrán obtener en la *Vista Algebraica* las coordenadas del punto buscado.

Nuevamente, en un espacio de discusión colectiva, se podrá sistematizar con los estudiantes la necesidad de comprobar que las coordenadas del punto encontrado verifican las ecuaciones de ambas rectas.



En la consigna **c**, al explorar con GeoGebra, se pueden obtener valores aproximados de a . Los estudiantes podrán establecer que a es un valor que se encuentra entre 1,2 y 1,3, es decir: $1,2 < a < 1,3$. Sin embargo, no será posible que encuentren el valor exacto ($a=1,25$) usando GeoGebra. Esto sucede porque el programa utiliza, por defecto, un decimal para el incremento del deslizador. En este caso, será necesario apelar al álgebra no solo para validar, sino también para encontrar el valor exacto de a , a partir de la ecuación $a \cdot (-4) - 2 = -7$.

El problema 6 apunta a que los estudiantes —a partir de lo elaborado en los problemas anteriores— puedan plantear y resolver las ecuaciones para hallar el valor de m en cada caso. Si bien algunos estudiantes podrán seguir apoyándose en la exploración y anticipación de resultados mediante el uso de GeoGebra, será importante que se llegue a sistematizar la necesidad de validar los resultados obtenidos a partir de las resoluciones algebraicas.

Al finalizar esta actividad, podrían quedar registradas algunas ideas como:

- El punto de intersección de dos rectas pertenece al gráfico de cada una de ellas.
- El punto de intersección de dos rectas debe verificar las ecuaciones de ambas rectas.

Actividad 4. Integración

En esta actividad se propone analizar y reflexionar sobre el camino recorrido a través de los problemas realizados y los aprendizajes adquiridos.

Integración

Actividad 4

- En parejas, armen un listado con ideas y ejemplos de lo que aprendieron en estas actividades. Las siguientes preguntas son para ayudarlos a pensar:
 - ¿Qué les resultó más fácil? ¿Y más difícil?
 - ¿Qué aprendieron de sus compañeros?
 - ¿Qué errores tuvieron al resolver los problemas y cómo se dieron cuenta de que eran errores?
- Escriban un listado de reglas que les parezcan importantes recordar para el trabajo con GeoGebra. Por ejemplo:
 - Para usar un **Deslizador**  en el lugar de la pendiente de la ecuación de la recta, hay que definirlo primero y después ingresarlo en la ecuación.

- La herramienta *Intersección*  sirve para encontrar el punto en el que se cortan dos rectas.
- c. Escriban un listado de las cuestiones que les parezcan importantes recordar sobre lo que aprendieron de la ecuación de la recta y la resolución de ecuaciones. Por ejemplo:
 - Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente.
 - Si el gráfico de una recta es horizontal, su pendiente vale cero.



Actividad
anterior

En esta actividad se espera que los estudiantes puedan analizar y reflexionar sobre el camino recorrido a través de los problemas resueltos y los aprendizajes adquiridos. A su vez, se espera que sea para el docente una oportunidad de evaluar qué ideas se encuentran más afianzadas y sobre cuáles será necesario seguir trabajando. En este sentido, una posible gestión de la clase es que los estudiantes resuelvan las actividades en pequeños grupos sin intervención docente y luego, en una discusión colectiva, se socialicen y debatan las diferentes ideas y argumentos.

Orientaciones para la evaluación

Como se mencionó en la introducción, este material presenta una posible secuencia didáctica para el trabajo con la ecuación de la recta con GeoGebra, que continúa y amplía lo realizado en *Ecuación de la recta y resolución de ecuaciones con GeoGebra. Parte 1*. Utilizar un programa de álgebra y geometría dinámica —como GeoGebra— permitirá a los estudiantes explorar las gráficas de las rectas y analizar sus respectivas ecuaciones, para avanzar hacia la validación algebraica.



Ecuación de la recta y resolución de ecuaciones con GeoGebra. Parte 1

En relación con el uso de GeoGebra, se intenta que los estudiantes profundicen sus conocimientos sobre el programa, al mismo tiempo que resuelven los problemas. En esta secuencia, se intenta promover un desarrollo dialéctico entre la apropiación del programa y la posibilidad de avanzar en el análisis de las gráficas de las rectas y sus respectivas ecuaciones. Es decir, conocer más sobre el uso de GeoGebra permite planificar y abordar en mejores condiciones el trabajo con ecuaciones en este programa. A su vez, conocer progresivamente más sobre las ecuaciones con las que se trabaja permite buscar, elegir y analizar mejor las herramientas que ofrece el programa.

En ese sentido, algunos indicadores de avance en los conocimientos que los estudiantes han adquirido, fruto del trabajo con los problemas planteados, pueden ser:

- La progresiva identificación de procedimientos erróneos e incompletos.
- La identificación de procedimientos adecuados y su reutilización y adaptación para la resolución de nuevas situaciones.
- La progresiva apropiación de herramientas matemáticas para la utilización y la interpretación de los diferentes registros de representación, así como el análisis de la información que brinda cada uno de ellos.
- La progresiva apropiación de la necesidad de validar algebraicamente las conjeturas elaboradas a partir de las exploraciones con los gráficos, tanto las propias como las de sus compañeros.
- El avance hacia la incorporación de los diferentes usos de las letras: como variable y como parámetro.
- La formulación de conjeturas que tengan paulatinamente un mayor grado de generalidad, avanzando desde el análisis de casos particulares a la elaboración de argumentos que sostengan ciertas generalizaciones.
- El avance en la utilización del programa GeoGebra para realizar las construcciones propuestas, en términos de la selección y el uso de las herramientas.

Bibliografía

- G.C.B.A. Ministerio de Educación. [*Diseño Curricular para la Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad de Buenos Aires*](#). Formación General. Ciclo Básico del bachillerato, 2015, pp. 510-534.
- Novembre, A.; Nicodemo, M. y Coll, P. [*Matemática y TIC. Orientaciones para la enseñanza*](#). ANSES, Buenos Aires, 2015.

Notas

- 1 Es posible que, al intentar instalar GeoGebra, se solicite la instalación de [Java](#). Si esto llegara a suceder, deberá instalarse primero este programa.
- 2 Es posible modificar el incremento del deslizador ingresando a su configuración.
- 3 El incremento del deslizador puede modificarse a través de sus propiedades. Sugerimos la lectura del anexo “Funciones y ecuaciones con GeoGebra”.



Vamos Buenos Aires