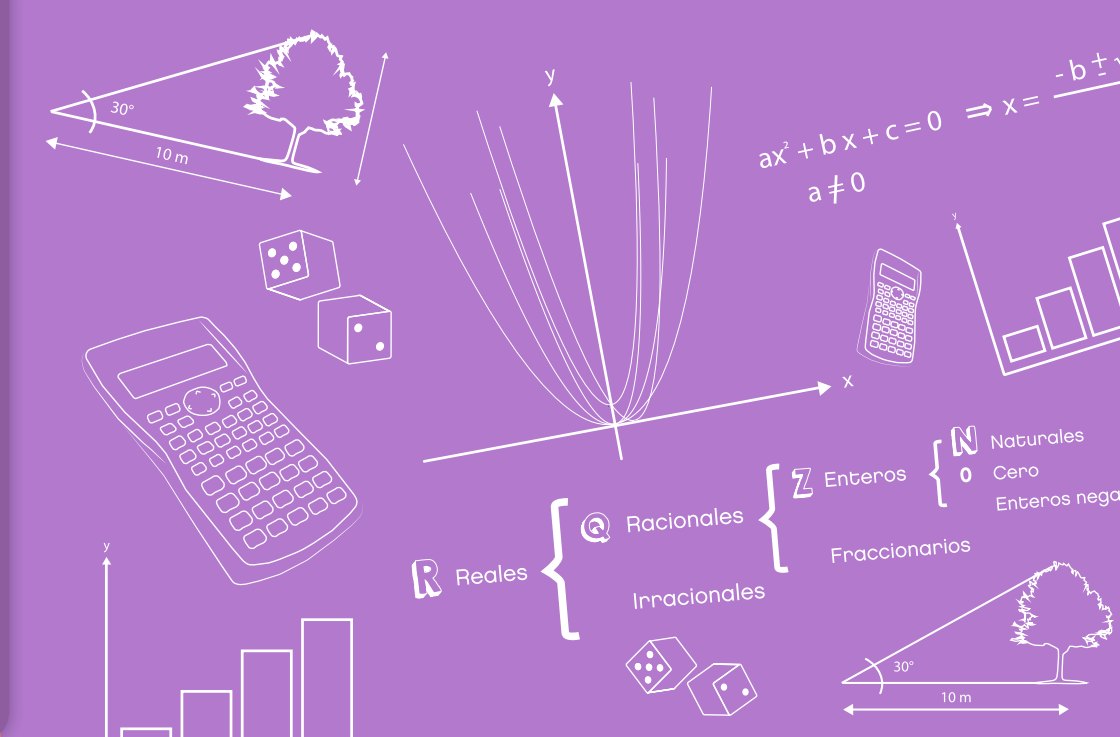


Matemática



Segundo año

Ecuación de la recta y resolución de ecuaciones con GeoGebra. Parte 1

Serie PROFUNDIZACIÓN • NES



Buenos Aires Ciudad



Vamos Buenos Aires

JEFE DE GOBIERNO

Horacio Rodríguez Larreta

MINISTRA DE EDUCACIÓN E INNOVACIÓN

María Soledad Acuña

SUBSECRETARIO DE PLANEAMIENTO E INNOVACIÓN EDUCATIVA

Diego Javier Meiriño

DIRECTORA GENERAL DE PLANEAMIENTO EDUCATIVO

María Constanza Ortiz

GERENTE OPERATIVO DE CURRÍCULUM

Javier Simón

SUBSECRETARIA DE COORDINACIÓN PEDAGÓGICA Y EQUIDAD EDUCATIVA

Andrea Fernanda Bruzos Bouchet

SUBSECRETARIO DE CARRERA DOCENTE Y FORMACIÓN TÉCNICA PROFESIONAL

Jorge Javier Tarulla

SUBSECRETARIO DE GESTIÓN ECONÓMICO FINANCIERA

Y ADMINISTRACIÓN DE RECURSOS

Sebastián Tomaghelli

SUBSECRETARÍA DE PLANEAMIENTO E INNOVACIÓN EDUCATIVA (SSPLINED)

DIRECCIÓN GENERAL DE PLANEAMIENTO EDUCATIVO (DGPLEDU)

GERENCIA OPERATIVA DE CURRÍCULUM (GOC)

Javier Simón

EQUIPO DE GENERALISTAS DE NIVEL SECUNDARIO: Isabel Malamud (coordinación), Cecilia Bernardi, Bettina Bregman, Ana Campelo, Julieta Jakubowicz, Marta Libedinsky, Carolina Lifschitz, Julieta Santos

ESPECIALISTAS: Carla Cabalcabué, Rosa María Escayola, Valeria Ricci, Ruth Schaposchnik, Inés Zuccarelli

COORDINACIÓN DE MATERIALES Y CONTENIDOS DIGITALES (DGPLEDU): Mariana Rodríguez

COLABORACIÓN Y GESTIÓN: Manuela Luzzani Ovide

COORDINACIÓN DE SERIES PROFUNDIZACIÓN NES Y

PROPUESTAS DIDÁCTICAS PRIMARIA: Silvia Saucedo

EQUIPO EDITORIAL EXTERNO

COORDINACIÓN EDITORIAL: Alexis B. Tellechea

DISEÑO GRÁFICO: Estudio Cerúleo

EDICIÓN: Fabiana Blanco, Natalia Ribas

CORRECCIÓN DE ESTILO: Lupe Devezza

IDEA ORIGINAL DE PROYECTO DE EDICIÓN Y DISEÑO (GOC)

EDICIÓN: Gabriela Berajá, María Laura Cianciolo, Andrea Finocchiario, Bárbara Gomila, Marta Lacour, Sebastián Vargas

DISEÑO GRÁFICO: Octavio Bally, Silvana Carretero, Ignacio Cismondi, Alejandra Mosconi, Patricia Peralta

ACTUALIZACIÓN WEB: Leticia Lobato

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires
Matemática : ecuación de la recta y resolución de ecuaciones con GeoGebra. - 1a edición
para el profesor - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
Ministerio de Educación e Innovación, 2018.
Libro digital, PDF - (Profundización NES)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-673-405-9

1. Matemática. 2. Educación Secundaria.
CDD 510.712

ISBN 978-987-673-405-9

Se autoriza la reproducción y difusión de este material para fines educativos u otros fines no comerciales, siempre que se especifique claramente la fuente.
Se prohíbe la reproducción de este material para reventa u otros fines comerciales.

Las denominaciones empleadas en este material y la forma en que aparecen presentados los datos que contiene no implica, de parte del Ministerio de Educación e Innovación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, juicio alguno sobre la condición jurídica o nivel de desarrollo de los países, territorios, ciudades o zonas, o de sus autoridades, ni respecto de la delimitación de sus fronteras o límites.

En este material se evitó el uso explícito del género femenino y masculino en simultáneo y se ha optado por emplear el género masculino, a efectos de facilitar la lectura y evitar las duplicaciones. No obstante, se entiende que todas las menciones en el género masculino representan siempre a varones y mujeres, salvo cuando se especifique lo contrario.

Fecha de consulta de imágenes, videos, textos y otros recursos digitales disponibles en internet: 15 de noviembre de 2018.

© Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires / Ministerio de Educación e Innovación / Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.
Dirección General de Planeamiento Educativo / Gerencia Operativa de Currículum, 2018.

Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa / Dirección General de Planeamiento Educativo / Gerencia Operativa de Currículum.
Holmberg 2548/96, 2º piso - C1430DOV - Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

© Copyright © 2018 Adobe Systems Software. Todos los derechos reservados.
Adobe, el logo de Adobe, Acrobat y el logo de Acrobat son marcas registradas de Adobe Systems Incorporated.

Presentación

La serie de materiales Profundización de la NES presenta distintas propuestas de enseñanza en las que se ponen en juego tanto los contenidos –conceptos, habilidades, capacidades, prácticas, valores y actitudes– definidos en el *Diseño Curricular de la Nueva Escuela Secundaria* de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Resolución N.º 321/MEGC/2015, como nuevas formas de organizar los espacios, los tiempos y las modalidades de enseñanza.

El tipo de propuestas que se presentan en esta serie se corresponde con las características y las modalidades de trabajo pedagógico señaladas en la Resolución CFE N.º 93/09 para fortalecer la organización y la propuesta educativa de las escuelas de nivel secundario de todo el país. Esta norma –actualmente vigente y retomada a nivel federal por la propuesta “Secundaria 2030”, Resolución CFE N.º 330/17– plantea la necesidad de instalar “distintos modos de apropiación de los saberes que den lugar a: nuevas formas de enseñanza, de organización del trabajo de los profesores y del uso de los recursos y los ambientes de aprendizaje”. Se promueven también nuevas formas de agrupamiento de los estudiantes, diversas modalidades de organización institucional y un uso flexible de los espacios y los tiempos que se traduzcan en propuestas de talleres, proyectos, articulación entre materias, debates y organización de actividades en las que participen estudiantes de diferentes años. En el ámbito de la Ciudad, el *Diseño Curricular de la Nueva Escuela Secundaria* incorpora temáticas nuevas y emergentes y abre la puerta para que en la escuela se traten problemáticas actuales de significatividad social y personal para los estudiantes.

Existe acuerdo sobre la magnitud de los cambios que demanda la escuela secundaria para lograr convocar e incluir a todos los estudiantes y promover efectivamente los aprendizajes necesarios para el ejercicio de una ciudadanía responsable y la participación activa en ámbitos laborales y de formación. Es importante resaltar que, en la coyuntura actual, tanto los marcos normativos como el *Diseño Curricular* jurisdiccional en vigencia habilitan e invitan a motorizar innovaciones imprescindibles.

Si bien ya se ha recorrido un importante camino en este sentido, es necesario profundizar, extender e instalar propuestas que efectivamente hagan de la escuela un lugar convocante para los estudiantes y que, además, ofrezcan reales oportunidades de aprendizaje. Por lo tanto, sigue siendo un desafío:

- El trabajo entre docentes de una o diferentes áreas que promueva la integración de contenidos.
- Planificar y ofrecer experiencias de aprendizaje en formatos diversos.
- Elaborar propuestas que incorporen oportunidades para el aprendizaje y el ejercicio de capacidades.

Los materiales elaborados están destinados a los docentes y presentan sugerencias, criterios y aportes para la planificación y el despliegue de las tareas de enseñanza, desde estos lineamientos. Se incluyen también propuestas de actividades y experiencias de aprendizaje para los estudiantes y orientaciones para su evaluación. Las secuencias han sido diseñadas para admitir un uso flexible y versátil de acuerdo con las diferentes realidades y situaciones institucionales.

La serie reúne dos líneas de materiales: una se basa en una lógica disciplinar y otra presenta distintos niveles de articulación entre disciplinas (ya sean areales o interareales). Se introducen también materiales que aportan a la tarea docente desde un marco didáctico con distintos enfoques de planificación y de evaluación para acompañar las diferentes propuestas.

El lugar otorgado al abordaje de problemas interdisciplinarios y complejos procura contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y de la argumentación desde perspectivas provenientes de distintas disciplinas. Se trata de propuestas alineadas con la formación de actores sociales conscientes de que las conductas individuales y colectivas tienen efectos en un mundo interdependiente.

El énfasis puesto en el aprendizaje de capacidades responde a la necesidad de brindar a los estudiantes experiencias y herramientas que permitan comprender, dar sentido y hacer uso de la gran cantidad de información que, a diferencia de otras épocas, está disponible y fácilmente accesible para todos. Las capacidades son un tipo de contenidos que debe ser objeto de enseñanza sistemática. Para ello, la escuela tiene que ofrecer múltiples y variadas oportunidades para que los estudiantes las desarrollen y consoliden.

Las propuestas para los estudiantes combinan instancias de investigación y de producción, de resolución individual y grupal, que exigen resoluciones divergentes o convergentes, centradas en el uso de distintos recursos. También, convocan a la participación activa de los estudiantes en la apropiación y el uso del conocimiento, integrando la cultura digital. Las secuencias involucran diversos niveles de acompañamiento y autonomía e instancias de reflexión sobre el propio aprendizaje, a fin de habilitar y favorecer distintas modalidades de acceso a los saberes y los conocimientos y una mayor inclusión de los estudiantes.

En este marco, los materiales pueden asumir distintas funciones dentro de una propuesta de enseñanza: explicar, narrar, ilustrar, desarrollar, interrogar, ampliar y sistematizar los contenidos. Pueden ofrecer una primera aproximación a una temática formulando dudas e interrogantes, plantear un esquema conceptual a partir del cual profundizar, proponer

actividades de exploración e indagación, facilitar oportunidades de revisión, contribuir a la integración y a la comprensión, habilitar oportunidades de aplicación en contextos novedosos e invitar a imaginar nuevos escenarios y desafíos. Esto supone que en algunos casos se podrá adoptar la secuencia completa o seleccionar las partes que se consideren más convenientes; también se podrá plantear un trabajo de mayor articulación entre docentes o un trabajo que exija acuerdos entre los mismos. Serán los equipos docentes quienes elaborarán propuestas didácticas en las que el uso de estos materiales cobre sentido.

Iniciamos el recorrido confiando en que constituirá un aporte para el trabajo cotidiano. Como toda serie en construcción, seguirá incorporando y poniendo a disposición de las escuelas de la Ciudad nuevas propuestas, dando lugar a nuevas experiencias y aprendizajes.

Diego Javier Meiriño
Subsecretario de Planeamiento
e Innovación Educativa

Gabriela Laura Gürtner
Jefa de Gabinete de la Subsecretaría de
Planeamiento e Innovación Educativa

¿Cómo se navegan los textos de esta serie?

Los materiales de Profundización de la NES cuentan con elementos interactivos que permiten la lectura hipertextual y optimizan la navegación.

Para visualizar correctamente la interactividad se sugiere bajar el programa [Adobe Acrobat Reader](#) que constituye el estándar gratuito para ver e imprimir documentos PDF.



Portada



Flecha interactiva que lleva a la página posterior.

Índice interactivo

 **Introducción**

Plaquetas que indican los apartados principales de la propuesta.

Actividades

Exploración de rectas con GeoGebra

Actividad 1

Problema 1

En este problema van a trabajar con la ecuación de la recta y su gráfica en el programa

 Actividad anterior

Actividad siguiente 

Pie de página



Volver a vista anterior



Al clicar regresa a la última página vista.



Ícono que permite imprimir.



Folio, con flechas interactivas que llevan a la página anterior y a la página posterior.

Itinerario de actividades

 **Actividad 1**

Exploración de rectas con GeoGebra

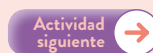
Iniciar el trabajo con rectas en GeoGebra: ingresar fórmulas en la barra de *Entrada*, observar qué muestran la *Vista Gráfica* y

1

Organizador interactivo que presenta la secuencia completa de actividades.



Botón que lleva a la actividad anterior.



Botón que lleva a la actividad siguiente.



Sistema que señala la posición de la actividad en la secuencia.

Íconos y enlaces

- 1 Símbolo que indica una cita o nota aclaratoria. Al clicar se abre un *pop-up* con el texto:

Los números indican las referencias de notas al final del documento.

Ovidescim repti ipita voluptis audi iducit ut qui adis moluptur? Quia poria dusam serspero voloris quas quid moluptur?Luptat. Upti cumAgnimustrum est ut

El color azul y el subrayado indican un [vínculo](#) a la web o a un documento externo.



Indica enlace a un texto, una actividad o un anexo.

“Título del texto, de la actividad o del anexo”



Indica apartados con orientaciones para la evaluación.

Índice interactivo



Introducción



Contenidos y objetivos de aprendizaje



Itinerario de actividades



Orientaciones didácticas y actividades



Orientaciones para la evaluación



Bibliografía

Introducción

Esta secuencia didáctica propone el estudio de problemas sobre la ecuación de la recta mediado por el uso de la tecnología, en particular de GeoGebra. Este programa fue creado con el propósito de enseñar y aprender matemática permitiendo trabajar en forma simultánea con los registros gráfico y algebraico de un mismo objeto matemático. Tiene la característica de ser libre y de multiplataforma, por lo que dispone de un sitio web para instalarlo en forma gratuita. Se sugiere utilizar la versión [GeoGebra Clásico 5](#) y se aclara que no es indispensable disponer de conectividad para la implementación de este material.

En esta propuesta no es necesario que los estudiantes tengan experiencia previa con el programa. Se presenta una actividad inicial que permite explorar las herramientas de GeoGebra y, a medida que se suceden las actividades, se continúa reflexionando sobre el potencial del programa para resolver los problemas, al mismo tiempo que se ponen en juego los contenidos matemáticos previstos.

La incorporación de un recurso tecnológico implica el aprendizaje de una nueva herramienta, tanto para los estudiantes como para el docente. Desde la perspectiva con la que se elabora esta propuesta, se considera que resolver algunas actividades sencillas permite un acercamiento inicial al funcionamiento y las posibilidades de GeoGebra. Es decir, es posible aprender a utilizar el programa en la medida en que se resuelven problemas en este entorno. Estas herramientas serán un insumo valioso para el estudio de otros contenidos en matemática. Es importante destacar que no es necesario estudiar o aprender todas las herramientas que incluye el programa para comenzar a utilizarlo. La secuencia desarrollada aquí se plantea con este propósito y desde este enfoque. Para implementarla, se espera que los estudiantes hayan realizado un trabajo previo con función lineal, incluyendo la lectura y la construcción de gráficos.

Por otro lado, no se espera que los estudiantes encuentren por sí mismos todas las herramientas y las estrategias para resolver las actividades. De ser preciso, sobre la base de sus intentos, el docente puede explicar una herramienta y/o una estrategia posible para poner en juego y luego habilitar que ellos la reutilicen, la desarrollen y la transformen a fin de resolver otros problemas.

A lo largo del documento se presentarán, de modo orientativo, posibles estrategias y resoluciones de los estudiantes. Es probable que el trabajo con GeoGebra en el aula propicie un despliegue de alternativas de resolución mayor al que se da en otras situaciones de enseñanza, debido a la variedad de herramientas disponibles y a la facilidad de su utilización. Será importante que el docente habilite y estimule la producción de estrategias propias por parte de los estudiantes y dé cabida a sus ideas y a sus propuestas, ya sean ajustadas o incompletas, en

los espacios colectivos de discusión. Teniendo en cuenta esto, a lo largo de la secuencia se despliega un abanico de posibles estrategias y resoluciones, que podrán servir como ayuda y como referencia para futuras implementaciones de estas u otras actividades. Con estas anticipaciones no se aspira a que el docente pueda prever todo lo que sucederá efectivamente en la clase, sino a contribuir con el repertorio de procedimientos posibles y con la construcción de ciertos criterios y propósitos que, seguramente, cada docente podrá adecuar a las situaciones de intercambio que se produzcan con sus estudiantes.

A partir de la resolución y el análisis de los problemas que se proponen a lo largo de esta secuencia, se plantea un tipo de trabajo matemático que involucra la exploración y elaboración de conjeturas apoyado en las posibilidades que brinda GeoGebra. A su vez, algunas limitaciones del programa serán la base para que el docente introduzca la necesidad de validar algebraicamente esas conjeturas. Además, se promueve el debate de ideas y la producción colectiva en torno al análisis y la construcción de distintos registros de representación: gráfico y algebraico. Por un lado, es posible estudiar que las variaciones de una expresión algebraica –ecuación de la recta– se ven plasmadas en el gráfico que la representa. Estas variaciones se justifican a través del trabajo algebraico. En paralelo, el trabajo con la *Vista Gráfica* habilita la elaboración de conjeturas que podrán ser validadas o descartadas algebraicamente.

Para facilitar los intercambios colectivos en torno a los problemas, será importante acordar con los estudiantes la denominación de los objetos. Por este motivo se propone designar a las ecuaciones de las rectas y a los puntos con un nombre determinado. Se sugiere la lectura del anexo “Funciones y ecuaciones con GeoGebra”, el punto 8, Cambiar de nombre a los objetos.

En la primera actividad, se propone una introducción al trabajo con rectas con GeoGebra: ingreso de fórmulas en la barra de *Entrada*, desplazamiento de un punto sobre la gráfica de la recta, exploración y análisis de las *Vista Gráfica* y *Vista Algebraica*. En paralelo, se retoman algunos conceptos y procedimientos relacionados con la ecuación de la recta: lectura de puntos, raíz, ordenada al origen, condiciones para que un punto pertenezca, o no, a una recta determinada.

En la segunda actividad, el estudio se focaliza sobre el significado de la ordenada al origen, mediante la introducción de un deslizador. Esta herramienta de GeoGebra provee un modo accesible de introducir a los estudiantes en el manejo de variables parametrizadas. Este sentido diferente que tienen los distintos tipos de variables suele ser muy complejo de atrapar para los estudiantes y no se espera que quede resuelto con esta actividad.

En la tercera actividad, los estudiantes podrán analizar y reflexionar sobre el camino recorrido a través de las actividades realizadas y los aprendizajes adquiridos.



Contenidos y objetivos de aprendizaje

En esta propuesta se seleccionaron los siguientes contenidos y objetivos de aprendizaje del espacio curricular de Matemática para segundo año de la NES:

Ejes/Contenidos	Objetivos de aprendizaje	Capacidades
Funciones y álgebra <i>Ecuación de la recta</i> - Pendiente. Rectas paralelas. - Producción de la representación gráfica y de la ecuación de una recta a partir de ciertos datos: dos puntos cualesquiera, un punto y la pendiente, los puntos donde corta a los ejes. - Resolución de ecuaciones que involucren transformaciones algebraicas.	- Establecer relaciones entre resolución gráfica y algebraica. - Comprender que la elección de un modo de organizar y representar la información pone de relieve ciertos aspectos y oculta otros. - Valorar el intercambio entre pares como promotor del establecimiento de relaciones matemáticas y del establecimiento de la validez de los resultados y propiedades elaboradas.	Resolución de problemas.

La exploración y el uso del programa GeoGebra permiten enriquecer el quehacer matemático a partir del trabajo entre los marcos gráfico y algebraico. En particular, se busca que los estudiantes:

- Avancen en el uso de herramientas de GeoGebra para explorar y relacionar los registros gráfico (*Vista Gráfica*) y algebraico (*Vista Algebraica*) de un mismo objeto matemático.
- Adquieran estrategias propias del trabajo con deslizadores como parámetros de las ecuaciones de las rectas que les permitan interpretar de qué forma se modifican sus gráficas en función de la variación de estos parámetros.

Itinerario de actividades



Actividad 1

Exploración de rectas con GeoGebra

Iniciar el trabajo con rectas en GeoGebra: ingresar fórmulas en la barra de *Entrada*, observar qué muestran la *Vista Gráfica* y la *Vista Algebraica*, desplazar un punto sobre la recta. Revisar algunos conceptos y procedimientos relacionados con la ecuación de la recta: lectura de puntos, raíz, ordenada al origen, condiciones para que un punto pertenezca a la recta.

1



Actividad 2

Rectas y ecuaciones con GeoGebra

Explorar conjuntos de gráficas y de ecuaciones para establecer relaciones y comenzar a conceptualizar la condición de paralelismo y el significado de la ordenada al origen. Incorporar el uso de parámetros representados por deslizadores.

2



Actividad 3

Integración

Analizar y reflexionar sobre el camino recorrido a través de los problemas realizados y los aprendizajes adquiridos.

3

Orientaciones didácticas y actividades

En la implementación de estas actividades, se propone que los estudiantes trabajen en parejas con un dispositivo digital que tenga instalado el programa. Como alternativas, se podrá descargar una versión portable (que no requiere instalación previa), o también trabajar con el [applet de GeoGebra](#) en Internet.

A lo largo de las actividades, las distintas consignas hacen referencia a diferentes comandos del programa. Para facilitar su identificación, se han incorporado en este documento los íconos de las herramientas que se utilizarán:



Elige y
Mueve



Punto



Intersección



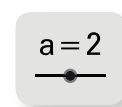
Desplaza
Vista Gráfica



Aproximar



Alejar



Deslizador

Con respecto al formato de las consignas de trabajo para los estudiantes, se puede elegir entre una actividad impresa o una proyección en el pizarrón. Cabe destacar que no es necesario disponer de conectividad para la implementación de esta secuencia.

Para una mejor comprensión de este documento, se sugiere explorar las construcciones mencionadas en paralelo a la lectura. Para quienes utilizan por primera vez GeoGebra, se recomienda la lectura del anexo “Funciones y ecuaciones con GeoGebra”.



Anexo.
Funciones y
ecuaciones con
GeoGebra

Actividad 1. Exploración de rectas con GeoGebra

A través del trabajo con el programa GeoGebra y la orientación del docente, en la presente actividad, se busca que los estudiantes revisen conceptos y procedimientos vinculados con las ecuaciones de las rectas.

Exploración de rectas con GeoGebra

Actividad 1

Problema 1

- En este problema van a trabajar con la ecuación de la recta y su gráfica en el programa GeoGebra. Abran el programa e ingresen en la barra de *Entrada* la siguiente ecuación:
 $y = 3x + 6$

En la *Vista Gráfica* aparecerá el gráfico de la recta y en la *Vista Algebraica* podrán ver su ecuación. Guarden el archivo con el nombre problema1.ggb.

A partir del gráfico de la recta, respondan:

- ¿Cuál es el valor de y si el punto $P = (-2; y)$ pertenece a la recta?
- ¿Cuál es el valor de x si el punto $Q = (x; 6)$ pertenece a la recta?
- ¿Cuál es el valor de y si el punto $R = (-3; y)$ no pertenece a la recta?
- Con la herramienta **Punto**  hagan clic sobre la recta. Quedará determinado un punto A . Con la herramienta **Elige y Mueve**  es posible desplazar el punto sobre la recta. A partir de la exploración del gráfico, traten de ubicar al punto de manera que sus coordenadas sean las que se indican en cada caso.
 - $A = (4; 18)$
 - $A = (-4,5; -7)$
 - $A = (1; 8,99)$
 - $A = (100; 306)$
 - $A = (-\frac{1}{3}; 5)$

En GeoGebra pueden ingresar puntos en la barra de *Entrada* teniendo en cuenta que las coordenadas se separan por una **coma**. Por ejemplo, para ingresar el punto $(1; 12)$ deben escribir: $(1, 12)$. Escriban las coordenadas de 3 puntos que pertenezcan y 3 que no pertenezcan a la recta graficada.

Problema 2

En un nuevo archivo de GeoGebra, ingresen en la barra de *Entrada* las ecuaciones de las siguientes rectas: $y = x - 1$, $y = x + 10$, $y = -3x + 6$
Guarden el archivo con el nombre problema2.ggb.

En la *Vista Gráfica* aparecerá el gráfico de cada recta y en la *Vista Algebraica* podrán ver sus ecuaciones. Cada una de ellas tiene asignado un nombre:

- $f: y = x - 1$
- $g: y = x + 10$
- $h: y = -3x + 6$

A partir del gráfico, respondan:

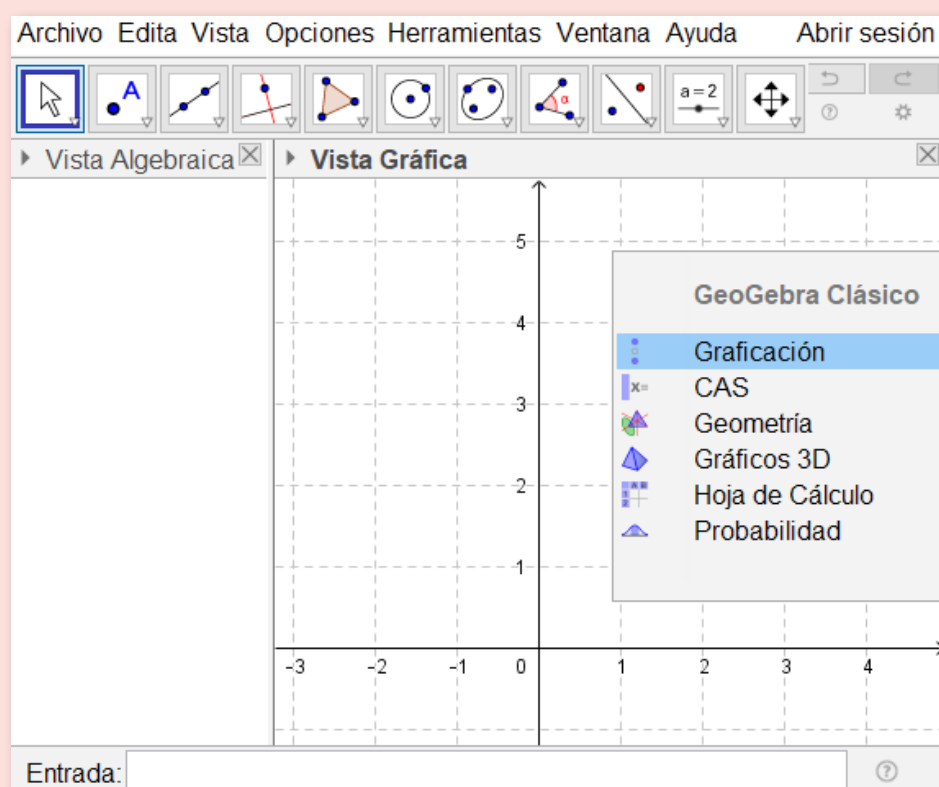
- ¿En qué punto se intersecan las rectas g y h ?
- ¿En qué punto se intersecan las rectas f y h ?
- Ingren en la barra de *Entrada* la recta de ecuación $y = -3(x - 2)$. El nombre que le asigna GeoGebra a esta recta es i . ¿Por qué en la *Vista Gráfica* no se distingue la recta i ?



El problema 1 presenta un primer trabajo con la ecuación de la recta, a partir del análisis de un conjunto de puntos para determinar si pertenecen a ella, ya sea desde la lectura directa de puntos en el gráfico o mediante la utilización de la ecuación de la recta. En paralelo, este trabajo se realiza en GeoGebra, programa que permite trabajar en simultáneo con dos representaciones del objeto: su ecuación en la *Vista Algebraica* y su representación en la *Vista Gráfica*. Para responder a las preguntas del problema, se propone trabajar con algunas herramientas de GeoGebra como:

- **Punto** : se puede construir un punto sobre la recta de manera tal que las coordenadas respondan a la ecuación de la recta.
- **Elige y Mueve** : permite desplazar un punto que fue determinado sobre la recta y explorar la variación de sus coordenadas.

Para la implementación de esta secuencia, sugerimos tener habilitado el entorno *Graficación*, debido a que, en este modo de trabajo, se muestran tanto la *Vista Algebraica* —que describe las gráficas de las rectas por sus ecuaciones— como la *Vista Gráfica* —donde se representan los objetos—. Para acceder a este entorno, se puede hacer clic en la pequeña flecha que se encuentra en el borde gris de la derecha de la ventana y se despliega un menú donde se selecciona la opción *Graficación*.



Al utilizar este entorno, los objetos se construyen con un nombre (*Etiqueta*) que los identifica. Esto será de gran utilidad al implementar la puesta en común de la actividad.

GeoGebra contiene una barra de herramientas representada por distintos íconos. A su vez, cada uno de ellos despliega un menú con nuevas herramientas al hacer clic en la flecha ubicada en la esquina inferior derecha. Es importante aclarar que no se espera que todos los estudiantes encuentren la ubicación de cada herramienta por sí mismos; el docente podrá intervenir ofreciendo ese dato para la construcción.

En el problema 1 se pone en juego la herramienta **Punto** . En este caso, se muestra el punto creado sobre la recta con su nombre: A . Será además de utilidad poder ver las coordenadas de dicho punto sobre la recta (a partir de la consigna **d.**). Para ello, se debe hacer un clic derecho sobre el punto creado, elegir la opción *Propiedades* y así se desplegará una ventana con las propiedades del objeto. En la pestaña *Básico*, se tilda *Etiqueta visible* y se elige —del menú desplegable— la opción *Nombre y valor*. De esta forma, se podrá observar el punto sobre la recta con su nombre y sus coordenadas.

En la consigna **b.** —en la que se pide encontrar el valor de y para que el punto $P = (-2; y)$ pertenezca a la recta—, se espera que los estudiantes identifiquen que la coordenada y del punto P es 0 . En este caso, la lectura se realiza de manera directa del gráfico. En esta oportunidad, el docente podrá recordar o establecer con toda la clase que la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje x se llama raíz.

En la consigna **c.**, donde se pide encontrar el valor de x para que el punto $Q = (x; 6)$ pertenezca a la recta, los estudiantes podrán establecer mirando el gráfico que la coordenada x del punto Q es 0 . En este caso, la coordenada $y = 6$ del punto Q representa la ordenada al origen.

En la consigna **d.** —en la que se pide encontrar el valor de y sabiendo que el punto $R = (-3; y)$ no pertenece a la recta—, es probable que los estudiantes den distintos valores de y . El espacio colectivo será una oportunidad para discutir acerca de cuáles son todos los valores de y que hacen que el punto R no pertenezca a la recta.

A continuación, se analizan cada uno de los puntos propuestos en la consigna **e.**

- $A = (4; 18)$: en este caso, será necesario desplazar la *Vista Gráfica* con la herramienta **Desplaza Vista Gráfica**  para poder observar que el punto A pertenece a la recta.
- $A = (-4,5; -7)$: al desplazar el punto A , los estudiantes podrán establecer que no pertenece a la recta. A partir de la exploración con GeoGebra, es probable que encuentren diferentes valores para la coordenada y del punto, aproximándose al punto $(-4,5; -7,5)$. En una instancia de trabajo colectivo, el docente podría comunicar que el programa trabaja con valores aproximados —como la calculadora—, usando por defecto dos cifras decimales. Por esta razón, al acercarse al punto cuya coordenada x es $4,5$, pueden obtenerse diferentes valores de y cercanos a $7,5$.
- $A = (1; 8,99)$: en este caso, al desplazar el punto A es posible que algunos estudiantes lleguen a obtenerlo y respondan erróneamente que el punto pertenece a la recta. En la puesta en común, es importante que se analicen las diferentes respuestas y se explicita la necesidad de utilizar la ecuación de la recta para verificar formalmente si el punto pertenece o no a esta. Lo

analizado sobre las características de GeoGebra en la resolución del ítem anterior permitirá también poner en discusión este punto. A partir del trabajo con la ecuación podrá establecerse que, para que el punto A pertenezca a la recta, si $x = 1$ entonces $y = 3 \cdot 1 + 6 = 9$. Por lo tanto, el punto que pertenece a la recta es el $(1; 9)$ y no el que muestra GeoGebra.

- $A = (100; 306)$: en este caso, el desplazamiento del punto sobre la recta resulta muy engorroso. Esto podrá llevar a los estudiantes a recurrir a la ecuación y establecer que el punto pertenece a la recta ya que si $x = 100$, entonces $y = 3 \cdot 100 + 6 = 306$.
- $A = (-\frac{1}{3}; 5)$: a partir de la exploración podrán obtener valores cercanos al $(-0,33; 5)$. En este caso, no puede obtenerse el valor exacto ya que, como se mencionó anteriormente, GeoGebra trabaja –por defecto– aproximando con dos decimales. Nuevamente será una oportunidad de apelar a la ecuación para determinar que el punto pertenece a la recta.

En la consigna **f.** es probable que los estudiantes elijan puntos de coordenadas enteras, con la certeza de que la cuadrícula los ayuda a la hora de visualizar si un punto pertenece o no a la recta. En este sentido, será el docente quien pueda sugerir la búsqueda de puntos de coordenadas decimales de manera tal que sea necesario justificar a través de la ecuación de la recta si un punto pertenece o no a ella.

Será interesante notar que la ecuación de la recta ingresada recibe un nombre en GeoGebra, en este caso, f . Si se ingresa $f(4)$ en la barra de *Entrada*, se obtiene el número **18** en la *Vista Algebraica*. Es decir, este procedimiento permite trabajar con GeoGebra como si fuera una calculadora: no se representa el punto $(4; 18)$ como un punto de la recta en la *Vista Gráfica*. Será entonces el docente quien pueda compartir esta posibilidad del programa como una herramienta disponible para verificar si un punto pertenece o no a la recta.

Como cierre del trabajo con este problema, en el espacio colectivo, podrán quedar establecidas algunas ideas y procedimientos que serán la base para el trabajo con los siguientes problemas. Por ejemplo:

- Para que un punto pertenezca a la recta sus coordenadas deben verificar la ecuación. Es decir, si se reemplaza el valor de la coordenada x del punto en la x de la ecuación de la recta, debe obtenerse el valor de la coordenada y del punto. Si esto no ocurre, el punto no pertenece a la recta.
- A la coordenada x del punto en el que la recta corta al eje de las abscisas se la llama *raíz*; la coordenada y de este punto es **0**.
- A la coordenada y del punto en el que la recta interseca el eje de las ordenadas se la llama *ordenada al origen*; la coordenada x de este punto es **0**.

Previo al trabajo con el segundo problema, se sugiere al docente verificar con toda la clase que los nombres de las ecuaciones de las rectas sean iguales para todos. Esto facilitará la puesta en común y el registro de las ideas principales del problema.

En el problema 2, se trabaja con las ecuaciones de tres rectas con el propósito de analizar sus intersecciones, a través de la exploración con GeoGebra y el uso de las ecuaciones de las rectas para su validación. Cabe destacar que no se espera un trabajo basado en la resolución de sistemas de ecuaciones.



Actividad 1. Problema 2

En particular en la consigna **a.**, los estudiantes podrán observar que la intersección entre **g** y **h** es el punto **(-1; 9)** desplazando la *Vista Gráfica*. En este caso, las dos rectas se intersecan en un punto de la cuadrícula. El docente podría introducir el uso de la herramienta *Intersección*  que permite obtener el punto buscado: se muestra en la *Vista Gráfica*, y en la *Vista Algebraica* aparecen sus coordenadas.

En la consigna **b.**, la intersección entre **f** y **h** es **(1,75; 0,75)**, se puede ver desplazando la *Vista Gráfica*, pero no es posible establecer las coordenadas de manera exacta. En este caso, la herramienta *Intersección*  permite obtener las coordenadas del punto. Sin embargo, sabiendo que GeoGebra trabaja por defecto con dos cifras decimales, será necesario el uso de las ecuaciones de las rectas para validar que el punto hallado es el correcto. Es decir, el punto **(1,75; 0,75)** verifica las ecuaciones de ambas rectas.

La consigna **c.** apunta a que los estudiantes identifiquen que la recta **i** coincide con la recta **h** y por esta razón no es observable en la *Vista Gráfica*. Para la validación, será necesario apelar a la transformación de las ecuaciones de manera de establecer que ambas son equivalentes y representan a la misma recta. El propósito es poner de manifiesto que las rectas que se grafican tienen una (o más de una, como en este caso) expresión algebraica que las representa. Si bien algunos estudiantes podrán comprobar —por medio de la propiedad distributiva— que las ecuaciones $y = -3(x - 2)$ e $y = -3x + 6$ son equivalentes, otros no tendrán disponible esta forma de validación. No se espera que esta validación surja espontáneamente de los estudiantes sino que será el docente quien invite a producirla.

Al finalizar este problema podrán quedar registradas algunas ideas principales como:

- Si un punto es la intersección entre dos rectas, sus coordenadas deben verificar las ecuaciones de ambas.
- Una misma recta puede estar representada por ecuaciones distintas pero equivalentes.

Actividad 2. Rectas y ecuaciones con GeoGebra

En esta actividad se propone explorar conjuntos de gráficas y conjuntos de ecuaciones para establecer relaciones y comenzar a conceptualizar la condición de paralelismo y el significado de la ordenada al origen. Además, se incorpora el uso de parámetros representados por deslizador.

Rectas y ecuaciones con GeoGebra

Actividad 2

Problema 3

En un nuevo archivo de GeoGebra ingresen en la barra de *Entrada* las ecuaciones de las siguientes rectas:

- $f: y = 2x$
- $g: y = \frac{1}{4}x + 3$
- $h: y = 2x + 10$
- $i: y = -x$
- $j: y = 2x - 4$

- ¿En qué punto se intersecan las rectas f e i ? ¿Y las rectas g y j ?
- Utilicen la herramienta *Intersección*  para determinar en qué punto se intersecan f y j . Expliquen el resultado que obtienen. ¿Con qué otras rectas ocurrirá lo mismo?
- Den la ecuación de otra recta que no se corte con la recta f .
- A continuación van a conocer el uso de una herramienta de GeoGebra: el *Deslizador*.

Seleccionen la herramienta *Deslizador* , hagan clic sobre la *Vista Gráfica*: se muestra un menú llamado *Deslizador*. Hagan clic en *Ok* y aparecerá definido con el nombre a .



Con la herramienta *Elige y Mueve*  pueden moverlo para obtener diferentes valores del deslizador.

Ingresen en la barra de *Entrada* la ecuación de la recta $y = 2x + a$. Llamen l a la nueva recta ingresada y respondan las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto debe valer a para que las rectas f y l queden superpuestas? ¿Y para que j y l sean la misma?
- ¿Es posible encontrar un valor de a para que g y l queden superpuestas? ¿Por qué?
- ¿Será posible encontrar un valor de a para que h y l queden superpuestas?

Problema 4

- En un nuevo archivo de GeoGebra creen un deslizador llamado a . Ingresen en la *Entrada* la ecuación de la recta $y = 2x + a$ y Guarden el archivo con el nombre problema4.ggb.

A continuación respondan las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto tiene que valer a para obtener una recta que contenga el punto $(0; -3)$?
- ¿Cuánto tiene que valer a para obtener una recta que contenga el punto $(1; 1)$?
- ¿Cuánto tiene que valer a para que la raíz sea 2? ¿Y para que la raíz sea 0?
- ¿Cuánto tiene que valer a para que la recta graficada contenga el punto $A = (2; 6,25)$?
- ¿Cuánto tiene que valer a para que la recta graficada contenga el punto $A = (-1; 7)$?

Problema 5

A partir del trabajo realizado en los problemas 3 y 4, respondan:

- ¿Cuánto debe valer a para que la recta $y = 4x + a$ contenga al punto $(0,5; 3)$? ¿Y al punto $(-1,5; 4)$?
- ¿Cuánto debe valer a para que la recta $y = -2,5x + a$ contenga al punto $(2; -3,5)$? ¿Y al punto $(-4; 1)$?

← Actividad anterior

Actividad siguiente →

En el problema 3, se utiliza la herramienta *Intersección*  para determinar puntos de intersección entre rectas. A su vez, se analizan algunos aspectos de la condición de paralelismo. Además, se inicia el trabajo con la herramienta *Deslizador*  $a=2$, como un parámetro en la ordenada al origen para representar familias de rectas que tengan la misma pendiente.

En la consigna **a.**, para el caso de las rectas f e i , será interesante analizar con toda la clase que ambas rectas tienen ordenada al origen 0 y por esa razón se intersecan en el origen de coordenadas. Para el caso de las rectas g y j los estudiantes podrán leer del gráfico las coordenadas del punto y luego realizar la verificación mediante el uso de las ecuaciones tal como se hizo en el problema 2. Además, será importante —para anticipar el trabajo de la consigna **b.**— que, en el espacio colectivo, el docente sugiera el uso de la herramienta *Intersección*  como otra manera que ofrece GeoGebra para identificar esos puntos.

En la consigna **b.**, como f y j son rectas paralelas, al utilizar la herramienta *Intersección*  en la *Vista Algebraica* aparece un punto igualado a un signo de pregunta: $B = ?$. Será una oportunidad para analizar con los estudiantes que ambas rectas no tienen puntos en común y encontrar argumentos matemáticos para justificar esta afirmación. No es el objetivo

Actividad 1.
Problema 2

de este ítem profundizar en todos los aspectos que involucra el estudio de la condición de paralelismo, sino en una argumentación algebraica que explique por qué las rectas no se intersecan. Es decir, analizar las ecuaciones para explicitar las razones por las cuales no es posible encontrar un valor de x para el cual, al reemplazarlo en ambas, se obtenga el mismo valor de y . En el espacio colectivo, mediante la exploración con ejemplos podrían establecerse explicaciones como: “Si a un número cualquiera lo multiplico por 2, nunca me va a dar lo mismo que si lo multiplico por 2 y le resto 4”.

Luego de este trabajo el docente podrá proponer a la clase la tarea de identificar otra recta que no tenga puntos en común con f y con j . Es probable que algunos estudiantes se apoyen en el gráfico para encontrarla y utilicen la herramienta **Intersección**  para chequear. Otros podrán anticipar cuál es la recta observando la ecuación en la *Vista Algebraica* y señalando que ambas rectas tienen la misma pendiente. En el espacio colectivo será importante discutir ambas estrategias con la intención de que todos los estudiantes avancen hacia aquellas que permitan poner en juego conocimientos matemáticos para anticipar y luego verificar estas anticipaciones con GeoGebra.

La consigna **c.** implica la posibilidad de estudiar y generalizar las condiciones que debe cumplir la ecuación de una recta para que no se corte con f . En este caso, se podrá partir de ejemplos de rectas que cumplen este requisito para establecer que cualquier recta de la forma $y = 2x + b$ (con b distinto de 0) no se cortará con f .

Para el trabajo con la consigna **d.**, se decidió nombrar al deslizador con la letra a porque es el nombre que aparece predeterminado en GeoGebra. Sin embargo, si el docente quisiera adecuarlo a la notación habitual utilizada en el aula podría sugerir a los estudiantes modificarlo apoyándose sobre el **Deslizador**  $a=2$, utilizando el botón derecho y seleccionando la opción *Renombra*.

Para identificar fácilmente la recta l , se sugiere cambiar el color antes de empezar a resolver el problema. Esto puede realizarse apoyándose sobre la recta tanto en la *Vista Gráfica* como en la *Vista Algebraica*, utilizando el botón derecho y seleccionando la opción *Configuración*.

Es importante destacar que se trata del primer problema de esta secuencia donde se comienza a trabajar con deslizadores y tal vez sea el primero en el que los estudiantes utilicen parámetros. Como se mencionó en la introducción, este trabajo implica el uso de letras con diferentes sentidos y abarca una complejidad que comienza a elaborarse aquí, pero que necesitará de sucesivas aproximaciones y revisiones.

En este problema, las letras x e y son variables, en cambio la letra a –deslizador que representa la ordenada al origen– es un parámetro que permite hallar una familia de rectas. Es decir, para cada valor fijo de a se obtiene una recta diferente, en cambio x e y siempre son variables.

La primera pregunta apunta a identificar que para que las rectas f y l queden superpuestas, el valor del deslizador a debe ser el valor de la ordenada al origen de f . Lo mismo ocurre con las rectas j y l . Es decir, se apunta a utilizar la *Vista Gráfica* para explorar y luego identificar condiciones sobre las ecuaciones de las rectas.

Para el caso de la segunda pregunta, se espera que los estudiantes puedan identificar que al mover el deslizador las rectas que se generan son paralelas a f y j . De este modo, no es posible encontrar un valor del deslizador a para el cual g y l sean coincidentes. Analizando las ecuaciones de las rectas, los estudiantes podrán conjeturar que para que las rectas g y l pudieran coincidir sería necesario que el valor de la pendiente de ambas sea el mismo. No se espera que se realice en esta instancia una demostración formal de esta conjetura, sino que podrá ser aceptada como válida a partir del trabajo exploratorio.

Para responder a la tercera pregunta los estudiantes podrán mover el deslizador y observar que no es posible superponer las rectas h y l . Sin embargo, esto sucede debido a la configuración inicial del deslizador. El valor de a en este caso debería ser 10 y GeoGebra predetermina el rango del deslizador entre -5 y 5 . Es decir, si bien con estos valores iniciales que ofrece el programa no es posible hacer coincidir las rectas, matemáticamente sí es posible hallar un valor de a que cumpla con la condición. Luego de este trabajo, el docente podrá proponer a los estudiantes modificar el rango de valores predeterminado para el deslizador de manera de lograr que las rectas coincidan.

En el problema 4, se propone el uso de la herramienta *Deslizador*  para explorar y elaborar conjeturas con el propósito de utilizar las ecuaciones de las rectas para validar.

Las diferentes preguntas de este problema apuntan a un trabajo exploratorio con el deslizador, de manera tal que los estudiantes puedan encontrar el valor del parámetro a que verifique lo pedido.

Es probable que algunos exploren el valor del parámetro a desde la *Vista Gráfica* y que otros analicen la ecuación de la recta por medio de la *Vista Algebraica*. En ambos casos, será oportuno que el docente explicita la relación entre ambas vistas con el propósito de profundizar el trabajo con estos registros de representación.

En particular, en la consigna **d.**, no será posible que los estudiantes determinen con GeoGebra el valor del parámetro $a = 2.25$ debido a la configuración del deslizador (por defecto tiene un incremento de un décimo). El punto **A** fue elegido de manera intencional con el propósito de que los estudiantes deban recurrir a la validación algebraica para encontrar el valor del parámetro.



Actividad 2.
Problema 4

Un posible recorrido es la exploración en la *Vista Gráfica* de un punto móvil A que puede ser construido sobre la recta. Si dicho punto es desplazado de manera tal que su abscisa vale 2 , los estudiantes podrán explorar que si el deslizador varía entre $2,2$ y $2,3$, la ordenada del punto A estará comprendida entre $6,2$ y $6,3$. Esta será una buena oportunidad para que los estudiantes puedan aproximar el valor del parámetro buscado probando con distintos valores de a .

Otra resolución posible consiste en reemplazar las coordenadas del punto $A = (2 ; 6,25)$ en la ecuación de la recta y plantear $6,25 = 2 \cdot 2 + a$ para hallar el valor del parámetro a . Para resolver la ecuación, los estudiantes podrán optar por utilizar técnicas de despeje o podrán observar que como $6,25 = 4 + a$, entonces a debe valer $2,25$.

En la última pregunta, a diferencia de la anterior, no será posible que los estudiantes encuentren el valor del parámetro a a partir de la exploración con el deslizador, debido a que su construcción inicial varía en un rango de -5 a 5 . Nuevamente será necesario apelar a la resolución algebraica para determinar el valor de $a = 9$.

El propósito de las dos últimas preguntas es que surja la necesidad de encontrar algebraicamente, a partir de la ecuación, el valor del parámetro a . Si esta resolución no aparece en las producciones de los estudiantes será importante que sea el docente quien la introduzca.

Por último, el problema 5 se propone con el objetivo de sistematizar el trabajo realizado a lo largo de esta actividad.

Aquí se apunta a que los estudiantes –a partir de lo elaborado en los problemas 3 y 4– puedan plantear y resolver las ecuaciones para hallar el valor de a en cada caso. Si bien algunos estudiantes podrán seguir apoyándose en la exploración y anticipación de resultados mediante el uso de GeoGebra, será importante que el docente invite a validar sus producciones a partir de las resoluciones algebraicas.

Actividad 3. Integración

En esta actividad se propone analizar y reflexionar sobre el camino recorrido a través de los problemas realizados y los aprendizajes adquiridos.

Integración

Actividad 3

- a. En parejas, armen un listado de las ideas y ejemplos de lo que aprendieron con estas actividades. Las siguientes preguntas son para ayudarlos a pensar:
- ¿Qué les resultó más fácil? ¿Y más difícil?
 - ¿Qué aprendieron de sus compañeros?
 - ¿Qué errores tuvieron al resolver los problemas y cómo se dieron cuenta de que eran errores?
- b. Escriban un listado de reglas que les parezcan importantes recordar para el trabajo con GeoGebra. Por ejemplo:
- Las coordenadas de un punto se escriben separadas por una **coma**: $P = (3,5)$
 - La expresión decimal de un número se escribe con **punto**: 1.25
- c. Escriban un listado de las cuestiones que les parezcan importantes recordar sobre lo que aprendieron de la ecuación de la recta y la resolución de ecuaciones. Por ejemplo:
- En la ecuación de la recta $y = ax + b$, a es la pendiente y b es la ordenada al origen.
 - Para ver si el punto $(4; 18)$ pertenece a la recta de ecuación $y = 3x + 6$, reemplazo el valor de $x = 4$ en la ecuación y me tiene que dar el valor de $y = 18$.



Actividad
anterior

En esta última actividad se espera que los estudiantes puedan analizar y reflexionar sobre el camino recorrido a través de los problemas resueltos y los aprendizajes adquiridos. Por otro lado, se espera que sea una oportunidad para el docente de evaluar qué ideas se encuentran más afianzadas y sobre cuáles será necesario seguir trabajando. En este sentido, una posible gestión de la clase es que los estudiantes resuelvan las actividades en pequeños grupos sin intervención docente y luego, en una discusión colectiva, se socialicen y debatan las diferentes ideas y argumentos.

Orientaciones para la evaluación

Como se mencionó en la introducción, este material presenta una posible secuencia didáctica para el trabajo con ecuación de la recta con GeoGebra, que implica la construcción de nociones, el análisis y la elaboración de procedimientos. Utilizar un programa de álgebra y geometría dinámica como GeoGebra permitirá a los estudiantes explorar las gráficas de las rectas y analizar sus respectivas ecuaciones para avanzar en la validación algebraica.



En relación con el uso de GeoGebra, se intenta que los estudiantes avancen en sus conocimientos sobre el programa, al mismo tiempo que resuelven los problemas. En esta secuencia, se asume que existe un desarrollo dialéctico entre la apropiación del programa y la posibilidad de avanzar en el análisis de las gráficas de las rectas y sus respectivas ecuaciones. Esto es, saber más sobre GeoGebra permite planificar y abordar en mejores condiciones el trabajo con ecuaciones en este programa. A su vez, conocer progresivamente más sobre las ecuaciones con las que se trabaja habilita a buscar, elegir y analizar mejor las herramientas que ofrece.

De esta manera, las sucesivas discusiones en los espacios de trabajo colectivo de la clase cargan de nuevos sentidos esos conocimientos e ideas y habilitan a la construcción de otros. Así, será un trabajo progresivo en el que los estudiantes – con el sostén y las explicaciones del docente – irán enriqueciendo y fortaleciendo ese entretejido de conocimientos matemáticos.

En ese sentido, algunos indicadores de avance en los conocimientos que los estudiantes han adquirido, fruto del trabajo con los problemas planteados, pueden ser:

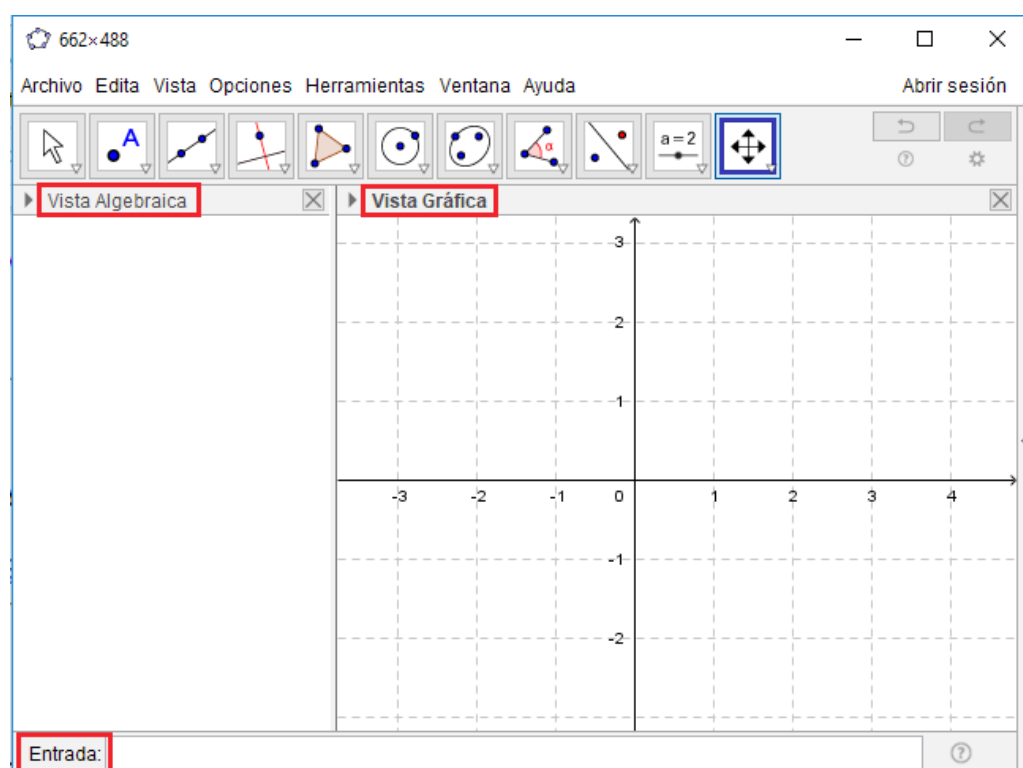
- La progresiva identificación de procedimientos erróneos e incompletos.
- La identificación de procedimientos adecuados y su reutilización y adaptación para la resolución de nuevas situaciones.
- La progresiva apropiación de herramientas matemáticas para la utilización y la interpretación de los diferentes registros de representación, así como el análisis de la información que brinda cada uno de ellos.
- La progresiva apropiación de la necesidad de validar algebraicamente las conjeturas elaboradas a partir de las exploraciones con los gráficos – tanto las propias como las de sus compañeros –.
- El avance hacia la incorporación del diferente uso de las letras: como variable y como parámetro.
- La formulación de conjeturas que tengan un mayor grado de generalidad paulatinamente, avanzando desde el análisis de casos particulares a la elaboración de argumentos que sostengan ciertas generalizaciones.
- El avance en la utilización del programa GeoGebra para realizar las construcciones propuestas, en términos de la selección y el uso de las herramientas.

Anexo

Funciones y ecuaciones con GeoGebra

El programa [GeoGebra](https://www.geogebra.org/m) puede ser descargado fácil y gratuitamente. Las capturas de pantalla que se muestran a continuación corresponden a la versión GeoGebra Clásico 5.

A continuación se exploran algunas herramientas vinculadas al trabajo con funciones y ecuaciones. La *Vista Algebraica* describe las ecuaciones de los objetos graficados en la *Vista Gráfica*. Y dichos objetos pueden ser ingresados a través de la barra de *Entrada*.



1. Ingresar un punto a través de sus coordenadas

Para ingresar un punto a través de sus coordenadas, se utiliza la barra de *Entrada* y la siguiente notación: **coma** para separar las coordenadas y **punto** para indicar las cifras decimales. Por ejemplo, si se quiere representar el punto $A = (2; 3)$ se escribe en la barra de *Entrada*:

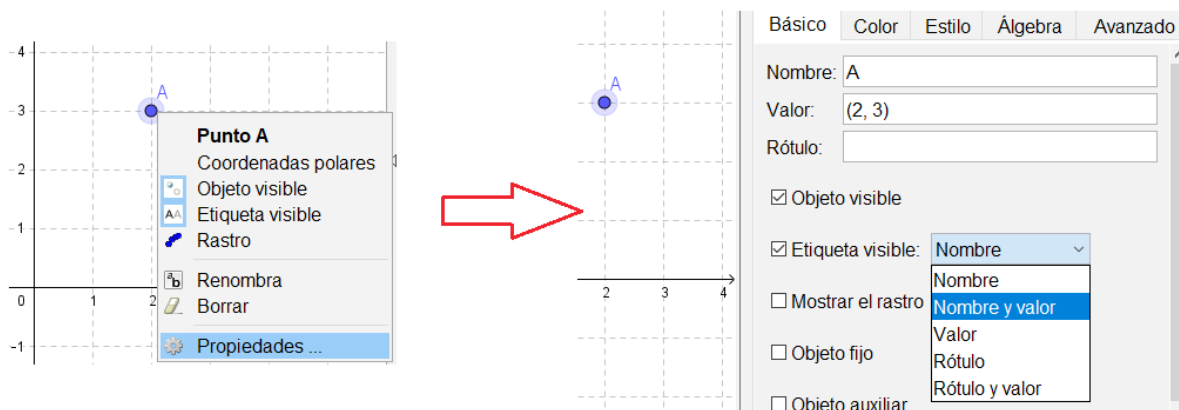


Y al presionar la tecla *Enter* queda cargado el punto. Sus coordenadas se representan en la *Vista Algebraica* y su ubicación en el plano en la *Vista Gráfica*.



2. Modificar propiedades del punto

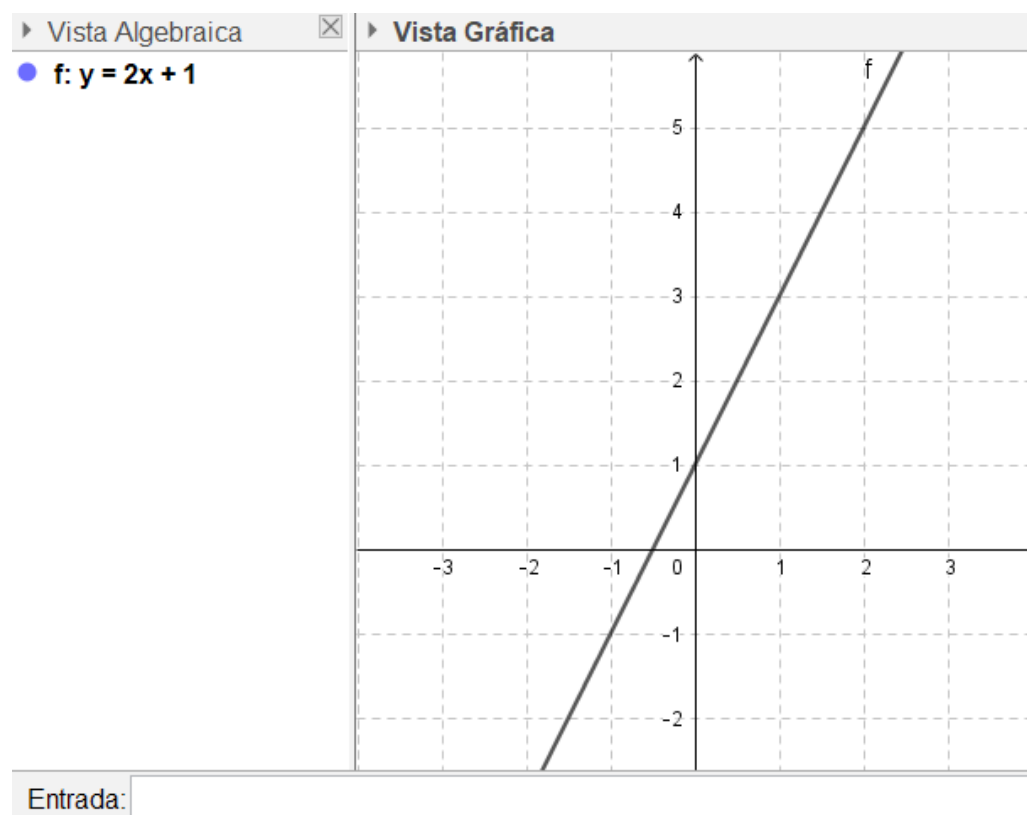
A este objeto se le puede modificar su nombre, su color (entre otras características) accediendo a la opción *Propiedades* con un clic derecho sobre el punto (en cualquiera de las vistas):



3. Ingresar una recta a partir de su ecuación

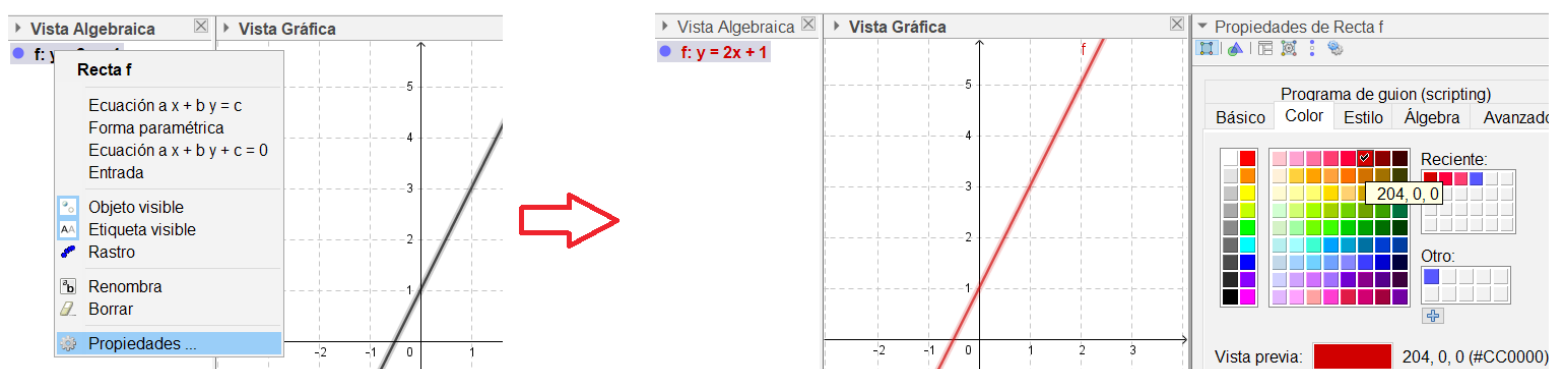
Si se quiere ingresar la ecuación de una recta, por ejemplo $y = 2x + 1$, se escribe la ecuación de la misma en la barra de *Entrada* y se presiona *Enter*:

Entrada: $y=2x+1$



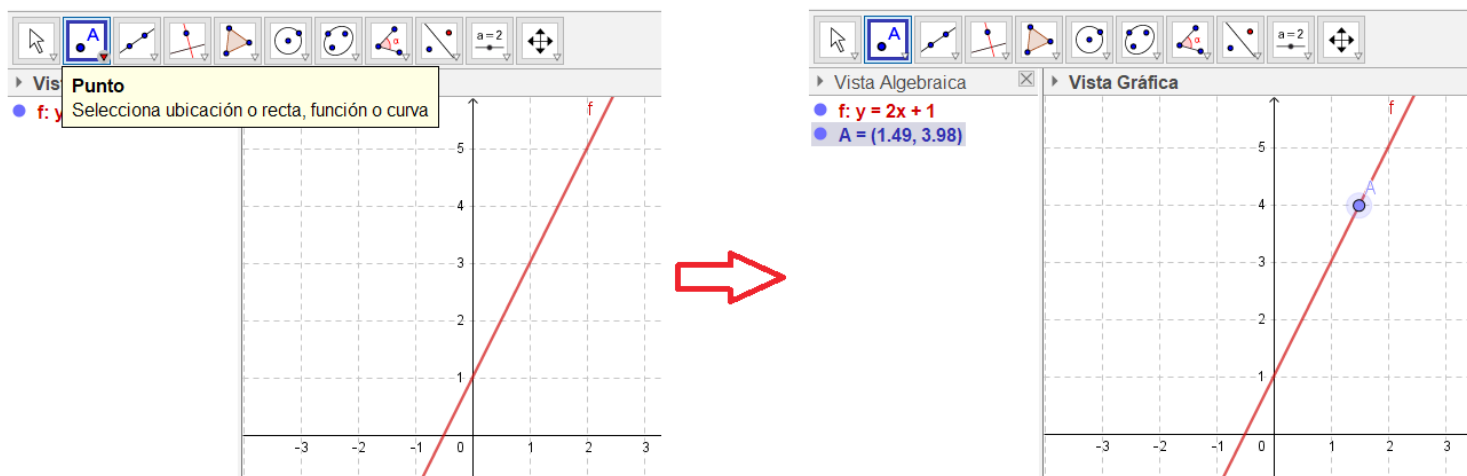
4. Modificar propiedades de una recta

Es importante saber que el programa GeoGebra le asigna un nombre y ciertas características a cada recta que se ingresa, en este caso: f . Al igual que con los puntos, también es posible modificar las propiedades de la recta. Para ello, se hace un clic derecho sobre el objeto y se accede al menú *Propiedades*. En la siguiente imagen se muestra cómo cambiarle el color a una recta.



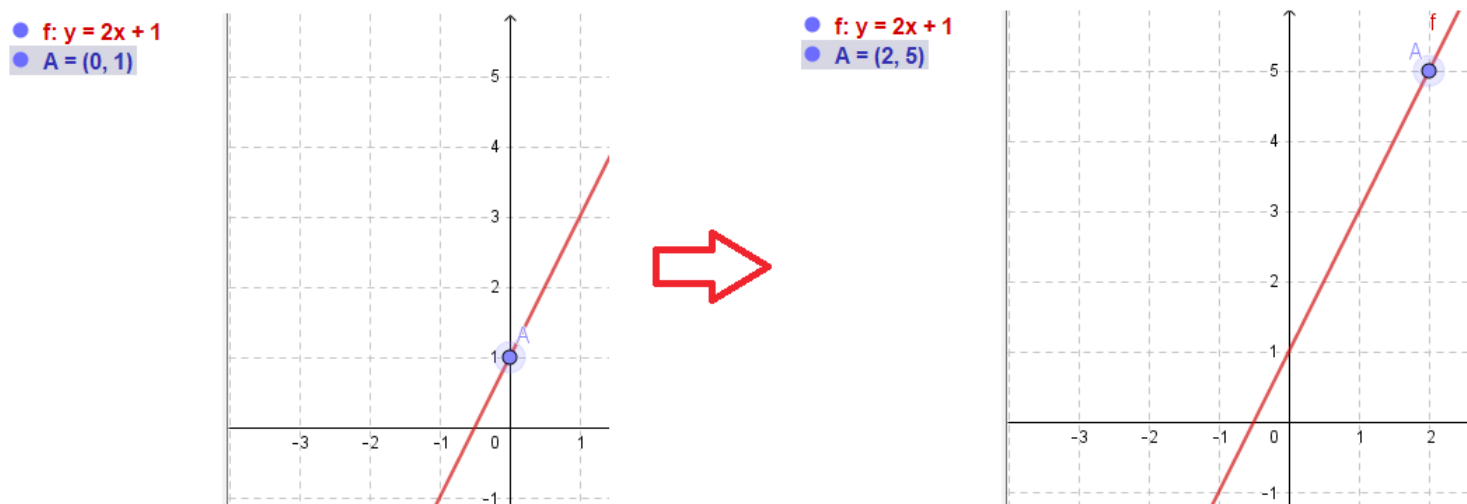
5. Ingresar un punto sobre una recta

En GeoGebra también es posible ingresar un punto sobre una recta, de manera tal que el punto marcado solo pueda desplazarse sobre la recta. Para ello, se elige la herramienta *Punto* del menú de íconos y se hace un clic sobre el objeto *Recta*:

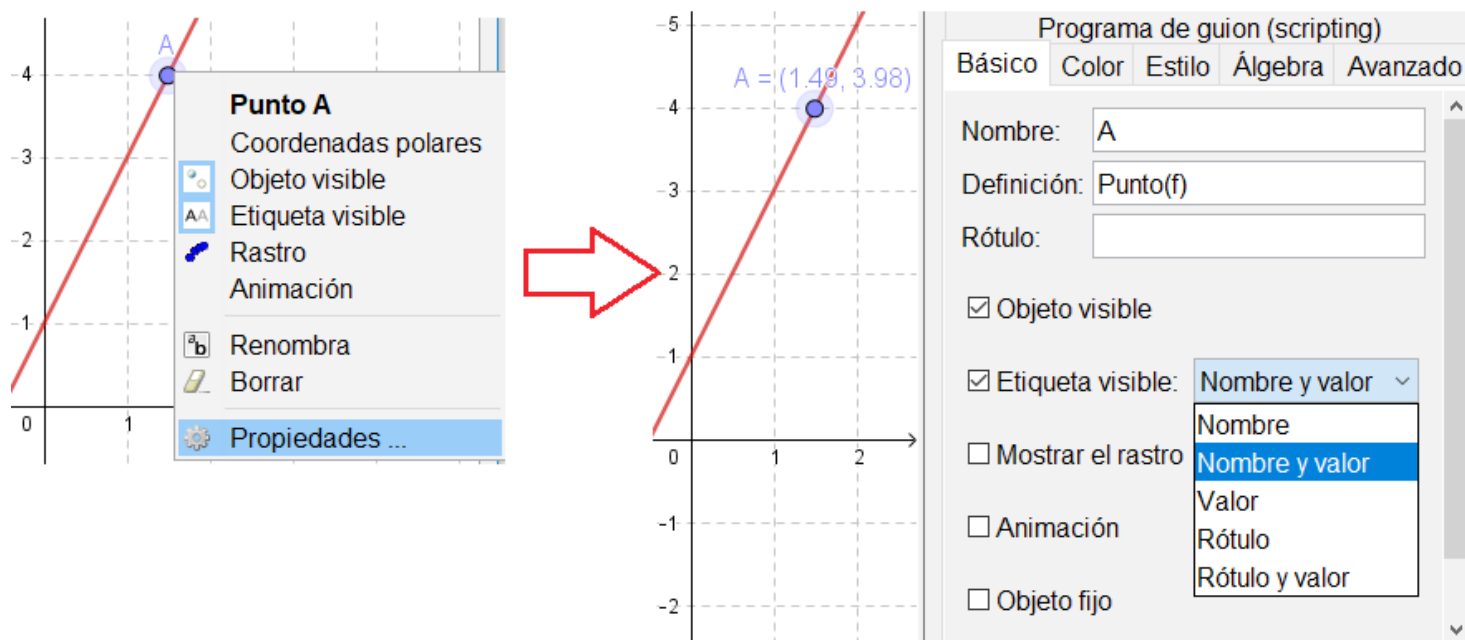


El punto queda construido tanto en la *Vista Algebraica* como en la *Vista Gráfica*. Como se puede observar, las coordenadas del punto se muestran con dos cifras decimales por defecto. Es importante aclarar que el programa opera con números racionales (hasta 15 cifras) aunque la gráfica de la recta se muestre en forma continua.

Si se selecciona *Elige y Mueve* con un clic izquierdo (sin soltarlo) y se mueve el mouse, es posible desplazar el punto sobre la recta y observar cómo se modifican sus coordenadas en ambas vistas:

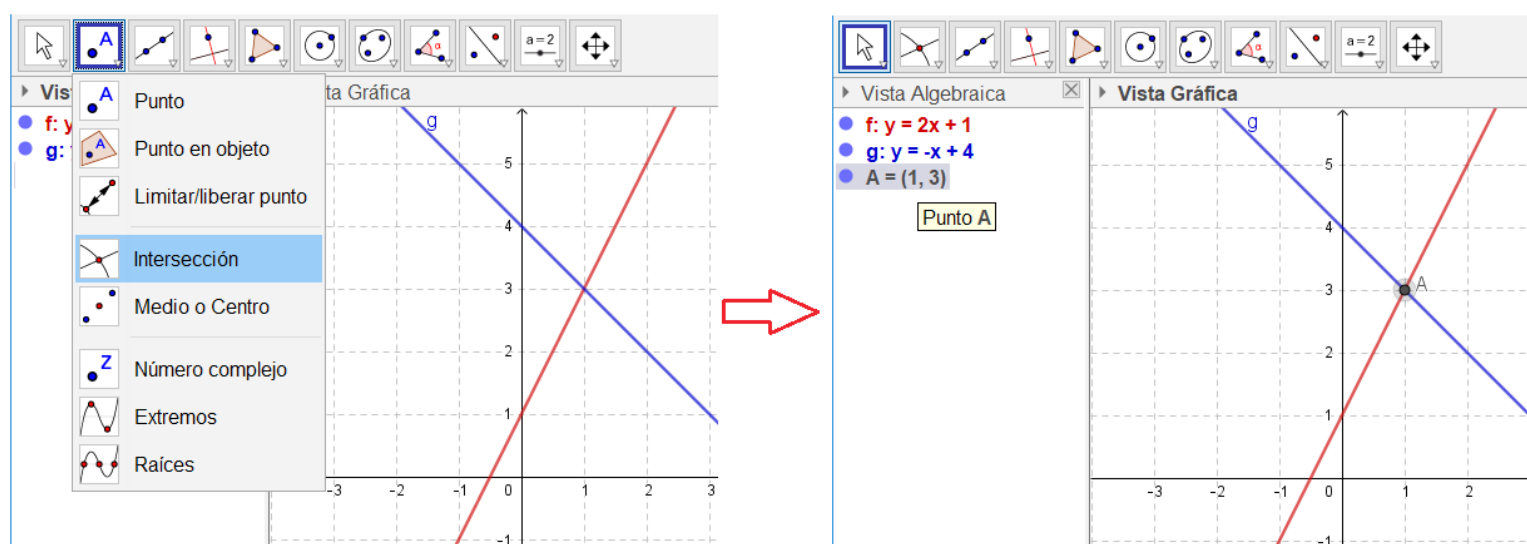


Para observar las coordenadas del punto sobre la recta en la *Vista Gráfica*, se debe hacer un clic derecho sobre el punto creado, elegir la opción *Propiedades* y así se desplegará una ventana con las propiedades del objeto. En la pestaña *Básico*, se tilda *Etiqueta visible* y se elige del menú desplegable la opción *Nombre y valor*. De esta forma, se podrá observar el punto sobre la recta con su nombre y sus coordenadas.

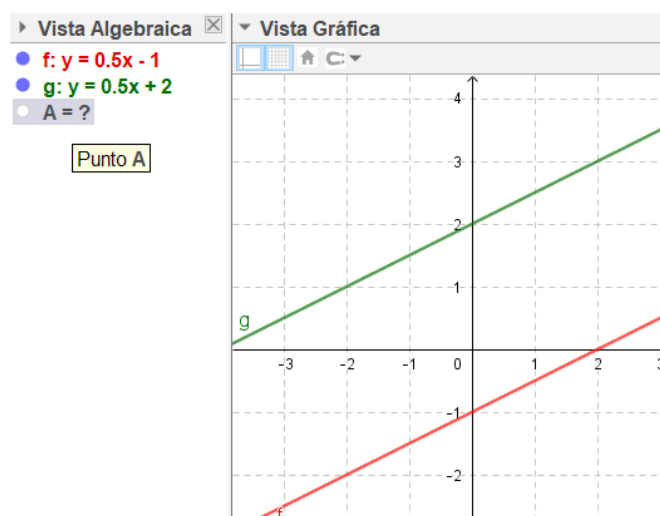


6. Determinar puntos de intersección

GeoGebra brinda la posibilidad de ingresar varias rectas a través de la barra de *Entrada*. Todas son representadas a través de sus ecuaciones (*Vista Algebraica*) y de sus gráficas (*Vista Gráfica*). La herramienta *Intersección* permite determinar en qué punto se intersecan dos rectas. Para ello, se selecciona dicha herramienta desde el menú *Punto*, se hace clic en las dos rectas que se quieren intersecar y el programa muestra en forma automática el punto de intersección.



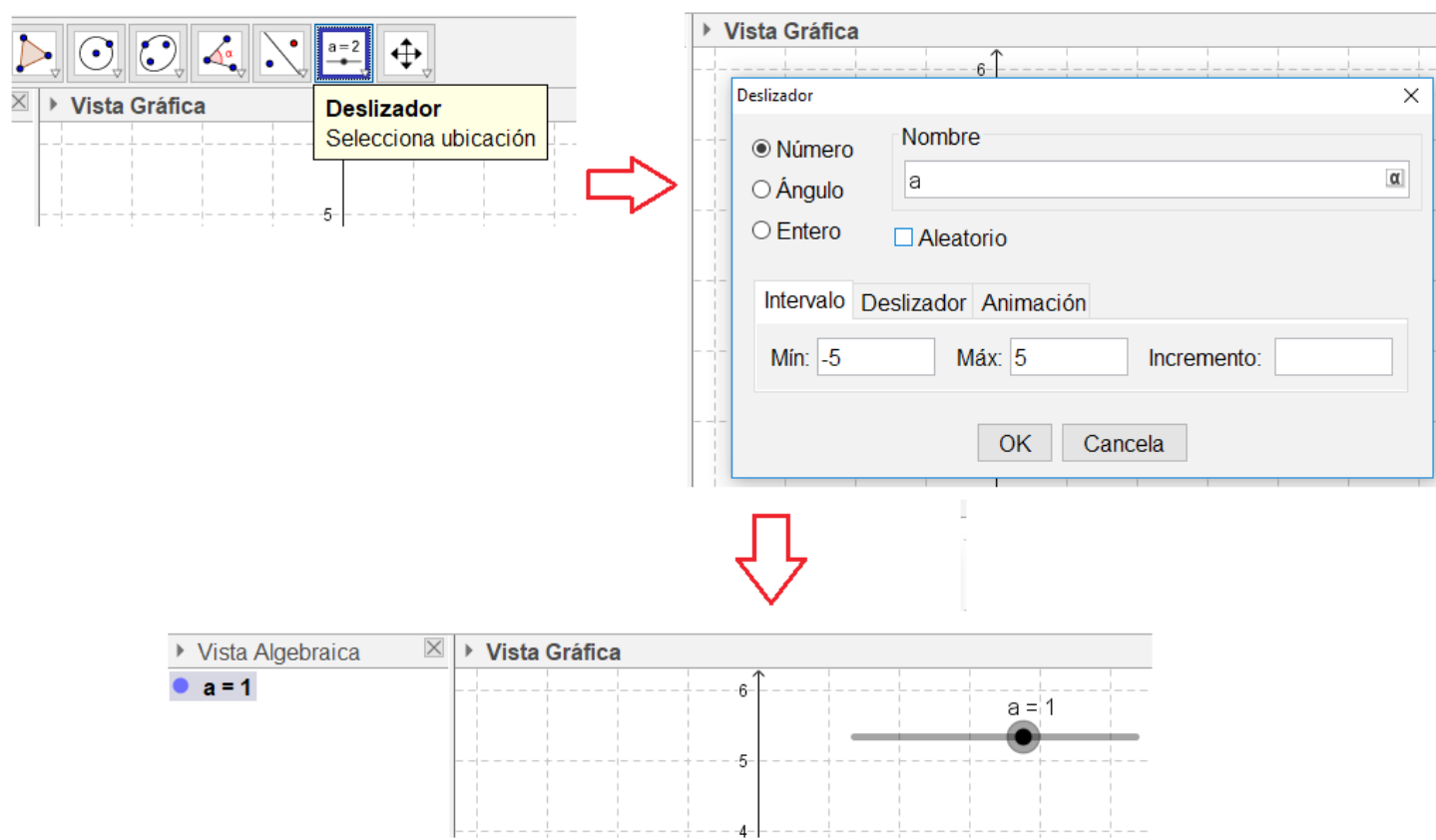
En el caso de que no exista la intersección entre los objetos, el programa mostrará en la *Vista Algebraica* un signo de pregunta.



7. Definir un deslizador

Otra opción que ofrece el programa es definir un *Deslizador*. Esta herramienta es una representación gráfica de un número libre (o de un ángulo). En particular, se definirá al deslizador como un número con el propósito de trabajarlo como un parámetro en la ecuación de una recta.

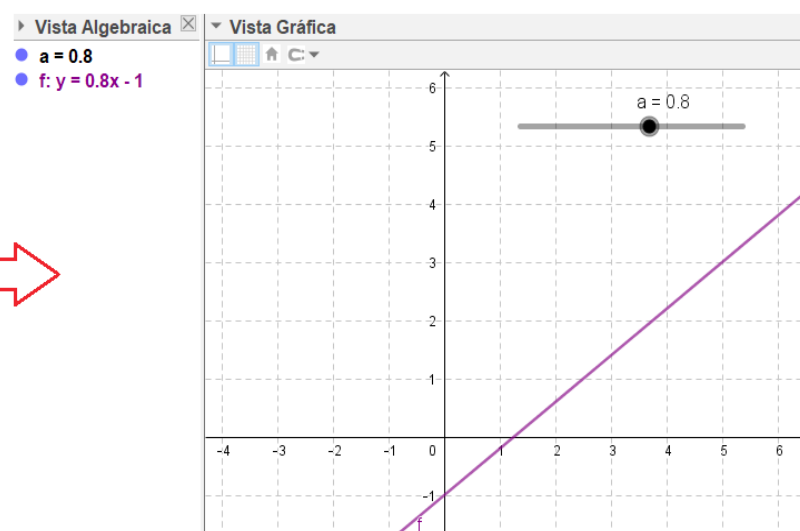
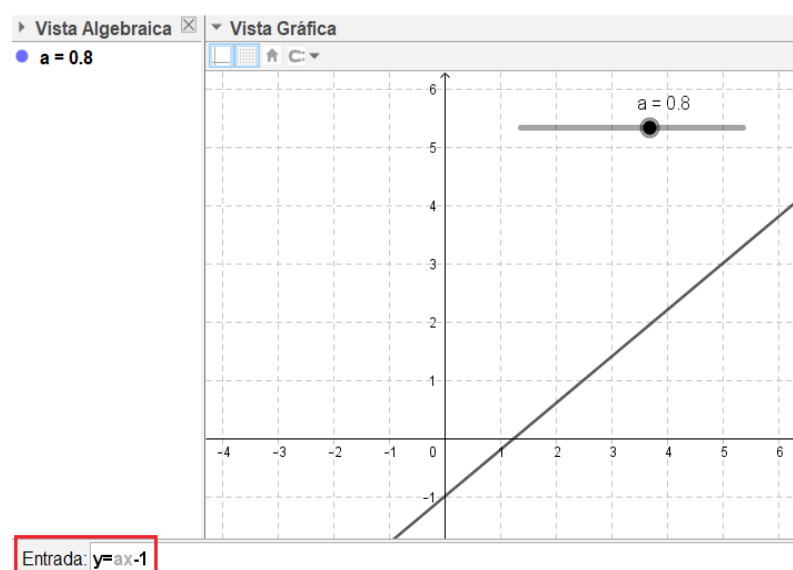
Una vez seleccionada la herramienta *Deslizador* desde el menú de íconos, se hace un clic en cualquier espacio libre de la *Vista Gráfica*. Aparece una ventana de diálogo emergente que permite especificar el Nombre, Intervalo [mín, máx], e Incremento (por defecto es 0.1) del valor correspondiente así como la alineación con que quedará expuesto (Horizontal o Vertical), entre otras opciones:



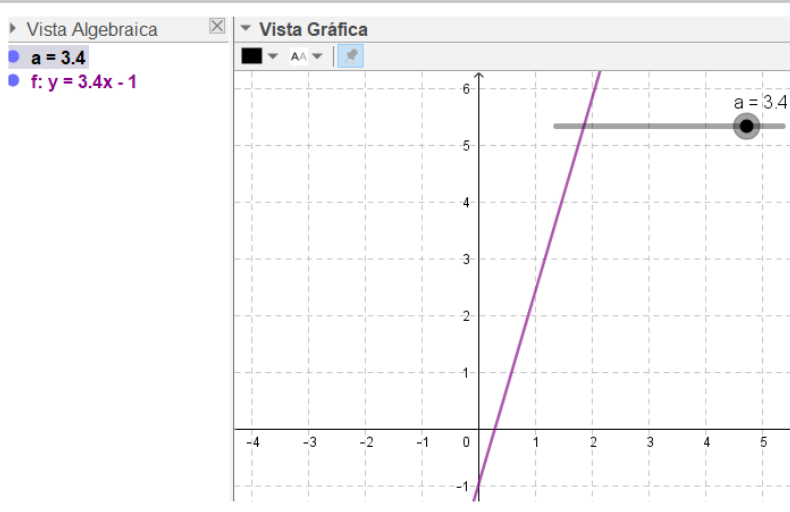
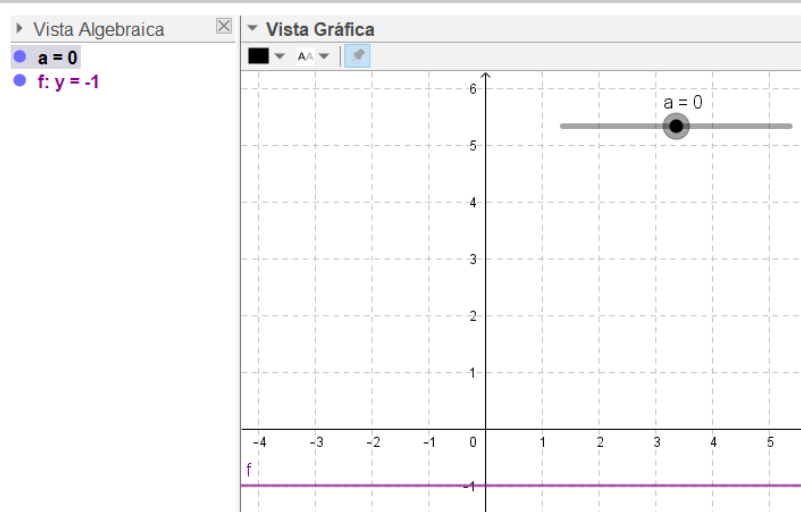
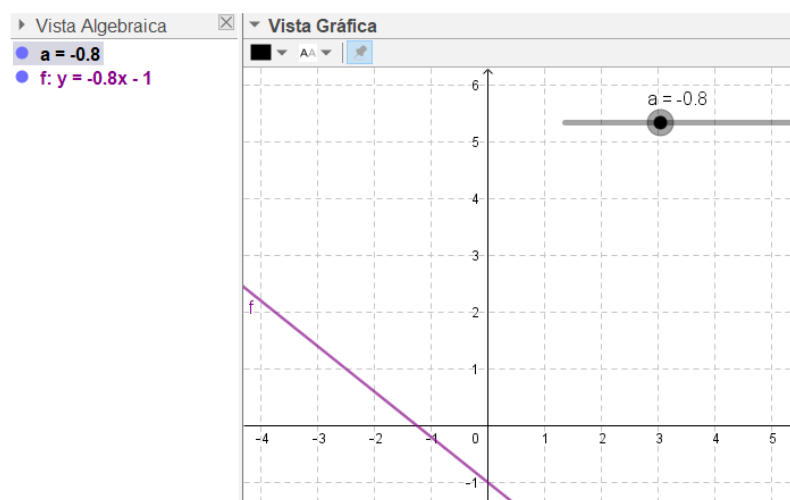
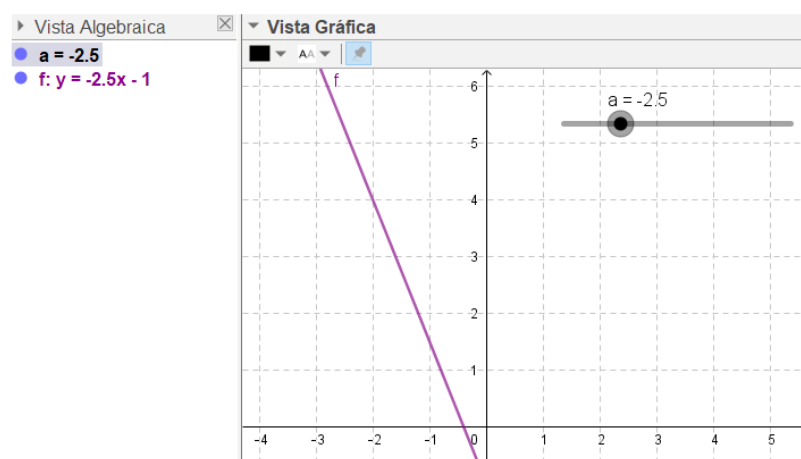
Cuando la herramienta *Elige y Mueve* está activa, se la puede emplear sobre el dial redondo que permite sintonizarlo. Así se modifica el valor del *Deslizador* dentro del rango en el que se extiende.



Una vez creado el deslizador, se lo puede utilizar para generar una familia de rectas cuya pendiente está dada por el deslizador. Por ejemplo, si se ingresa en la barra de *Entrada* la ecuación $y = ax - 1$, se crea un conjunto de rectas de pendiente a .



Si se desplaza el dial del *Deslizador*, se obtienen diferentes rectas. Cada una de ellas queda representada por su ecuación y su gráfica para un valor determinado del *Deslizador* –en este caso, utilizado como parámetro–.

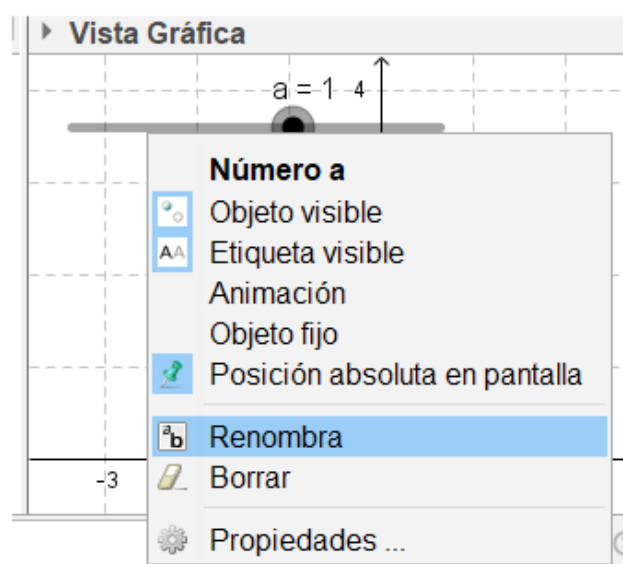


8. Cambiar de nombre los objetos

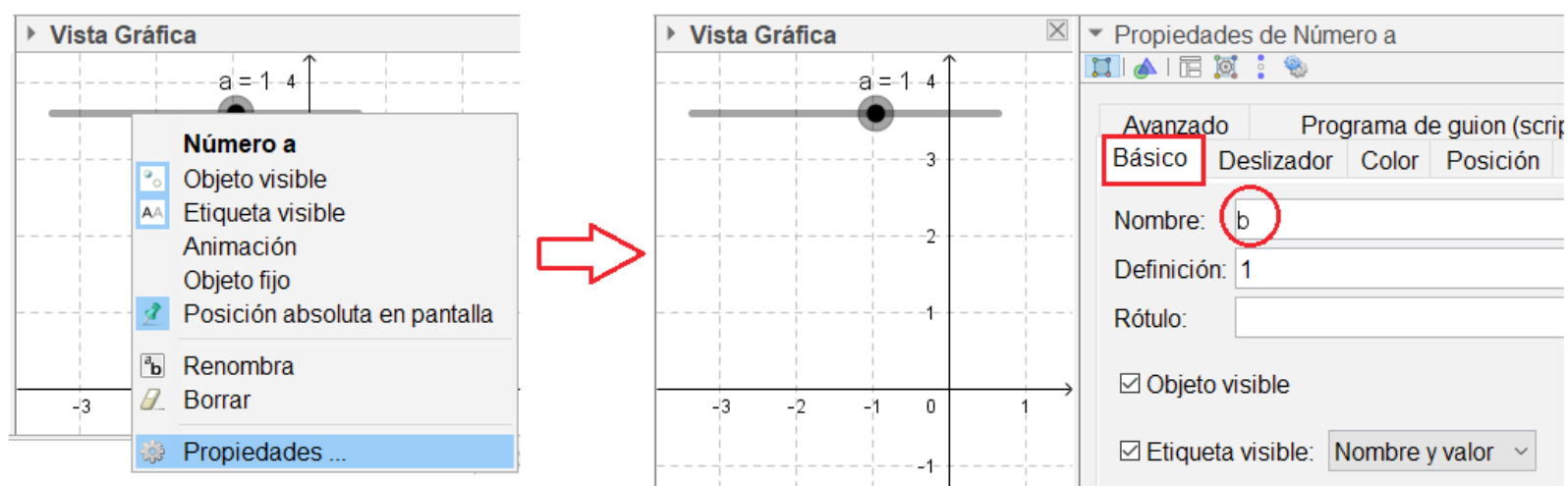
Si no se le asigna un nombre a un objeto manualmente, GeoGebra lo hace automáticamente, por orden alfabético.

La forma más sencilla de cambiar el nombre de un objeto es seleccionándolo y comenzando a tipear el nuevo nombre. También se puede cambiar el nombre de un objeto ya creado de las siguientes maneras:

- Haciendo clic con el botón secundario del mouse en el objeto para seleccionar la opción *Renombra* del menú contextual desplegado y anotar el nuevo nombre.



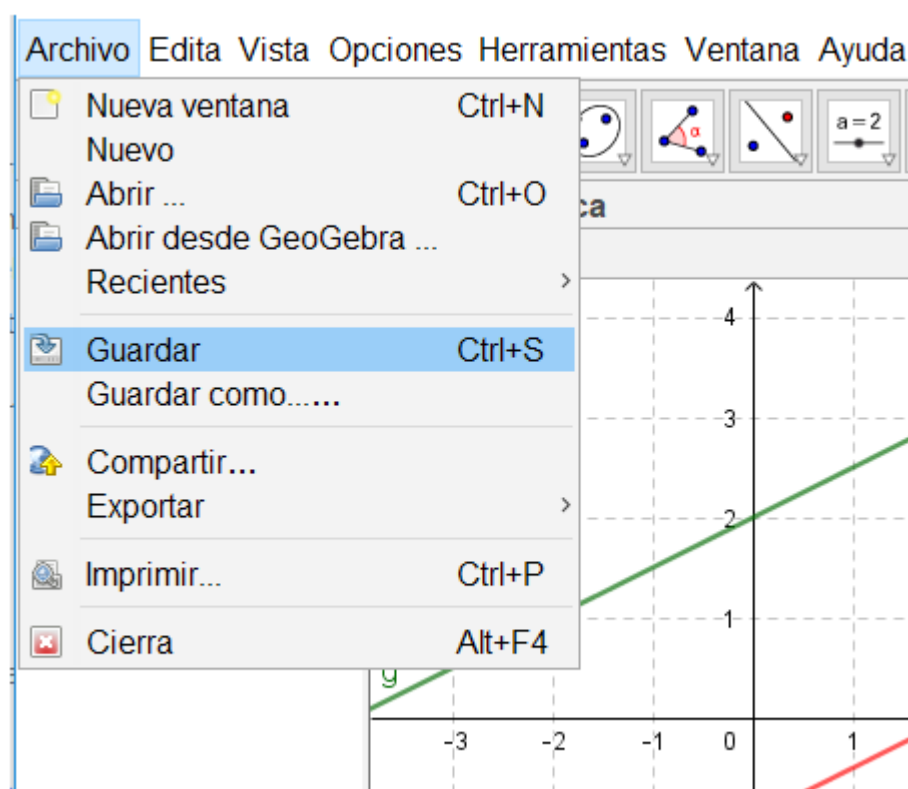
- Abriendo el cuadro de *Propiedades* del objeto y anotando el nuevo nombre en la casilla de entrada *Nombre* de la pestaña *Básico*.



Es importante destacar que algunos símbolos o secuencias de símbolos no pueden utilizarse como nombres para los objetos. En particular, para este apartado, se mencionan los caracteres: x e y ; que están definidos por el programa como las variables de las ecuaciones.

9. Guardar archivos en GeoGebra

Para guardar las construcciones hechas en GeoGebra, se puede acceder al menú *Archivo* y elegir la opción *Guardar*.



Bibliografía

G.C.B.A. Ministerio de Educación. [*Diseño Curricular para la Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad de Buenos Aires. Formación general*](#). Ciclo Básico del bachillerato, 2015, pp. 510-534.

—*Función Lineal: Variación uniforme*. Serie Profundización de la NES. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, 2018.

Novembre, A.; Nicodemo, M. y Coll, P. [*Matemática y TIC. Orientaciones para la enseñanza*](#). ANSES, Buenos Aires, 2015.

Notas

- 1 Es posible que, al intentar instalar GeoGebra, se solicite la instalación de [Java](#). Si esto llegara a suceder, deberá instalarse primero este programa.
- 2 El trabajo con deslizadores como parámetros se profundizará en el documento *Ecuación de la recta y resolución de ecuaciones - Parte 2*.
- 3 Es importante notar que solo se está trabajando con esta condición, quedará para otro momento el estudio de la recíproca (toda recta que no corte a la recta f es una recta de ecuación $y = 2x + b$, con b distinto de 0).
- 4 Véase la descripción de la [“Herramienta de Deslizador”](#) en el sitio de GeoGebra.



Vamos Buenos Aires