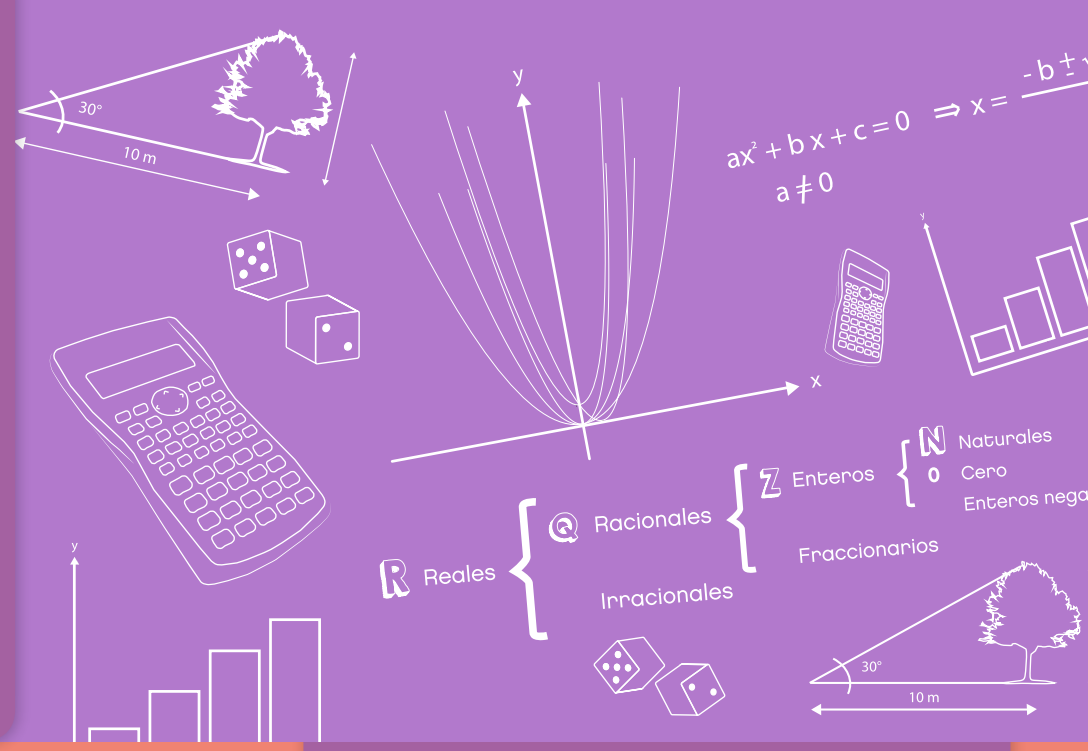
Matemática



Primer año

Números racionales I
Densidad en Q⁺

Serie PROFUNDIZACIÓN · NES

Jefe de Gobierno
Horacio Rodríguez Larreta

Ministra de Educación
María Soledad Acuña

Subsecretario de Planeamiento e Innovación Educativa
Diego Javier Meiriño

Directora General de Planeamiento Educativo
María Constanza Ortiz

Gerente Operativo de Currículum
Javier Simón

Director General de Tecnología Educativa
Santiago Andrés

Gerenta Operativa de Tecnología e Innovación Educativa
Mercedes Werner

Subsecretaria de Coordinación Pedagógica y Equidad Educativa
Andrea Fernanda Bruzos Bouchet

Subsecretario de Carrera Docente y Formación Técnica Profesional
Jorge Javier Tarulla

Subsecretario de Gestión Económico Financiera y Administración de Recursos
Sebastián Tomaghelli

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa (SSPLINED)

Dirección General de Planeamiento Educativo (DGPLEDU)
Gerencia Operativa de Currículum (GOC)
Javier Simón

Coordinación de Especialistas: Héctor Ponce, María Emilia Quaranta

Especialistas: Carla Cabalcabué, Rosa Escayola, Valeria Ricci, Inés Zuccarelli

Dirección General de Tecnología Educativa (DGTEDU)
Gerencia Operativa de Tecnología e Innovación Educativa (INTEC)
Mercedes Werner

Colaboración de Especialistas de Educación Digital: Juan Martín Bregazzi, Paula Villafañe, María de los Ángeles Villanueva

---

Coordinación de materiales y contenidos digitales (SSPLINED): Mariana Rodríguez
Colaboración: Manuela Luzzani Ovide

Agradecimientos: Julieta Aicardi, Octavio Bally, Pilar Casellas, Ignacio Cismondi, Natalia López, Yamila Lucero

Edición y diseño (GOC)
Edición: Gabriela Berajá, María Laura Cianciolo, Andrea Finocchiaro, Marta Lacour, Sebastián Vargas
Diseño gráfico: Silvana Carretero, Alejandra Mosconi, Patricia Peralta
Actualización web: Leticia Lobato

Este material ha sido elaborado sobre la base del documento *Matemática. Números racionales. Aportes para la enseñanza. Nivel Medio*. GCABA, Ministerio de Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula. 2da ed., 2008.

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires
Matemática : Números racionales I : densidad en Q+ : primer año. - 1a edición para el profesor - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Dirección General de Planeamiento Educativo, 2018.
Libro digital, PDF - (Profundización NES)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-549-732-0

1. Educación Secundaria. 2. Matemática.
CDD 507.12

ISBN: 978-987-549-732-0

Se autoriza la reproducción y difusión de este material para fines educativos u otros fines no comerciales, siempre que se especifique claramente la fuente.
Se prohíbe la reproducción de este material para reventa u otros fines comerciales.

Las denominaciones empleadas en este material y la forma en que aparecen presentados los datos que contiene no implica, de parte del Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, juicio alguno sobre la condición jurídica o nivel de desarrollo de los países, territorios, ciudades o zonas, o de sus autoridades, ni respecto de la delimitación de sus fronteras o límites.

En este material se evitó el uso explícito del género femenino y masculino en simultáneo y se ha optado por emplear el género masculino, a efectos de facilitar la lectura y evitar las duplicaciones. No obstante, se entiende que todas las menciones en el género masculino representan siempre a varones y mujeres, salvo cuando se especifique lo contrario.

Fecha de consulta de imágenes, videos, recursos digitales y textos disponibles en internet: 1 de febrero de 2018.

© Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires / Ministerio de Educación / Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.
Dirección General de Planeamiento Educativo / Gerencia Operativa de Currículum, 2018.

Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa / Dirección General de Planeamiento Educativo / Gerencia Operativa de Currículum.
Av. Paseo Colón 275, 14° piso - C1063ACC - Ciudad Autónoma de Buenos Aires.
Teléfono/Fax: 4340-8032/8030

© Copyright © 2018 Adobe Systems Software. Todos los derechos reservados.
Adobe, el logo de Adobe, Acrobat y el logo de Acrobat son marcas registradas de Adobe Systems Incorporated.

Presentación

La serie de materiales Profundización de la NES presenta distintas propuestas de enseñanza en las que se ponen en juego tanto los contenidos –conceptos, habilidades, capacidades, prácticas, valores y actitudes– definidos en el *Diseño Curricular de la Nueva Escuela Secundaria* de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Resolución N.° 321/MEGC/2015, como nuevas formas de organizar los espacios, los tiempos y las modalidades de enseñanza.

El tipo de propuestas que se presentan en esta serie se corresponde con las características y las modalidades de trabajo pedagógico señaladas en la Resolución CFE N.° 93/09 para fortalecer la organización y la propuesta educativa de las escuelas de nivel secundario de todo el país. Esta norma –actualmente vigente y retomada a nivel federal por la propuesta "Secundaria 2030", Resolución CFE N.° 330/17– plantea la necesidad de instalar "distintos modos de apropiación de los saberes que den lugar a: nuevas formas de enseñanza, de organización del trabajo de los profesores y del uso de los recursos y los ambientes de aprendizaje". Se promueven también nuevas formas de agrupamiento de los estudiantes, diversas modalidades de organización institucional y un uso flexible de los espacios y los tiempos que se traduzcan en propuestas de talleres, proyectos, articulación entre materias, debates y organización de actividades en las que participen estudiantes de diferentes años.

En el ámbito de la Ciudad, el *Diseño Curricular de la Nueva Escuela Secundaria* incorpora temáticas nuevas y emergentes y abre la puerta para que en la escuela se traten problemáticas actuales de significatividad social y personal para los estudiantes.

Existe acuerdo sobre la magnitud de los cambios que demanda la escuela secundaria para lograr convocar e incluir a todos los estudiantes y promover efectivamente los aprendizajes necesarios para el ejercicio de una ciudadanía responsable y la participación activa en ámbitos laborales y de formación. Es importante resaltar que, en la coyuntura actual, tanto los marcos normativos como el *Diseño Curricular* jurisdiccional en vigencia habilitan e invitan a motorizar innovaciones imprescindibles.

Si bien ya se ha recorrido un importante camino en este sentido, es necesario profundizar, extender e instalar propuestas que efectivamente hagan de la escuela un lugar convocante para los estudiantes y que, además, ofrezcan reales oportunidades de aprendizaje. Por lo tanto, sigue siendo un desafío:

- El trabajo entre docentes de una o diferentes áreas que promueva la integración de contenidos.
- Planificar y ofrecer experiencias de aprendizaje en formatos diversos.
- Elaborar propuestas que incorporen oportunidades para el aprendizaje y el ejercicio de capacidades.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

Los materiales elaborados están destinados a los docentes y presentan sugerencias, criterios y aportes para la planificación y el despliegue de las tareas de enseñanza, desde estos lineamientos. Se incluyen también propuestas de actividades y experiencias de aprendizaje para los estudiantes y orientaciones para su evaluación. Las secuencias han sido diseñadas para admitir un uso flexible y versátil de acuerdo con las diferentes realidades y situaciones institucionales.

La serie reúne dos líneas de materiales: una se basa en una lógica disciplinar y otra presenta distintos niveles de articulación entre disciplinas (ya sean areales o interareales). Se introducen también materiales que aportan a la tarea docente desde un marco didáctico con distintos enfoques de planificación y de evaluación para acompañar las diferentes propuestas.

El lugar otorgado al abordaje de problemas interdisciplinarios y complejos procura contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y de la argumentación desde perspectivas provenientes de distintas disciplinas. Se trata de propuestas alineadas con la formación de actores sociales conscientes de que las conductas individuales y colectivas tienen efectos en un mundo interdependiente.

El énfasis puesto en el aprendizaje de capacidades responde a la necesidad de brindar a los estudiantes experiencias y herramientas que permitan comprender, dar sentido y hacer uso de la gran cantidad de información que, a diferencia de otras épocas, está disponible y fácilmente accesible para todos. Las capacidades son un tipo de contenidos que debe ser objeto de enseñanza sistemática. Para ello, la escuela tiene que ofrecer múltiples y variadas oportunidades para que los estudiantes las desarrollen y consoliden.

Las propuestas para los estudiantes combinan instancias de investigación y de producción, de resolución individual y grupal, que exigen resoluciones divergentes o convergentes, centradas en el uso de distintos recursos. También, convocan a la participación activa de los estudiantes en la apropiación y el uso del conocimiento, integrando la cultura digital. Las secuencias involucran diversos niveles de acompañamiento y autonomía e instancias de reflexión sobre el propio aprendizaje, a fin de habilitar y favorecer distintas modalidades de acceso a los saberes y los conocimientos y una mayor inclusión de los estudiantes.

En este marco, los materiales pueden asumir distintas funciones dentro de una propuesta de enseñanza: explicar, narrar, ilustrar, desarrollar, interrogar, ampliar y sistematizar los contenidos. Pueden ofrecer una primera aproximación a una temática formulando dudas e interrogantes, plantear un esquema conceptual a partir del cual profundizar, proponer

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

actividades de exploración e indagación, facilitar oportunidades de revisión, contribuir a la integración y a la comprensión, habilitar oportunidades de aplicación en contextos novedosos e invitar a imaginar nuevos escenarios y desafíos. Esto supone que en algunos casos se podrá adoptar la secuencia completa o seleccionar las partes que se consideren más convenientes; también se podrá plantear un trabajo de mayor articulación entre docentes o un trabajo que exija acuerdos entre los mismos. Serán los equipos docentes quienes elaborarán propuestas didácticas en las que el uso de estos materiales cobre sentido.

Iniciamos el recorrido confiando en que constituirá un aporte para el trabajo cotidiano. Como toda serie en construcción, seguirá incorporando y poniendo a disposición de las escuelas de la Ciudad nuevas propuestas, dando lugar a nuevas experiencias y aprendizajes.

Diego Javier Meiriño
Subsecretario de Planeamiento
e Innovación Educativa

Gabriela Laura Gürtner
Jefa de Gabinete de la Subsecretaría de
Planeamiento e Innovación Educativa

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

¿Cómo se navegan los textos de esta serie?

Los materiales de Profundización de la NES cuentan con elementos interactivos que permiten la lectura hipertextual y optimizan la navegación. Estos reflejan la interactividad general de la serie.

Para visualizar correctamente la interactividad se sugiere bajar el programa Adobe Acrobat Reader que constituye el estándar gratuito para ver e imprimir documentos PDF.

Adobe Reader Copyright © 2017. Todos los derechos reservados.

Portada

» — Flecha interactiva que lleva a la página posterior.

Pie de página

Volver a vista anterior — Al cliquear regresa a la última página vista.

Ícono que permite imprimir.

« 7 » — Folio, con flechas interactivas que llevan a la página anterior y a la página posterior.

Menú interactivo

Orientaciones didácticas | Actividades | 1ra parte | 2da parte

El texto tiene un menú en cada página, cuyos colores indican las secciones que contiene. Las pestañas se encienden señalando el lugar donde está ubicado el lector.

Íconos y enlaces

1 Símbolo que indica una cita o nota aclaratoria. Al cliquear se abre un *pop-up* con el texto:

Ovidescim repti ipita voluptis audi iducit ut qui adis moluptur? Quia poria dusam serspero voloris quas quid moluptur?

Los números indican las referencias de notas al final del documento.

El color azul y el subrayado indican un vínculo a la *web* o a un documento externo.

"Título del texto"

Indica enlace a un texto.

Indica enlace a un sitio o documento externo.

(ver Actividad 1)

Indica enlace a la actividad.

Indica actividad individual.

Indica actividad grupal.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

Introducción

El material que se presenta a continuación propone un trabajo sobre el documento *Matemática, Números racionales* .

Mientras que el documento mencionado está dirigido a docentes, esta guía de trabajo tiene a los estudiantes como destinatarios. Por esa razón, las consignas y las propuestas de actividades están redactadas considerando que ellos son los lectores. Además, se formulan algunas orientaciones didácticas para que el docente organice y administre la tarea.

El desarrollo de las propuestas supone que los estudiantes han trabajado con el documento de referencia, han realizado los problemas que allí se plantean y se encuentran –en el momento de abordar estas actividades– en una etapa de estudio y síntesis sobre el trabajo realizado.

Este último aspecto, el momento de recapitulación e identificación de lo que debe ser retenido resulta incluso más relevante si se tiene en cuenta el interés de acompañar desde la enseñanza a los estudiantes en sus procesos de estudio. Es decir, si se considera, en la planificación de la tarea de enseñar, la gestión de espacios de trabajo en los que ellos puedan analizar las actividades ya realizadas y reflexionar sobre lo que esas propuestas les han permitido aprender, accediendo de este modo a mayores niveles de autonomía.

Sin embargo, es lícito reconocer que generalmente este tipo de trabajo no es familiar para los estudiantes, quienes suelen creer que hacer matemática es solo resolver problemas y pueden desconcertarse ante este tipo de propuestas. Es importante, entonces, que el docente sostenga el propósito de estas actividades, para acompañarlos en la construcción de ciertas herramientas de estudio.

En este sentido, la finalidad de las propuestas se vincula a las planteadas en el documento: *Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio. Documento N° 2: La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática*, elaborado en la jurisdicción.

Se espera que los estudiantes puedan resolver las actividades individualmente o en parejas –según lo considere mejor el docente, teniendo en cuenta las características del grupo–, a partir del trabajo realizado en clase y de los registros en las carpetas. En los momentos que crea necesarios, el profesor podrá intervenir en este trabajo para desarrollar una discusión colectiva de las ideas revisadas en cada actividad.

Es importante señalar, finalmente, que las actividades propuestas remiten al capítulo 3, "Orden y densidad en Q+", del documento de referencia (páginas 41-55), y no al material completo. Constituyen un ejemplo del tipo de actividades de estudio que puede plantearse a los estudiante y debería, por lo tanto, completarse con otras situaciones que permitan abordar el conjunto de contenidos que el material original contiene.

En particular, se vuelven a poner en discusión aquí algunos de los aspectos vinculados a la densidad y el orden en Q+.

Ejes/Contenidos	Objetivos de aprendizaje
• Números racionales positivos. • Orden y densidad.	• Estudiar y revisitar la noción de orden y densidad. • Analizar la cantidad de fracciones de determinado denominador en un intervalo dado. • Recuperar y profundizar la relación entre escritura fraccionaria y escritura decimal.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

Punto de partida

El objetivo de este material es que los estudiantes puedan revisar y sistematizar los conocimientos que utilizaron en los problemas trabajados en clase sobre el orden y la densidad en Q, en comparación con las ideas previamente estudiadas sobre números naturales. Estas ideas podrían sintetizarse de la siguiente manera, tal como se expresa en la NES (p. 525):

- Un número natural tiene siempre un siguiente, mientras que un número racional, no.
- Los números naturales no son densos y los racionales, sí: siempre es posible, dados dos números racionales, encontrar otro número racional comprendido entre ellos.
- Los números decimales (los que tienen una escritura decimal finita) también son densos.
- Toda fracción admite una estructura decimal finita o periódica.

Se trata, en este caso, de volver sobre lo que han hecho con un conjunto de problemas que apuntan a la idea de densidad, una propiedad fundamental en el campo de los números racionales.

Esperamos que los estudiantes recuperen de la carpeta las estrategias y conclusiones a las que llegaron y resuelvan las siguientes actividades.

La actividad 1 propone la revisión de lo trabajado en el problema 1 del documento de referencia: busca retomar las estrategias desplegadas y las posibles conclusiones que se hayan ensayado y ponerlas en juego ahora en una nueva situación (ver Actividad 1).

Se vuelve a preguntar sobre la relación entre el denominador y la cantidad de fracciones que se pueden escribir entre dos números naturales consecutivos con ese denominador. Se espera que los estudiantes puedan recuperar las ideas y conclusiones desarrolladas en clase, apoyándose en la recta numérica para justificar sus argumentos. Esta revisión representa una oportunidad para pensar otros modos de validar la conjetura: "entre dos fracciones de denominador *n*, hay *n*-1 fracciones con ese mismo denominador", apelando al conocimiento de los estudiantes sobre los números naturales y la divisibilidad.

Dado que las actividades propuestas permiten afianzar los procedimientos realizados en el problema 1, el docente será quien acompañe este proceso con el objetivo de que los estudiantes puedan recuperar los conocimientos abordados y alentar el trabajo con otros posibles argumentos.

Por ejemplo, otra validación de la conjetura puede basarse en que entre dos múltiplos consecutivos de un número *n* siempre hay *n* - 1 números naturales. Cada uno de ellos representará el numerador de una fracción con denominador *n*, que se encuentra entre dos múltiplos de *n: k·n y (k+1)·n*. Es probable que algunos estudiantes logren atrapar esta idea, pero la expresen a partir de los ejemplos propuestos; será el docente quien decida el grado de formalización de las conclusiones.

En ese sentido, se podría reconocer en la pregunta por las fracciones de denominador 21, que al reescribir al 17 como $\frac{357}{21}$ y al 18 como $\frac{378}{21}$, se están usando dos múltiplos de 21: 357=21·17 y 378=21·18. Las fracciones de denominador 21 entre $\frac{357}{21}$ y $\frac{378}{21}$ tendrán como numeradores a todos los números naturales que están entre esos dos múltiplos: 357+1; 357+2; 357+3;...; 357+19; 357+20, por lo que habrá 20 fracciones de denominador 21 entre $\frac{357}{21}$ y $\frac{378}{21}$.

El ítem **c** propone nuevamente una actividad de evocación, pero esta vez los estudiantes deberán además realizar un trabajo de organización de lo aprendido para poder comunicarlo a otros. Algunas de las ideas que sería interesante que los estudiantes expliciten con ayuda del docente podrían estar vinculadas a las estrategias de resolución —tanto correctas como erróneas, señalando dónde estuvieron los errores—; también podrían sistematizarse distintos argumentos que circularon en la clase y las conclusiones elaboradas. Entre estas últimas, se apunta a que aparezcan expresiones similares a las siguientes:

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

- entre dos números naturales siempre es posible encontrar fracciones con cualquier denominador;
- entre dos números naturales existen infinitas fracciones;
- al buscar fracciones de un denominador dado entre dos números naturales, se encontrarán tantas fracciones como el número que sea el denominador, menos 1 (si llamamos *n* al denominador, habrá *n* - 1 fracciones).

Será importante que el docente propicie y sostenga el intercambio y ayude a sistematizar estas conclusiones entre los grupos de trabajo, de manera tal que las ideas a las que arribaron los estudiantes se discutan en forma colectiva y las respuestas de un equipo se complementen con las de otros.

Con los ítemes **a** y **b** de la segunda actividad, se espera que los estudiantes puedan volver a revisar las discusiones y conclusiones que tuvieron lugar en clase en torno al problema 2 (ver Actividad 2). Además, se busca que puedan elaborar con sus palabras explicaciones para las estrategias propias y las de sus compañeros. En particular, se pueden retomar ideas sobre fracciones equivalentes y cómo hallarlas; estrategias que usen la recta numérica como punto de apoyo y técnicas y criterios de comparación entre fracciones.

Estos dos primeros ítemes generan una buena oportunidad para discutir la conveniencia o no de transformar las fracciones en su escritura decimal. A lo largo de la resolución de los problemas del documento y de las actividades, se espera que los estudiantes puedan distinguir cuándo es conveniente trabajar con fracciones y cuándo con la escritura decimal.

En lo específico de la escritura del ítem **c**, en una posible discusión colectiva será interesante retomar qué significa ese "poquito" (debe ser menos que $\frac{1}{9}$) y, para eso, el trabajo con la recta numérica vuelve a ser un punto de apoyo fuerte para la argumentación.

Se pretende aquí que puedan leer y analizar un razonamiento elaborado por unos estudiantes supuestos. Es decir, se trata ahora de que realicen un tipo de tarea algo distinta de la que han desarrollado hasta el momento. En efecto, comprender un razonamiento –que ha sido formulado por otros, a los que no es posible preguntarles las razones que sostienen los mecanismos empleados– resulta mucho más complejo que elaborar una estrategia propia de resolución y tratar de fundamentarla. La propuesta asume un nivel de generalidad mayor porque ahora el foco del análisis es la estrategia en sí misma y los números involucrados juegan, de una manera más implícita o más explícita, un papel de ejemplo genérico. Se trata de estos números, pero bien podrían ser otros. Lo central es el interés de comparar las

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

fracciones de denominador 10 con los extremos del intervalo y establecer si son mayores o menores que esos bordes para decidir si se encuentran entre las fracciones dadas.

Como puede verse, se busca que los estudiantes puedan tomar una posición fundamentada en relación con determinadas ideas que trascienden la resolución de una actividad o la elaboración de una técnica específica. Si bien esta tarea no es sencilla, es parte de la actividad matemática que resulta interesante abordar y promover con los estudiantes.

En relación con la propuesta del ítem **a** de la tercera actividad (ver Actividad 3), podrían identificarse ideas similares a las siguientes:

- En el problema 2 resulta útil encontrar las expresiones decimales de las fracciones que son los extremos del intervalo. Esto permite identificar números decimales intermedios más fácilmente, que luego se pueden expresar como fracciones.
- Para argumentar que una fracción está entre las dadas en la consigna, en el problema 2 sirvió comparar de a pares dicha fracción con las que eran los extremos del intervalo. Para hacer esta comparación, se pueden usar –y revisar– distintos criterios y técnicas.
- Una manera de resolver el problema 2 es reescribir los extremos del intervalo utilizando fracciones equivalentes de manera tal que resulte más sencilla la comparación (por ejemplo, buscando fracciones con el mismo denominador). El problema 4 se puede empezar a resolver de la misma manera.

Respecto de esta última idea, es relevante identificar que aunque en los dos problemas es posible buscar fracciones equivalentes, la estrategia para hacerlo es distinta. Esto se debe a que –a diferencia de los denominadores 3 y 9 en el problema 2– en el problema 4 los denominadores son coprimos, de modo que los estudiantes tendrían que modificar ambas fracciones para poder conseguir fracciones equivalentes del mismo denominador (cuya elección sea probablemente 35).

Una vez que se hayan explicitado los procedimientos que sirvieron en el problema 2, la consigna se podría ampliar a reconocer otras ideas que sirvan y que quizás no hubieran surgido en el trabajo previo. Un ejemplo de esto es el rápido reconocimiento de la fracción $\frac{1}{6}$ como respuesta posible –relacionado directamente con las fracciones específicas del enunciado–, que tiene la característica de tener el mismo numerador y denominador comprendido entre los extremos del intervalo.

Para la resolución del ítem **b** no es necesario que los estudiantes hagan dos listas separadas de “similitudes” y “diferencias”, sino que podrían reconocer ambas en forma conjunta. La

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

organización de las respuestas puede quedar a cargo del docente del grupo, pero esencialmente se espera que se retomen las siguientes ideas:

- En el problema 2 se puede apelar a la escritura decimal de las fracciones. Sin embargo, en el problema 4 es bastante más difícil usar esta misma idea, ya que $\frac{1}{7}$ =0,142857) ; $\frac{1}{5}$=0,2. En este caso no hay entre $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{5}$ ninguna fracción que tenga denominador 10, y si se analizan distintas fracciones posibles de denominador 100 (0,15= $\frac{15}{100}$;0,16=$\frac{16}{100}$;...;0,19=$\frac{19}{100}$), la única que luego puede escribirse como una fracción equivalente de denominador 20 es 0,15=$\frac{15}{100}$ =$\frac{3}{20}$.
- En el problema 4 se puede utilizar la estrategia de buscar fracciones equivalentes para simplificar el trabajo, mientras que en el problema 2, no (porque no se puede encontrar fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ ni $\frac{4}{9}$ con denominador 10).
- En ambos problemas la comparación de fracciones de a pares permite argumentar por qué una fracción está entre otras dos dadas. En algunos casos se puede comparar fracciones de igual denominador y, en otros casos, conviene comparar fracciones de igual numerador.

La tarea de reconocer similitudes y diferencias entre los problemas y, en particular, entre las estrategias desplegadas, resulta ser una práctica interesante para los estudiantes, en tanto es una manera de poder caracterizar a unos y a otras. Es decir, se trata ahora de considerar las condiciones que tienen las situaciones en juego y de asociarlas a los recursos empleados.

La propuesta apunta a que el análisis de la actividad permita a los estudiantes tomar conciencia de que la reflexión sobre el trabajo ya realizado es una estrategia potente para identificar nuevas relaciones y no solo compartir las que se produjeron en el momento de la resolución inicial de los problemas. Este análisis difícilmente surja de manera espontánea por parte de los estudiantes. Para que pueda ser desplegado en el aula, deberá ser el docente quien comande el desarrollo de la discusión y de las conclusiones que se puedan elaborar.

La Actividad 4, que es la que se propone a continuación del trabajo realizado, es la primera situación del documento en el cual los estudiantes, apoyados en los conocimientos sobre el orden y la comparación de fracciones que elaboraron hasta aquí, pueden poner en discusión la idea de “siguiente de un número” en el conjunto de los números racionales (ver Actividad 4). Es decir, con lo producido hasta el momento estarán en condiciones de asegurar que en Q los números no tienen siguiente. Como se expresa en el documento Números racionales: “esta idea (...) es bastante resistida por los estudiantes y necesitará nuevos encuentros para que sea comprendida por todos” (p. 46). En ese sentido, el trabajo con esta actividad representa una oportunidad para volver sobre esta noción, revisándola y ampliándola. En particular, los estudiantesos deberán retomar los argumentos que seguramente trabajaron en clase. Algunos de ellos pueden ser:

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

- Entre dos fracciones siempre es posible hallar otra que se encuentre en su punto medio. En el problema 5 resulta costoso determinarla; sin embargo, se puede asegurar que existe.
- Se puede utilizar la expresión decimal de las fracciones $\frac{667}{1000}$ y $\frac{2}{3}$ para encontrar un número decimal entre ellas.

La actividad de evocación de lo realizado es diferente de la tarea de "resolver el problema", ya que demanda un retorno sobre el sentido del enunciado planteado y no tanto sobre los detalles de su resolución. En este sentido, "El proceso mental que se requiere para hablar de lo que se hizo es mucho más complejo que el que se requiere solo para *hacer*. Los alumnos deben describir los problemas resueltos –indicando su enunciado, explicándolo, diciendo cuáles eran los datos y cuál la pregunta–, pero además deben relatar los distintos procedimientos de resolución utilizados en clase" .

Una vez realizada la tarea de evocación, el docente puede convocar a los estudiantes a una nueva actividad que amplíe las ideas elaboradas hasta aquí. Un corolario que podría establecerse a partir de la idea de que en Q los números no tienen siguiente es que, del mismo modo, tampoco tienen anterior.

La actividad 5 retoma el trabajo realizado con las expresiones decimales en los problemas 3 y 5. Será un momento propicio para que el docente incentive a los estudiantes a recuperar las ideas y estrategias analizadas y revisadas en las actividades y reconocerlas. Por un lado, si no se fija el denominador, existen infinitas fracciones entre dos dadas. En particular, si se exige que los denominadores sean potencias de 10, también existen infinitas fracciones. Por otro lado, si si se fija el denominador, es probable que no exista una fracción entre dos números racionales determinados o que la cantidad de fracciones a encontrar sea finita (ver Actividad 5).

En la reflexión sobre estos problemas se espera trabajar con la idea de que siempre es posible obtener el punto medio entre dos números y que esto tiene como consecuencia la existencia de infinitas fracciones entre ellos. Dicha idea no suele ser evidente ni sencilla para los estudiantes, por lo que será esencial retomarla y revisarla para afianzar y seguir construyendo la noción de densidad.

Además, si el docente desea hacer una discusión colectiva, será un buen momento para poner el foco en las estrategias utilizadas. Por ejemplo, la recta numérica vuelve a ser una posible herramienta en la que se pueden apoyar los argumentos de los estudiantes. También será interesante discutir y distinguir en qué casos es conveniente escribir un número racional en su expresión fraccionaria o decimal, reconociendo las ventajas de una u otra, según el caso.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

La actividad 6 tiene como objetivo la escritura de una "versión oficial" de los conocimientos que se han puesto en juego a lo largo de los problemas. Es posible que el docente haya propuesto en las situaciones previas la escritura de conclusiones, consejos o indicaciones sobre aquellos aspectos que fueron identificados como importantes de ser "atrapados". En esta oportunidad, la intención es elaborar de manera colectiva un texto que reúna aquellas formulaciones y que, al ser guardado en formato digital, esté accesible para los estudiantes y puede ser revisado y reelaborado en nuevas versiones, si fuera necesario (ver Actividad 6).

La escritura de estas ideas es un hecho relevante en el trabajo del aula, en tanto también refleja una manera de dejar por escrito los acuerdos, ideas y consensos a los que ese grupo específico llega durante el proceso de estudio.

Evaluación

Como se mencionó en la introducción de este documento, las actividades aquí planteadas apuntan a que los estudiantes puedan revisar el trabajo ya realizado. Se trata ahora de que analicen los conocimientos adquiridos desde la perspectiva más amplia que les ofrece el recorrido ya transitado.

En ese sentido, el avance de los estudiantes no estaría dado tanto por el aprendizaje de nuevas ideas –que ya fueron tratadas al abordar los problemas originales–, sino por el conjunto de relaciones que consiguieran establecer, por las explicitaciones que pudieran formular y por la consistencia de las explicaciones que progresivamente estén en condiciones de producir.

Este documento, como se ha dicho, propone a los estudiantes un conjunto de situaciones de estudio con el propósito no solo de profundizar un contenido específico, sino también de colaborar con ellos, desde la enseñanza, en la construcción de mayores niveles de autonomía. Ese aspecto también puede ser tenido en cuenta en la ponderación de sus avances. Se trata, sin dudas, de una construcción de largo plazo en la que es posible –y necesario– alentarlos en la consideración de este tipo de tareas como uno de los recursos a los que pueden apelar para estudiar este y otros contenidos del área. Es decir, ayudar a los estudiantes a trascender el plano de la resolución de las actividades puntuales para ir construyendo la idea de que para estudiar matemática es posible realizar otras actividades, además de rehacer

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

problemas similares a los resueltos en clase.

Por último, es probable que estas actividades sean previas, o constituyan parte de la preparación para la evaluación que los docentes tomen sobre los contenidos planteados. El desempeño de los estudiantes en ese dispositivo a partir del trabajo realizado puede constituir otro de los elementos de evaluación.

Bibliografía

GCABA. Ministerio de Educación. Dirección General de Planeamiento Educativo. Gerencia Operativa de Currículum. *Diseño Curricular para la Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad de Buenos Aires. Ciclo Básico de la Formación General*, 2015.

GCABA. Ministerio de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula. *Matemática. Números racionales*. Aportes para la enseñanza, 2006.

GCABA. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento Educativo.*La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar Matemática.* Serie Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio, 2005.

Tarasow, Paola. *La tarea de planificar*. Buenos Aires, Tinta Fresca. Serie Enseñar matemática en la EGB, 2006.

Notas

1. GCABA. Ministerio de Educación. Dirección General de Planeamiento Educativo. Dirección de Currícula y Enseñanza. *Matemática*. *Números racionales*. Aportes para la enseñanza, 2006.
2. GCABA. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento Educativo. *La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar Matemática*. Serie Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio, 2005.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

Introducción

Las siguientes actividades tienen como objetivo que puedan revisar y sistematizar los conocimientos que utilizaron en los problemas trabajados en clase sobre el orden y la densidad en Q, en comparación con las ideas previamente estudiadas sobre números naturales. Se espera que, para resolverlas, recuperen de la carpeta las estrategias y conclusiones a las que llegaron.

Actividad 1

Revisen en sus carpetas las resoluciones del problema 1, que se reproduce a continuación.

> **Problema 1**
>
> **¿Cuántas fracciones hay entre 17 y 18? ¿Cuántas fracciones con denominador 5 hay entre 17 y 18? ¿Y con denominador 9? ¿Y con denominador 21?**

a. Es probable que para la primera de las preguntas –cuántas fracciones hay entre 17 y 18– ustedes hayan respondido, correctamente, que es posible encontrar más de una.

1. ¿Con qué procedimiento pudieron encontrar las fracciones que identificaron?
2. ¿Podrían encontrar más de una fracción si se tratara de otro par de números naturales consecutivos, por ejemplo 73 y 74? ¿Y si se tratara de cualquier par de números naturales consecutivos?

b. Para la siguiente pregunta del problema 1, es posible que ustedes hayan encontrado que hay cuatro fracciones con denominador 5, si no se consideran los bordes. Es decir, sin considerar al 17 y al 18, esas fracciones son: $\frac{86}{5}$, $\frac{87}{5}$, $\frac{88}{5}$ y $\frac{89}{5}$. Siguiendo el mismo razonamiento, habrán llegado a la conclusión de que con denominador 9 hay 8 fracciones en ese intervalo y con denominador 21, hay 20 fracciones.

Como ven, pareciera que la cantidad de fracciones en ese intervalo es una menos que el denominador de las fracciones que se buscan: con denominador 5 hay 4 fracciones, con denominador 9 hay 8 fracciones, con denominador 21 hay 20 fracciones.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

¿Será una casualidad de este par de números? Si la respuesta es "sí, es casualidad", busquen un par de números naturales consecutivos para los que esto no ocurra; y si la respuesta es "no, no es casualidad", expliquen por qué ocurre este hecho.

c. Si tuvieran que explicarle a un compañero qué aprendieron con el problema 1, ¿qué le dirían?

Actividad 2

Revisen en sus carpetas las resoluciones del problema 2, que se reproduce a continuación.

PROBLEMA 2

¿Cuántas fracciones hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$?
¿Cuántas fracciones hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$ que tengan denominador 9?
¿Y que tengan denominador 18?
¿Y que tengan denominador 10?

Una diferencia de este problema en relación con el problema 1 es que aquí el intervalo ya no está dado con números naturales consecutivos, sino a partir de dos fracciones. Es importante que tomen nota de esta característica, porque se trata aquí de analizar, entre otras cuestiones, si las ideas que elaboraron para el problema 1 se pueden extender para este caso.

a. ¿Es cierto que entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$ encontraron más de una fracción? ¿Podrían decir cuántas?

b. Es probable que analizar cuántas fracciones hay en ese intervalo con denominador 9 y denominador 18 no les haya resultado muy complejo, porque 18 es múltiplo de 3 y de 9, y entonces es sencillo encontrar fracciones equivalentes a las dadas que tengan esos denominadores.

Las dificultades están concentradas en la pregunta sobre cuántas fracciones es posible hallar que tengan denominador 10, porque no es posible encontrar fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ y a $\frac{4}{9}$ con ese denominador.

¿Cómo resolvieron entonces el problema? ¿Todos usaron los mismos procedimientos?

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

c. Para responder la pregunta sobre cuántas fracciones es posible encontrar que tengan denominador 10, algunos estudiantes suelen hacer comentarios como el siguiente:
"Busco cuál es la fracción más chica que tenga denominador 10 que sea un poquito mayor que $\frac{1}{3}$, porque si eso ocurre, esa fracción con denominador 10 ya está en el intervalo".

"Busco cuál es la fracción más grande que tenga denominador 10 que sea un poquito menor que $\frac{4}{9}$, porque si eso ocurre, esa fracción con denominador 10 todavía está en el intervalo".

¿Son correctas estas ideas?

Actividad 3

A partir del trabajo realizado en la actividad anterior, revisen en sus carpetas las resoluciones del problema 4, que se reproduce a continuación.

Problema 4

a) Encontrar dos fracciones que estén entre $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{5}$.

b) Encontrar una fracción con denominador 20.

c) ¿Hay más de una fracción? ¿Cuántas?

a. Para resolver la pregunta **a** del problema 4, es posible utilizar algunas ideas abordadas en el problema 2 al buscar fracciones entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$. Hagan una lista de las ideas utilizadas en el problema 2 que sirven para pensar la solución de la pregunta a en este problema. La siguiente es una posible:

*En el problema 2, si no se indica qué denominador deben tener las fracciones que se están usando, es posible encontrar infinitas entre las dos dadas. En la pregunta **a** del problema 4 hay que encontrar dos fracciones, pero es posible hallar infinitas.*

b. En la parte **b** del problema 4 hay que encontrar una fracción con denominador 20 entre $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{5}$. Ese problema es algo similar a la pregunta c del problema 2 donde hay que encontrar fracciones con denominador 10 entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$ y también un poco diferente.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

Discutan entre ustedes qué similitudes y diferencias encuentran en sus formas de resolución en ambos problemas.

Actividad 4

El siguiente es el problema 5, que ustedes ya resolvieron:

> **Problema 5**
>
> **¿Es verdad que $\frac{667}{1.000}$ es la primera fracción después de $\frac{2}{3}$?**

Seguramente, a partir del trabajo en el aula, es posible que hayan determinado que no es cierto que $\frac{667}{1000}$ es la primera fracción después de $\frac{2}{3}$. Esa idea es correcta.

Revisen con qué argumentos es posible estar seguros de esa afirmación.

Actividad 5

El problema 5 (trabajado en la actividad anterior) y el problema 3, que se reproducen a continuación, están vinculados porque en ambos casos se ponen en juego números decimales.

> **Problema 3**
>
> **¿Cuántas fracciones, cuyo denominador es una potencia de 10, hay entre $\frac{72}{100}$ y $\frac{73}{100}$? ¿Y con denominador 10? ¿Y con denominador 100?**

¿Qué ideas pueden pasar en limpio a partir del trabajo con esas dos situaciones?

Actividad 6

En esta última actividad se trata de que puedan escribir todo lo que aprendieron o recordaron a partir del trabajo aquí realizado. Para producir un listado de ideas entre todos, pueden utilizar un documento compartido de Google Drive. De esta manera, pueden elaborar un texto en forma colaborativa.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación | Subsecretaría de Planeamiento e Innovación Educativa.

Vamos Buenos Aires